

УДК 539.3

© 2002 г. В.А. Бабешко, Т.И. Белянкова, В.В. Калинин

**МЕТОД ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

Метод фиктивного поглощения [1–3] обобщается на класс динамических смешанных задач теории упругости для слоисто-неоднородного полупространства. Обобщение основано на применении в рамках этого метода численных методов решения интегральных уравнений первого рода, что позволяет использовать точное представление символов ядер интегральных операторов и опустить необходимый при реализации традиционной схемы метода фиктивного поглощения этап аппроксимации. Тем самым в полной мере сохраняются все динамические особенности символа ядра интегрального уравнения, в том числе точки ветвления, что приводит к более полному учету динамических свойств задачи и, следовательно, к повышению точности получаемого в результате решения.

Ранее ([1–3] и др.) метод фиктивного поглощения применялся для решения интегральных уравнений, символы ядер которых – мероморфные функции, аппроксимации которых допускают точную факторизацию.

1. Общая схема метода. Рассмотрим интегральное уравнение (ИУ)

$$kq = \int_{-a}^a k(x_1 - \xi)q(\xi)d\xi = f(x_1), \quad |x_1| \leq a \quad (1.1)$$

$$k(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha)e^{i\alpha s} d\alpha \quad (1.2)$$

Функция $K(\alpha)$ обладает характерными свойствами символов ядер ИУ, возникающих при исследовании динамических смешанных задач теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства: 1) она четная и имеет на вещественной оси конечное, зависящее от типа задачи и свойств материала среды количество точек ветвления; 2) она мероморфная в комплексной плоскости с не переходящими друг в друга разрезами, расположенными в первом и третьем квадрантах и соединяющими точки ветвления с бесконечно удаленной точкой; 3) имеет на вещественной оси конечное, зависящее от частоты количество нулей γ_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$) и полюсов z_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$), а также счетное множество комплексных нулей и полюсов с точками сгущения в некоторых секторах, содержащих мнимую ось; 4) на бесконечности представима в виде

$$K(\alpha) = c |\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})]$$

ИУ (1.1) однозначно разрешимо при любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x_1)$ [4], расположение контура Γ в интеграле (1.2) обеспечивает выполнение условий излучения.

Введем в рассмотрение функции

$$\Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^M (\alpha^2 - \gamma_k^2)(\alpha^2 - z_k^2)^{-1} \text{ и } K_0(\alpha) = K(\alpha)\Pi^{-1}(\alpha)$$

где z_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$) и γ_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$) – вещественные полюсы и нули функции $K(\alpha)$, остальные z_k ($k = n_1 + 1, \dots, M$) и γ_k ($k = n_2 + 1, \dots, M$, $M \geq \max\{n_1, n_2\}$) – комплексные полюсы и нули $K(\alpha)$, лежащие в полосе $|\operatorname{Im} \alpha| \leq E_0$.

Видно, что зависящая в общем случае от частоты функция $K_0(\alpha)$ включает в себя все неучтенные в $\Pi(\alpha)$ особенности функции $K(\alpha)$ и прежде всего точки ветвления на вещественной оси. Асимптотические свойства функций $K(\alpha)$ и $K_0(\alpha)$ совпадают, так как $\Pi(\infty) = 1$ по построению.

В соответствии с методом фиктивного поглощения представим символ ядра ИУ (1.1) в виде

$$K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha) \quad (1.3)$$

Замечание 1. Ранее [1–3] при реализации метода фиктивного поглощения использовалось приближенное, допускающее точную факторизацию представление (1.3) функции $K(\alpha)$, в котором $K_0(\alpha) = c(\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$, где $B \gg 1$ – заданный параметр.

Определение. Носителем функции $q(x_1)$, заданной в области Ω , будем называть наименьшее замкнутое в Ω множество, вне которого $q(x_1) = 0$.

