

УДК 539.3

© 2002 г. В.А. Бабешко, В.В. Калинин

**МЕТОД ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ
В СВЯЗАННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ДЛЯ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

Метод фиктивного поглощения [1–3] обобщается на класс связанных смешанных задач теории электроупругости, термоупругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства. Эти задачи отличаются тем, что символы ядер их интегральных уравнений наряду с нулями и полюсами имеют точки ветвления. Обобщение основано на применении в рамках метода прямых численных процедур, что дает возможность использовать широкий класс простых по структуре матриц-функций, подчиненных лишь одному требованию – сохранять асимптотические свойства символов ядер соответствующих интегральных операторов. При этом характер представления символа ядра при реализации численных алгоритмов определяется типом рассматриваемой среды. Приближенное представление символа ядра интегрального оператора используется в случае, когда он является мероморфной функцией (слой, пакет слоев и т.д.). В этом случае замена символа аппроксимирующей его функцией простой структуры позволяет резко сократить необходимые для достижения требуемой точности решения задачи вычислительные ресурсы. Качественный характер решения сохраняется в полном объеме. Точное представление символа ядра интегрального оператора используется в случаях, когда он наряду с нулями и полюсами, имеет точки ветвления на вещественной оси (слоисто-неоднородное полупространство) или в ее окрестности (термоупругие среды). Использование в этом случае аппроксимирующих функций малоэффективно, поскольку приводит к погрешности решения не только количественного, но и качественного характера в силу невозможности построения равномерных аппроксимаций символа ядра, учитывающих наличие у него точек ветвления.

Изучение связанных смешанных задач теории электроупругости или термоупругости предполагает использование эффективных методов решения систем интегральных уравнений относительно некоторой расширенной вектор-функции, компонентами которой, наряду с компонентами вектора контактных напряжений, являются либо плотность распределения заряда (компонента вектора индукции), либо плотность теплового потока в области контакта. К таким методам относится метод фиктивного поглощения ([1–3] и др.), развитый применительно к решению систем уравнений, возникающих при исследовании смешанных задач теории электроупругости или термоупругости для сред типа слоя или многослойных пакетов. Символы ядер таких уравнений – мероморфные функции. Однако предложенный ранее ([1–3] и др.) подход неприменим к интегральным уравнениям, символы ядер которых имеют точки ветвления. Кроме того, реализация этого подхода предполагает применение специальных, громоздких по структуре функционально коммутативных матриц.

Предлагаемый в настоящей работе подход к решению систем интегральных уравнений полностью свободен от указанных недостатков.

1. Схема метода. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\mathbf{k} \mathbf{q} = \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathbf{f}(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega \quad (1.1)$$

$$\mathbf{k}(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \|K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2)\|_{m,n=1}^N$$

Размерность системы определяется типом среды и геометрией задачи. В пространственных задачах для электроупругих сред без учета тепловых эффектов, равно как и в задачах термоупругости в отсутствие электрических полей, $N = 4$. Для пьезоэлектрических сред $N = 5$ и т.д.

Элементы $K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2)$ обладают следующими свойствами [1]:

1) они являются аналитическими функциями двух комплексных переменных, допускающих представление

$$K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{\lambda=1}^{C_{mn}} P_{mn}^{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) R_{mn}^{\lambda}(u), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad C_{mn} < \infty$$

причем $P_{mn}^{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2)$ – некоторые полиномы, $R_{mn}^{\lambda}(u)$ – аналитические функции, такие, что имеет место соотношение

$$\det \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = D(u)$$

где $D(u)$ – аналитическая функция переменной u ;

2) функции $R_{mn}^{\lambda}(u)$ и $D(u)$ могут иметь конечное число точек ветвления и конечное число вещественных полюсов;

3) при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$ в системе координат $\alpha_i^{\gamma} O \alpha_2^{\gamma} (\alpha_1^{\gamma} = \alpha_1 \cos \gamma + \alpha_2 \sin \gamma, \quad \alpha_2^{\gamma} = \alpha_2 \cos \gamma - \alpha_1 \sin \gamma)$ справедливы асимптотические представления

$$R_{mn}^{\lambda}(u) = (c_{mn}^{\lambda} |u|^{\theta(1,\lambda,m,n)} + d_{mn}^{\lambda} u^{\theta(2,\lambda,m,n)})(1 + O(u^{-1})), \quad \theta(k, \lambda, m, n) < 0$$

$$K_{mn}^{\gamma}(\alpha_1^{\gamma}, \alpha_2^{\gamma}) = |\alpha_2^{\gamma}|^{-1} [a_{mn} + b_{mn} \operatorname{sign} \alpha_2^{\gamma}] [1 + O((\alpha_2^{\gamma})^{-1})]$$