Лемма [1]. Пусть функция $q(x_1) \in L_p[-a, a]$, $p > 1$ имеет носитель в интервале $[-a, a]$. Для того, чтобы функция $(V(\alpha)$ и $V^{-1}(x_1)$ – операторы прямого и обратного преобразования Фурье)

$$t(x_1) = V^{-1}(x_1)\Pi(\alpha)V(\alpha)q$$

обладала этим же свойством, необходимо и достаточно, чтобы на полярном множестве функции $\Pi(\alpha)$ (т.е. при $\alpha = \pm z_k$, $k = 1, 2, \dots, M$) имело место тождество $V(\alpha)q \equiv 0$.

Представим решение уравнения (1.1) в виде [1]

$$q(x_1) = q_0(x_1) + \varphi(x_1) \quad (1.4)$$

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$V(\alpha)q = V(\alpha)\varphi, \quad V(\alpha)q_0 = 0, \quad \alpha = \pm z_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (1.5)$$

Замечание 2. Здесь и далее полюсы z_k и нули γ_k предполагаются однократными. Обобщение на случай кратных нулей и полюсов принципиальных трудностей не вызывает. Необходимо лишь учесть, что в этом случае представление (1.3) и вид соотношений (1.5) изменятся [1].

Подставив выражение (1.4) в ИУ (1.1), преобразуем его к виду

$$kq_0 = f - k\varphi \quad (1.6)$$

Далее введем функцию [1]

$$t(x_1) = V^{-1}(x_1)T(\alpha), \quad T(\alpha) = \Pi(\alpha)Q_0(\alpha), \quad Q_0(\alpha) = V(\alpha)q_0(x_1) \quad (1.7)$$

и примем ее за новую неизвестную.

Тем самым задача решения (1.6), при учете соотношений (1.3), (1.7), сводится к решению ИУ

$$\int_{-a}^a k_0(x_1 - \xi)t(\xi)d\xi = -k\varphi + f \quad (1.8)$$

Замечание 3. Из построения следует, что ИУ (1.8) эквивалентно (1.6), т.е. в данном случае отпадает необходимость использования теоремы возмущения [1].

Допустим, что решение ИУ (1.8) построено и функция $t(x_1)$ найдена. Соотношения (1.7) позволяют восстановить функцию $q_0(x_1)$ в виде

$$q_0(x_1) = V^{-1}(x_1) \Pi^{-1}(\alpha) V(\alpha) t(x_1) \quad (1.9)$$

Из леммы следует, что, для того чтобы функция $q_0(x_1)$ принадлежала $L_p[-a, a]$, $p > 1$, и имела носитель на $[-a, a]$, должны удовлетворяться соотношения

$$V(\alpha) t(x_1) = 0, \quad \alpha = \pm \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (1.10)$$

т.е. функция $t(x_1)$ должна содержать произвол, степень которого определяется количеством условий (1.10). Этот произвол должен быть заложен в функцию $\phi(x_1)$, участвующую в решении (1.4).

Используя соотношение (1.4) и (1.9), строим трансформанту Фурье решения исходного ИУ (1.1) в виде

$$\tilde{Q}(\alpha) = T(\alpha) \Pi^{-1}(\alpha) + V(\alpha) \phi \quad (1.11)$$

Для получения интегральной характеристики задачи (например, реакция основания на воздействие штамп) в (1.11) достаточно положить $\alpha = 0$. Для построения $q(x_1)$ — решения исходного ИУ (1.1), к соотношению (1.11) необходимо применить обратное преобразование Фурье.

2. Реализация метода. Ранее была введена содержащая произвол функция $\phi(x_1)$ (вид ее не конкретизировался), которая должна строиться по значениям функционалов (1.10). В окончательных выражениях $\phi(x_1)$ присутствует под знаком интегрального оператора, что позволяет при ее выборе использовать достаточно широкий класс функций [1]. Здесь в качестве $\phi(x_1)$ используем систему δ -функций Дирака

$$\phi(x_1) = \sum_{k=1}^{2M} C_k \delta(x_1 - x_k^1) \quad (2.1)$$

где x_k^1 — координаты точек, лежащих отрезок $[-a, a]$ на равные части. Можно поверить, что функция $\phi(x_1)$ удовлетворяет соотношениям (1.5).

После подстановки выражения (1.7) с учетом равенства (2.1) в ИУ (1.1) последнее, принимает вид

$$\int_a^{-a} k(x_1 - \xi) q_0(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{2M} C_k f_k(x_1) + f_0(x_1) \quad (2.2)$$

$$f_k(x_1) = -k(x_1 - x_k^1), \quad f_0(x_1) = f(x_1)$$

Принимая во внимание выражения (1.7) и (1.3), преобразуем ИУ (2.2) к ИУ относительно новой неизвестной $t(x_1)$

$$\int_a^{-a} k_0(x_1 - \xi) t(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{2M} C_k f_k(x_1) + f_0(x_1) \quad (2.3)$$

Согласно лемме, функция $t(x_1)$ должна удовлетворять функциоалам (1.10), которые представим в более удобном для дальнейшего анализа виде

$$T(\alpha) = 0, \quad \alpha = \pm \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2.4)$$

Равенства (2.4) представляют собой систему $2M$ уравнений относительно $2M$ неизвестных C_k , участвующих в (2.1), что с учетом равенства (1.4) замыкает задачу и позволяет представить трансформанту Фурье решения ИУ (1.1) в виде

$$\tilde{Q}(\alpha) = T(\alpha) \Pi^{-1}(\alpha) + \sum_{k=1}^{2M} C_k e^{i\alpha x_k^1} \quad (2.5)$$

3. Численная реализация метода. Основываясь на принципе суперпозиции, представим решение уравнения (2.3) в виде

$$t(x_1) = t_0(x_1) + \sum_{k=1}^{2M} C_k t_k(x_1) \quad (3.1)$$

где функции $t_k(x_1)$ ($k = 0, 1, \dots, 2M$) удовлетворяют уравнениям

$$k_0 t_k = \int_{-a}^a k_0(x_1 - \xi) t_k(\xi) d\xi = f_k(x_1), \quad |x_1| \leq a \quad (3.2)$$

Введем две системы координатных функций $\psi_p(x_1)$, $\phi_p(x_1)$ ($p = 1, 2, \dots, N$) и положим

$$t_k(x_1) = \sum_{p=1}^N \beta_k^p \psi_p(x_1), \quad k = 0, 1, \dots, 2M \quad (3.3)$$

После подстановки выражений (3.3) в уравнения (3.2) получим систему уравнений

$$\sum_{p=1}^N \beta_k^p \int_{-a}^a k_0(x_1 - \xi) \psi_p(\xi) d\xi = f_k(x_1), \quad |x_1| \leq a \quad (3.4)$$

Применив процедуру взвешивания системы (3.4) на координатных функциях $\phi_l(x_1)$ ($l = 1, 2, \dots, N$), приходим к необходимости решения $2M + 1$ систем алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{B}_k = \mathbf{F}_k, \quad k = 0, 1, \dots, 2M \quad (3.5)$$

где

$$\mathbf{A} = \|A_{pl}\|_{p,l=1}^N, \quad A_{pl} = \int_{\Gamma} K_0(\alpha) \Psi_p(\alpha) \Phi_l^*(\alpha) d\alpha$$

$$\mathbf{F}_k = \{f_k^l\}_{l=1}^N, \quad f_k^l = \int_{\Gamma} K(\alpha) \Phi_l(\alpha) e^{-i\alpha x_1^k} d\alpha$$

$$\mathbf{B}_k = \{\beta_k^p\}_{p=1}^N, \quad f_0^l = \int_{-a}^a f(x_1) \phi_l(x_1) dx_1$$

$\Psi_p(\alpha)$, $\Phi_l(\alpha)$ – преобразования Фурье-функций $\psi_p(x_1)$, $\phi_l(x_1)$, $()^*$ – комплексно-сопряженная величина.