где

$$K_{mn}^{\gamma}(\alpha_1^{\gamma}, \alpha_2^{\gamma}) = K_{mn}(\alpha_1^{\gamma} \cos \gamma - \alpha_2^{\gamma} \sin \gamma, \alpha_1^{\gamma} \sin \gamma + \alpha_2^{\gamma} \cos \gamma),$$

$a_{mn} = a_{mn}(\alpha_1^{\gamma}, \gamma)$, $b_{mn} = b_{mn}(\alpha_1^{\gamma}, \gamma)$ – ограниченные функции параметров.

Система (1.1) однозначно разрешима при любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ [1]. Область Ω , граница которой может иметь угловые точки, является выпуклой. Расположение контуров Γ_1, Γ_2 обеспечивает выполнение условий излучения [4].

Введем в рассмотрение матрицу $\mathbf{S}$, элементы которой имеют простую структуру и обладают асимптотическими свойствами соответствующих элементов матрицы $\mathbf{K}$. Можно показать, что матрица

$$\mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{S}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.2)$$

при $|\alpha_1|, |\alpha_2| \rightarrow \infty$ имеет представление

$$\mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{I} + O(u^{-1})$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Аналогичным свойством обладает матрица

$$\boldsymbol{\pi}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{\Pi}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{S}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.3)$$

Построим матрицы

$$\Pi^*(\alpha_1, \alpha_2) = \|\Pi_{mn}^*\|_{m,n=1}^N, \quad \pi^*(\alpha_1, \alpha_2) = \|\pi_{mn}^*\|_{m,n=1}^N$$

элементы которых – рациональные функции, аппроксимирующие элементы матриц Π и π на вещественной оси

$$\Pi_{mn} \approx \Pi_{mn}^* = P_{mn}^0(\alpha_1, \alpha_2)P^{0^{-1}}(u), \quad \pi_{mn} \approx \pi_{mn}^* = \pi_{mn}^0(\alpha_1, \alpha_2)\pi^{0^{-1}}(u)$$

и введем в рассмотрение матрицу

$$K_0 = K\Pi^{*-1} \quad (1.4)$$

которая, обладая асимптотическими свойствами матрицы K , включает в себя все неучтенные в Π^* особенности, в том числе точки ветвления. Далее предположим, что полярные множества матриц Π и π , равно, как и Π^* и π^* , определяются соотношениями

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = z_k^2 \quad \text{и} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \zeta_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Лемма [1]. Пусть вектор-функция $q(x_1, x_2) \in L_p(\Omega)$, $p > 1$ имеет носитель в выпуклой области Ω . Для того чтобы вектор-функция $V(\alpha_1, \alpha_2)$ и $V^{-1}(x_1, x_2)$ – прямое и обратное преобразование Фурье)

$$t(x_1, x_2) = V^{-1}(x_1, x_2)\Pi(\alpha_1, \alpha_2)V(\alpha_1, \alpha_2)q$$

обладала этим же свойством, необходимо и достаточно, чтобы на полярном множестве функции $\Pi(\alpha_1, \alpha_2)$ имело место тождество $V(\alpha_1, \alpha_2)q \equiv 0$.