Пусть матрица $\mathbf{A}$, а по ней $\mathbf{A}^{-1}$ построены. Тогда решения систем (3.5) представляются в виде

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}_k \quad (3.6)$$

Из соотношения (3.6) следует, что основная тяжесть решения $2M + 1$ систем алгебраических уравнений (3.5) приходится на построение матрицы $\mathbf{A}$ и вычисление $\mathbf{A}^{-1}$. По построению это достаточно проделать один раз. Далее, последовательным применением соотношения (3.6) вычисляются все векторы $\mathbf{B}_k$, компонентами которых являются коэффициенты β_k^p ($p = 1, \dots, N$; $k = 0, 1, \dots, 2M$).

Для построения решения ИУ (2.3) представим решение (3.1) в виде

$$T(\alpha) = T_0(\alpha) - \sum_{k=1}^{2M} C_k T_k(\alpha), \quad T_k(\alpha) = \sum_{p=1}^N \beta_k^p \Psi_p(\alpha) \quad (3.7)$$

Постоянные C_k , участвующие в (2.5), находятся из системы

$$T_0(\pm\gamma_n) - \sum_{k=1}^{2M} C_k T_k(\pm\gamma_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 2M$$

которая получается при подстановке выражений (3.7) в соотношения (2.4).

Замечание 4. В случае необходимости вычисления функции $q(x_1)$ – решения исходного ИУ (1.1), использовать представление (2.5) нельзя, так как после применения к (2.5) обратного преобразования Фурье в окончательных выражениях будет присутствовать обобщенная функция. В этом случае либо функция $\varphi(x_1)$ должна выбираться из класса L_p , $p > 1$, либо функция $t(x_1)$ должна вводиться таким образом [1], чтобы функция $\varphi(x_1)$ в окончательных выражениях для $q(x_1)$ присутствовала под знаком интегрального оператора.

Замечание 5. Метод без особых усилий обобщается на класс пространственных осесимметричных задач теории упругости. При этом в построениях достаточно перейти к новой переменной $u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$.

4. Динамика штампа на поверхности неоднородного полупространства. В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях жесткого штампа на поверхности структурно-неоднородной среды, представляющей собой преднапряженный слой $0 \leq x_3 \leq h$ на поверхности преднапряженного полупространства $x_3 \leq 0$. Полагаем, что полупространство более жесткое, т.е. $\lambda_s < \lambda_p$, $\mu_s < \mu_p$ (индексом s обозначены параметры слоя, индексом p – полупространства), среда в естественном состоянии изотропна. Штамп занимает в плане область $|x_1| \leq a$ и совершает установившиеся вертикальные поступательные колебания, трение в области контакта отсутствует.

Полагаем, что напряженно-деформированное состояние (НДС) однородно, при этом будем рассматривать:

1) "приповерхностное" НДС – преднапряженный слой на ненапряженном полупространстве (слой предварительно растянут или сжат, а затем соединен с полупространством);

2) "заглубленное" НДС – ненапряженный слой на преднапряженном полупространстве (полупространство предварительно растянуто или сжато, затем соединено со слоем).

Краевая задача описывается линеаризованными уравнениями движения [5]

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \quad (4.1)$$

с граничными условиями на поверхности

$$x_3 = h, \quad \mathbf{n} \cdot \Theta^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{q}(x_1) \exp(-i\omega t), & |x_1| \leq a \\ 0, & |x_1| > a \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\Theta^{(n)}$ – линеаризованные тензоры, играющие в линейной теории упругости роль тензора Коши, $\rho^{(n)}$ – плотность материала, $\mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_3, t) = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}\}$ – вектор перемещений точек слоя ($n = 1$) или полупространства ($n = 2$) соответственно, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности среды, $\mathbf{q}(x_1)$ – неизвестный вектор контактных напряжений, компоненты которого при отсутствии трения в области контакта и учета поступательного характера колебаний имеют вид $\{0, 0, q_{30}\}$.

Замыкают задачу условия стыковки слоя с полупространством

$$x_3 = 0, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad \mathbf{t}_n^{(1)} = \mathbf{t}_n^{(2)} \quad (4.3)$$

и условие на бесконечности

$$\mathbf{u}^{(2)} \downarrow 0, \quad x_3 \rightarrow -\infty \quad (4.4)$$

Здесь $\mathbf{t}_n^{(k)}$ – векторы напряжений на поверхности раздела слоя и полупространства. Вид тензоров $\Theta^{(n)}$, участвующих в выражениях (4.1), (4.2), громоздкий и здесь не приводится. Представление их компонентов для упругого потенциала Мурнагана приведено ранее [6–8]. В силу установившегося режима колебаний временной множитель далее опускается.

Краевая задача (4.1)–(4.4) сводится к решению ИУ (1.1), в котором $f(x_1) = u_{30}^{(1)}$ (смещение точек поверхности среды – амплитуда колебаний штампа), $q(x_1) = q_{30}$ (неизвестные контактные напряжения).

В случае, когда НДС слоя ($n = 1$) или полупространства ($n = 2$) задано условиями

$$\sigma_{11}^{(n)0} \neq \sigma_{22}^{(n)0} \neq \sigma_{33}^{(n)0}$$

имеем

$$K(\alpha, \omega) = \sum_{k=1}^2 \left[\Delta_{kp} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} h + \Delta_{k+2,p} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} h \right] \quad (4.5)$$

$$\Delta_{mj} = \Delta_{mj}^0 / \Delta^0, \quad m, j = 1, 2, \dots, 6, \quad \Delta^0 = \det \| T_{mj} \|_{m,j=1}^6$$

$$T_{1k} = l_{1k}^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{1,k+2} = l_{1k}^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{1,k+4} = 0$$

$$T_{2k} = l_{3k}^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{2,k+2} = l_{3k}^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{2,k+4} = 0$$

$$T_{3k} = 0, \quad T_{3,k+2} = f_k^{(1)}, \quad T_{3,k+4} = -f_k^{(2)} \quad (4.6)$$

$$T_{4k} = 1, \quad T_{4,k+2} = 0, \quad T_{4,k+4} = -1$$

$$T_{5k} = l_{1k}^{(1)}, \quad T_{5,k+2} = 0, \quad T_{5,k+4} = -l_{1k}^{(2)}$$

$$T_{6k} = 0, \quad T_{6,k+2} = l_{3k}^{(1)}, \quad T_{6,k+4} = -l_{3k}^{(2)}; \quad k = 1, 2$$

$$l_{1k}^{(n)} = \chi_{3113}^{(n)} \sigma_k^{(n)} f_k^{(n)} - i\alpha \chi_{1313}^{(n)}, \quad S_{1k}^{(n)} = B_{32}^{(n)} H_{1k}^{(n)} + \alpha^2 B_{13}^{(n)} B_{23}^{(n)}$$

$$l_{3k}^{(n)} = \chi_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)} - i\alpha \chi_{3311}^{(n)} f_k^{(n)}, \quad S_{3k}^{(n)} = B_{12}^{(n)} H_{3k}^{(n)} - \sigma_k^{(n)^2} B_{13}^{(n)} B_{23}^{(n)}$$

$$H_{jk}^{(n)} = \chi_{3jj3}^{(n)} \sigma_k^{(n)^2} - (\chi_{kjjk}^{(n)} \alpha^2 - \rho^{(n)} \omega^2), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.7)$$

$$B_{jk}^{(n)} = \chi_{jjkk}^{(n)} + \chi_{jkjk}^{(n)}, \quad f_k^{(n)} = -i\alpha S_{3k}^{(n)} (\sigma_k^{(n)} S_{1k}^{(n)})^{-1}$$

$$\chi_{lm sp}^{(n)} = \delta_{ls} \delta_{mp} s_{lm}^{1n} + \delta_{ms} \delta_{lp} \nu_l^2 s_{lm}^{2n} + \delta_{lm} \delta_{sp} s_{ls}^{3n}$$