Следуя развитому ранее подходу [1–3], решение системы (1.1) будем искать в виде

$$q(x_1, x_2) = q_0(x_1, x_2) + g(x_1, x_2), \quad g = \sum_{k=1}^{4M^2} C_k g_k(x_1, x_2) \quad (1.5)$$

Здесь g_k – набор некоторых, определенных в области Ω функций, $C_k = \{C_k^i\}_{i=1}^N$ – векторы, удовлетворяющие условию

$$V(\alpha_1, \alpha_2)q = V(\alpha_1, \alpha_2)g, \quad \Pi^*V(\alpha_1, \alpha_2)q_0 = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = z_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

После подстановки выражений (1.5) с учетом равенства (1.4) в систему (1.1) и ряда преобразований получим систему

$$k_0 t = \int \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} K_0(\alpha_1, \alpha_2) T(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = f(x_1, x_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{4M^2} C_k^i f_k^i \quad (1.7)$$

относительно новой неизвестной функции

$$T(\alpha_1, \alpha_2) = \Pi^*(\alpha_1, \alpha_2)V(\alpha_1, \alpha_2)q_0 \quad (1.8)$$

Здесь

$$t = \{t^n\}_{n=1}^N, \quad K_0 = \|K_{nj}^0\|_{n,j=1}^N, \quad f = \{f^n\}_{n=1}^N, \quad f_k^i = \{f_k^{in}\}_{n=1}^N$$

$$f_k^{in}(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} k_{ni}(x_1 - \xi, x_2 - \eta) g_k(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Из соотношения (1.8) следует

$$q_0 = V^{-1}\pi^*Vt, \quad t(x_1, x_2) = V^{-1}(x_1, x_2)T \quad (1.9)$$

Согласно лемме, вектор-функция $\mathbf{q}_0$ должна принадлежать классу $L_p(\Omega)$ и иметь носитель в той же области, что и $\mathbf{t}$. Поэтому на полярном множестве $\pi^*(\alpha_1, \alpha_2)$ должны выполняться соотношения

$$\mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad (1.10)$$

Из соотношений (1.5) после внесения выражений (1.9) вытекает окончательный вид трансформанты Фурье решения системы (1.1)

$$\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = \pi^*(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{g} \quad (1.11)$$

Решение системы (1.1) получим, применив к выражению (1.11) обращение Фурье

$$\mathbf{q}(x_1, x_2) = \mathbf{V}^{-1}\pi^*\mathbf{V}\mathbf{t} + \mathbf{g} \quad (1.12)$$

Замечание 1. При исследовании динамики массивных тел, механических и электромеханических систем, взаимодействующих с термоупругой или электроупругой средой, достаточно вычисления интегральных характеристик задачи (реакция среды на воздействие штампа, тепловой поток через зону контакта, заряд и т.д.). Необходимость вычисления плотности этих характеристик (контактные напряжения, плотность теплового потока, плотность распределения заряда и т.д.) отпадает. В этом случае целесообразно использовать формулу (1.11), подставив

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad g_k = \delta(x_1 - x_1^k, x_2 - x_2^k)$$

Здесь x_1^k, x_2^k – координаты вершин прямоугольников, разделяющих область Ω .

Замечание 2. Представление (1.12) справедливо для $\mathbf{g} \in L_p(\Omega)$. В случае использования в соотношениях (1.5) системы δ -функций, целесообразно ввести оператор [1]

$$\mathbf{sg} = \iint_{\Omega} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2)[\Pi^*(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{I}]e^{-i(\alpha_1(x_1 - \xi) + \alpha_2(x_2 - \eta))} d\alpha_1 d\alpha_2 g(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Тогда выражение (1.12) преобразуется к виду

$$\mathbf{q}(x_1, x_2) = \mathbf{k}_0^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{k}_0^{-1}\mathbf{sg} + \mathbf{V}^{-1}[\pi^* - \mathbf{I}]\mathbf{V}[\mathbf{k}_0^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{g} - \mathbf{k}_0^{-1}\mathbf{sg}]$$

2. Решение системы. Решение системы (1.7) будем искать в виде

$$\mathbf{t}(x_1, x_2) = \mathbf{t}_0(x_1, x_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{4M^2} C_k^i \mathbf{t}_k^i(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

где $\mathbf{t}_0$ и $\mathbf{t}_k^i$ удовлетворяют уравнениям:

$$\mathbf{k}_0\mathbf{t} = \mathbf{f}(x_1, x_2), \quad \mathbf{k}_0\mathbf{t}_k^i = \mathbf{f}_k^i \quad (2.2)$$

Введем две системы базисных (координатных) функций $\psi_k(x_1, x_2)$ и $\phi_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2, \dots, L$), заданных в области Ω и обладающих полнотой [5]. Приближенные решения уравнений (2.2) представим в форме

$$\mathbf{t}_0(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^L \beta_m \psi_m(x_1, x_2), \quad \mathbf{t}_k^i(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^L \beta_{km}^i \psi_m(x_1, x_2) \quad (2.3)$$

где $\beta_m = \{\beta_m^j\}_{j=1}^N$, $\beta_{km}^i = \{\beta_{km}^{ij}\}_{j=1}^N$ ($m = 1, 2, \dots, L$) – векторы размерности N .