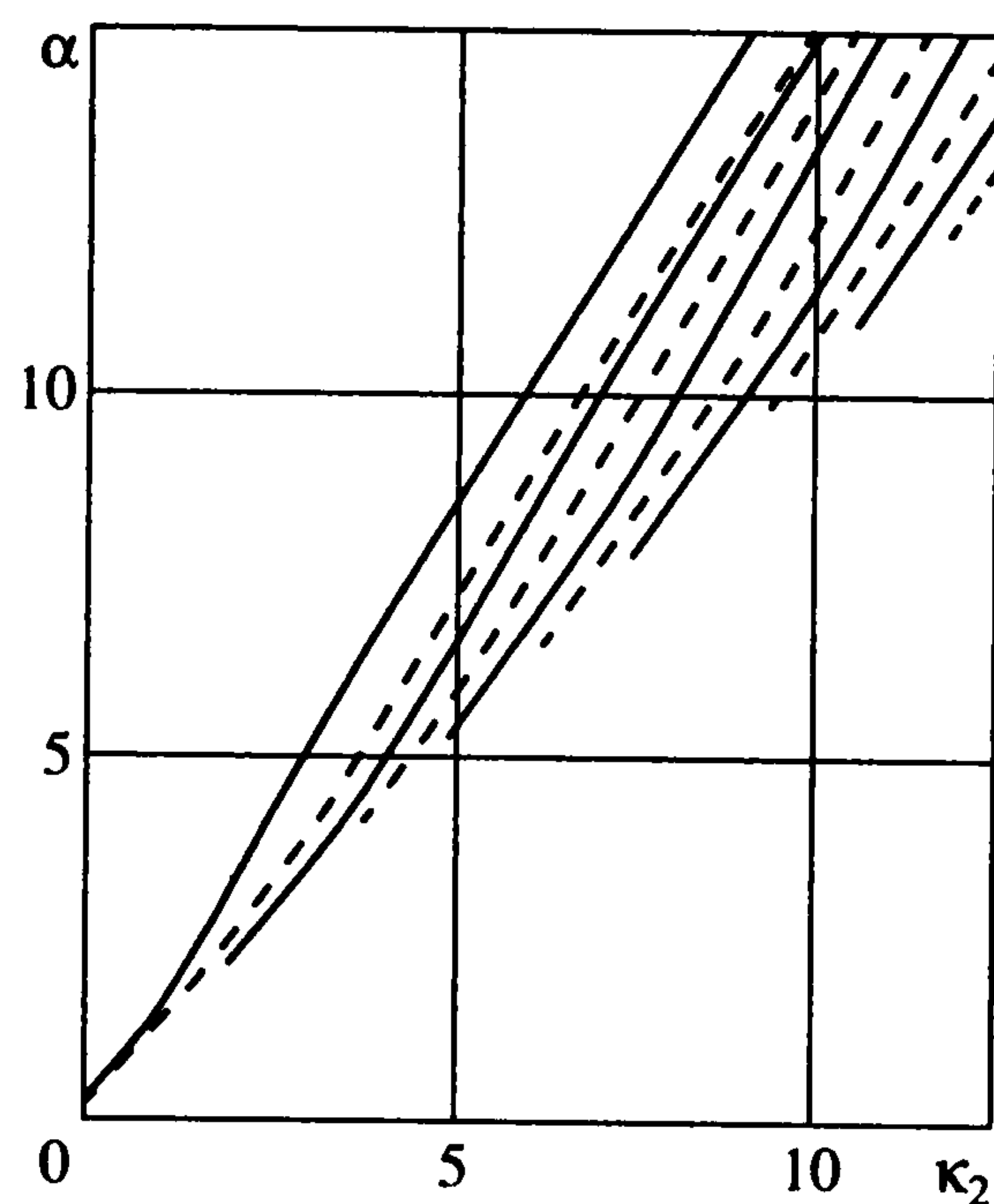
$$s_{lm}^{1n} = 2J_n^{-1} [-\psi_{0n} + \psi_{2n} \nu_{nl}^2 \nu_{nm}^2], \quad s_{lm}^{2n} = 2J_n^{-1} [\psi_{1n} + \psi_{2n} (\nu_{nl}^2 + \nu_{nm}^2)] \quad (4.8)$$

$$s_{lm}^{3n} = 4J_n^{-1} \sum_{M=0}^2 \sum_{N=0}^2 V_{MN}^{(n)} \nu_{nl}^{2M} \nu_{nm}^{2N}$$