Подставив первое выражение (2.3) в первое уравнение (2.2), применив метод Бубнова – Галеркина и изменив порядок суммирования, что связано с переходом от векторов размерности N к векторам размерности L , получим матричную систему

$$\sum_{j=1}^N A^{nj} \beta^j = F^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

$$A^{nj} = \|A_{lm}^{nj}\|_{l,m=1}^L, \quad A_{lm}^{nj} = \int \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} K_{nj}^0(\alpha_1, \alpha_2) \Psi_m(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_l^*(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\beta^j = \{\beta_m^j\}_{m=1}^L, \quad F^n = \{F_l^n\}_{l=1}^L, \quad F_l^n = \iint_{\Omega} f^n(x_1, x_2) \phi_l(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Здесь K_{nj}^0 и f^n – компоненты матрицы K_0 и вектора f , $\Psi_m(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\Phi_l(\alpha_1, \alpha_2)$ – трансформанты Фурье функций $\psi_m(x_1, x_2)$ и $\phi_l(x_1, x_2)$, звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина.

Поступая аналогично со вторым выражением (2.3), придем к матричной системе

$$\sum_{j=1}^N A^{nj} \beta_k^{ij} = F_k^{in}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, 4M^2 \quad (2.5)$$

$$\beta_k^{ij} = \{\beta_{km}^{ij}\}_{m=1}^L, \quad F_k^{in} = \{F_{kl}^{in}\}_{l=1}^L, \quad F_{kl}^{in} = \iint_{\Omega} f_k^{in}(x_1, x_2) \phi_l(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Системы (2.4) и (2.5) представляют собой системы уравнений порядка N с матричными коэффициентами относительно N неизвестных векторов размерности L . Сравнительно невысокий, связанный с размерностью исходной задачи, порядок матричных систем (2.4) и (2.5) позволяет расчленив проблему на два этапа, разрешив эти системы сначала относительно неизвестных векторов в аналитической форме и получить N алгебраических систем порядка L , а затем для решения последних применить численные методы.

Вычисление элементов матриц A^{nj} производится один раз. Остальные действия по вычислению всей совокупности векторов β^i и β_k^{in} сводятся к последовательному умножению указанных матриц и их комбинаций на векторы F^i и F_k^{in} . Реализация данного подхода к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными будет изложена ниже.

Предположим, что решения систем (2.4) и (2.5) найдены и функции t_0 и t_k^i построены. Подставив выражение (2.1) в равенства (1.9), получим систему $N \times 4M^2$ уравнений для нахождения коэффициентов C_k^i

$$T_0(\alpha_1, \alpha_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{4M^2} C_k^i T_k^i(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \zeta_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2.6)$$

3. Пример. В качестве примера рассмотрим систему интегральных уравнений, типичную при исследовании в двумерной постановке связанных смешанных задач электроупругости для пьезоактивных кристаллов класса бтт или пьезокерамики,

$$\int_{-a}^a k(x_1 - \xi, \omega) q(\xi) d\xi = f(x_1), \quad |x_1| \leq a; \quad k(s, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha) e^{i\alpha s} d\alpha \quad (3.1)$$

где $K(\alpha)$ – матрица-функция второго порядка, элементы которой – четные функции, имеющие одни и те же полюсы $\pm z_k$ ($k = 1, 2, \dots, M$), а также точки ветвления на вещественной оси; при $\alpha \rightarrow \infty$ справедливы представления

$$K_{nn}(\alpha) = c_n |\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})], \quad K_{12}(\alpha) = K_{21}(\alpha) = b |\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})] \quad (3.2)$$

Принимая во внимание выражения (3.2), введем в рассмотрение матрицу

$$S(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{-1/2} \begin{vmatrix} c_1 & b \\ b & c_2 \end{vmatrix}$$

элементы которой должны лишь обладать асимптотическими свойствами соответствующих элементов символа $K(\alpha)$. Матрицы (1.2) и (1.3) в этом случае принимают вид

$$\Pi(\alpha) = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{vmatrix}, \quad \pi(\alpha) = \begin{vmatrix} \Pi_{22} & -\Pi_{12} \\ -\Pi_{21} & \Pi_{11} \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

$$\Pi_{nj} = \Pi_0 R_{nj}, \quad \pi_{nj} = \pi_0 r_{nj}, \quad r_{nn} = R_{3-n, 3-n}, \quad r_{nj} = -R_{nj}, \quad n \neq j, \quad n, j = 1, 2$$

$$R_{1n}(\alpha) = c_2 K_{1n} - b K_{2n}, \quad R_{2n}(\alpha) = c_1 K_{2n} - b K_{1n}, \quad n = 1, 2$$

$$\Pi_0 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + B^2}}{\Delta}, \quad \pi_0 = \frac{1}{\Pi_0 \Delta D(\alpha)}, \quad D(\alpha) = K_{11} K_{22} - K_{12}^2, \quad \Delta = c_1 c_2 - b^2$$

По построению $\Pi_{nj}(\alpha)$ – четные функции; $\Pi_{nn}(\alpha) \rightarrow 1 + O(\alpha^{-1})$, $\Pi_{nj}(\alpha) \rightarrow \alpha^{-2}[1 + O(\alpha^{-1})]$ ($n \neq j$) при $\alpha \rightarrow \pm\infty$; имеют нули $\pm\gamma_{knj}$ ($k = 1, 2, \dots, N_{nj}$), а также одни и те же полюсы $\pm z_k$ ($k = 1, 2, \dots, M$). Элементы π_{nj} обладают аналогичными свойствами, имеют нули $\pm\beta_{knj}$ ($k = 1, 2, \dots, N_{nj}$), причем $\beta_{k11} = \gamma_{k22}$, $\beta_{k22} = \gamma_{k11}$, $\beta_{k12} = \gamma_{k12}$, $\beta_{k21} = \gamma_{k21}$, а также одни и те же полюсы $\pm\zeta_k$ ($k = 1, 2, \dots, M$). В обоих случаях $M \geq N_{nj}$.

Аппроксимируем $\Pi_{nj}(\alpha)$ и $\pi_{nj}(\alpha)$ рациональными функциями

$$\Pi_{nj}^*(\alpha) = \prod_{k=1}^{N_{nj}} (\alpha^2 - \gamma_{knj}^2) \prod_{k=1}^M (\alpha^2 - z_k^2)^{-1} \quad (3.4)$$

$$\pi_{nj}^*(\alpha) = \prod_{k=1}^{N_{nj}} (\alpha^2 - \beta_{knj}^2) \prod_{k=1}^M (\alpha^2 - \zeta_k^2)^{-1}, \quad N_{nj} = \begin{cases} M, & n = j \\ M-1, & n \neq j \end{cases}$$

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$q(x_1) = q_0(x_1) + g(x_1), \quad g = \sum_{k=1}^{2M} C_k \delta(x_1 - x_1^k) \quad (3.5)$$

где x_1^k – координаты точек, делящих отрезок $[-a, a]$ на равные части. Видно, что функция g удовлетворяет соотношениям (1.6).

После преобразований, связанных с внесением выражений (3.5) в систему (3.1) и последующего изменения порядка суммирования, приходим к системе

$$k_0 t = f(x_1) - \sum_{k=1}^{2M} [C_k^1 f_k^1 + C_k^2 f_k^2] \quad (3.6)$$

$$f_k^m = \{f_k^{m1}, f_k^{m2}\}, \quad f_k^{mn} = k_{nm}(x_1 - x_1^k)$$

относительно новой неизвестной функции

$$t(x_1) = V^{-1}(x_1) \Pi^*(\alpha) V(\alpha) q_0 \quad (3.7)$$

В силу линейности решение системы (3.6) ищем в виде

$$t(x_1) = t_0(x_1) - \sum_{k=1}^{2M} [C_k^1 t_k^1(x_1) + C_k^2 t_k^2(x_1)] \quad (3.8)$$