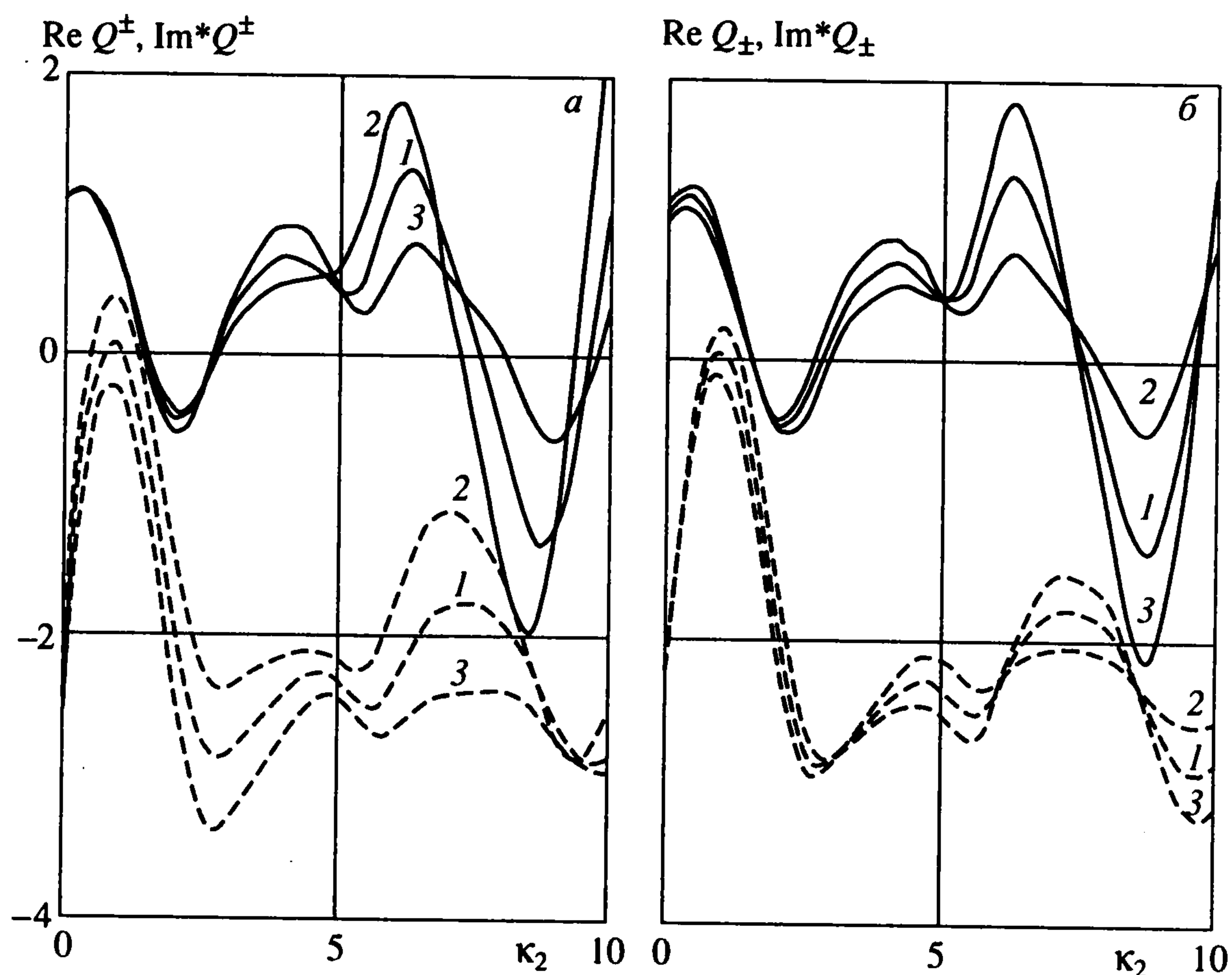
В формулах (4.6)–(4.8) индексы n, k принимают значения 1, 2; Δ_{lp}^0 ($l, p = 1, 2, \dots, 6$) – алгебраические дополнения элементов T_{lp} , $\rho^{(n)}$ – плотность, ν_{nm} – относительное удлинение волокон вдоль оси x_m , J_n – метрический множитель слоя ($n = 1$) или полупространства ($n = 2$), δ_{mp} – символ Кронекера, коэффициенты ψ_{nL} и $V_{LM}^{(n)}$ ($L, M = 0, 1, 2$) зависят от формы упругого потенциала. Их вид для некоторых частных случаев приведен ранее [5–8]. Величины $\sigma_k^{(n)}$ определяются из характеристического уравнения