причем t_0 и t_k^i удовлетворяют системам

$$k_0 t = f(x_1), \quad k_0 t^i = f_k^i \quad (3.9)$$

Введем две обладающих полнотой системы базисных функций $\psi_m(x_1)$ и $\phi_m(x_1)$ ($m = 1, 2, \dots, L$), определенных на отрезке $[-a, a]$. Приближенное решение систем (3.9) представим в форме

$$t_0(x_1) = \sum_{m=1}^L \beta_m \psi_m(x_1), \quad t_k^i(x_1) = \sum_{m=1}^L \beta_{km}^i \psi_m(x_1) \quad (3.10)$$

где $\beta_m = \{\beta_m^1, \beta_m^2\}$, $\beta_{km}^i = \{\beta_{km}^{i1}, \beta_{km}^{i2}\}$ – неизвестные коэффициенты.

Подставив первое выражение (3.10) в первое уравнение (3.9) и применив метод Бубнова – Галеркина, после преобразований по изменению порядка суммирования, придем к системе

$$A^{n1} \beta^1 + A^{n2} \beta^2 = F^n, \quad n = 1, 2 \quad (3.11)$$

$$A^{nj} = \|A_{lm}^{nj}\|_{l,m=1}^L, \quad A_{ml}^{nj} = \int_{\Gamma} K_{nj}^0(\alpha) \Psi_m(\alpha) \Phi_l^*(\alpha) d\alpha$$

$$\beta^j = \{\beta_m^j\}_{m=1}^L, \quad F^n = \{F_l^n\}_{l=1}^L, \quad F_l^n = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x_1) \psi_l(x_1) dx_1, \quad (n = 1, 2)$$

Здесь $\Psi_m(\alpha)$, $\Phi_l(\alpha)$ – трансформанты Фурье базисных функций.

Решение системы (3.11) представим в матричной форме

$$\beta^1 = A^{11^{-1}} F^1 - A^{11^{-1}} A^{12} \beta^2, \quad \beta^2 = B \cdot [F^2 - A^{21} A^{11^{-1}} F^1] \quad (3.12)$$

$$B = [A^{22} - A^{21} A^{11^{-1}} A^{12}]^{-1}$$

Поступая аналогичным образом со вторым выражением (3.10), получим систему

$$A^{n1} \beta_k^{i1} + A^{n2} \beta_k^{i2} = F_k^{in}, \quad n = 1, 2 \quad (3.13)$$

$$\beta_k^{in} = \{\beta_{km}^{in}\}_{m=1}^L, \quad F_k^{in} = \{F_{kl}^{in}\}_{l=1}^L, \quad F_{kl}^{in} = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{in}(x_1) \psi_l(x_1) dx_1$$

которая также представляет собой систему уравнений с матричными коэффициентами и отличается от (3.11) лишь правыми частями. Ее решение имеет вид

$$\beta_k^{i1} = A^{11^{-1}} F_k^{i1} - A^{11^{-1}} A^{12} \beta_k^{i2}, \quad \beta_k^{i2} = B \cdot [F_k^{i2} - A^{21} A^{11^{-1}} F_k^{i1}] \quad (3.14)$$

Таким образом, основная проблема решения системы (3.7) сведена к построению матриц A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$), вычислению A_{11}^{-1} и B . Остальные действия по определению всей совокупности векторов β^i и β_k^{in} сводятся к последовательному умножению указанных матриц на векторы F^i и F_k^{in} и их комбинации.

Трансформанта Фурье решения уравнения (3.1) имеет вид

$$Q(\alpha) = \pi^*(\alpha) T(\alpha) + V(\alpha) g \quad (3.15)$$

Коэффициенты C_k^i определяются из соотношений

$$T_0(\alpha) - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{2M} C_k^i T_k^i(\alpha) = 0, \quad \alpha_1 = \pm \zeta_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (3.16)$$

Применив к выражению (3.15) обратное преобразование Фурье, получим

$$q(x_1) = V^{-1} \pi^* V t + g$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00787, 99-01-01015, 00-01-9602н р2000юг), Федеральной целевой программы "Интеграция" (А0017), Американского фонда научных исследований и развития (U.S. Civilian Research and Development Foundation) (REC-004-A). Мнение фонда может не совпадать с выводами статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
2. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
4. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

Краснодар, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
10.VII.2001