$$H_{1k}^{(n)} H_{3k}^{(n)} + \alpha^2 \sigma_k^{(n)^2} B_{13}^{(n)^2} = 0$$

Численный анализ проводился для слоя (бронза [5]), жестко сцепленного с полупространством (сталь 35ХГСА [5]). Толщина слоя $h = 1$, начальное напряженное состояние определялось условиями $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1 \pm 0.005$.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведены кривые вещественных нулей (штриховые линии) и полюсов (сплошные линии) функции $K(\alpha)$ (4.5) в зависимости от безразмерной частоты ($\kappa_2 = \sqrt{\rho^{(2)}/\mu^{(2)}} \omega h$) в отсутствие начальных напряжений. Вид кривых, а также возрастающее по частоте количество вещественных нулей и полюсов характерны для задач в случае слоистого полупространства. При этом имеет место строгое чередование нулей и полюсов, чем обеспечивается единственность решения ИУ [4].

Как показали расчеты, изменение в достаточно широких пределах величины начальных напряжений не меняет качественного характера распределения нулей

и полюсов, но приводит к значительному изменению их величины. Установлено, что спектральные свойства задачи существенно зависят от того, какая область составной среды подвержена действию начальных напряжений. Локализация НДС в полупространстве обуславливает значительную деформацию дисперсионных кривых и их сдвиг по частоте. Растяжение полупространства (слой ненапряжен) приводит к росту значений (величины) нулей и полюсов, при этом значения критических частот (частоты возникновения высших мод) увеличиваются. Если учесть, что полюсы z_k связаны с фазовой скоростью поверхностной волны V_k соотношением $V_k = \omega z_k^{-1}$, то растяжение полупространства приводит к уменьшению фазовых скоростей всех мод, пропорциональному величине начальных напряжений. Сжатие полупространства приводит к обратному результату.

Локализация НДС в слое (полупространство не напряжено) в несколько иной степени влияет на дисперсионные характеристики задачи. Растяжение слоя приводит к уменьшению значений первой ветви полюсов, но значения последующих ветвей полюсов, равно как и значения точек их выхода, увеличиваются. Тем самым растяжение слоя приводит к увеличению фазовой скорости первой моды и уменьшению скоростей высших мод поверхностных волн. Изменения скоростей пропорциональны величине начальных напряжений. Сжатие слоя приводит к обратному результату.

Влияние локализации преднапряжений на динамическую жесткость составной среды иллюстрирует фиг. 2, на которой представлены графики функций $\text{Re}Q^\pm$ (сплошные линии), $\text{Im}^*Q^\pm = \kappa_2^{-1} \text{Im} Q^\pm + 6$ (штриховые) – на фиг. 2, а и $\text{Re}Q_\pm$ (сплошные линии), $\text{Im}^*Q_\pm = \kappa_2^{-1} \text{Im} Q_\pm + 6$ (штриховые) – на фиг. 2, б. Функции $Q^\pm$ и $Q_\pm$ соответствуют динамической жесткости среды

$$Q_0 = \int_{-a}^a q_{30}(x_1) dx_1$$

($q_{30}(x_1)$ – решение уравнения (1.1) при $f(x_1) = 1$) при предварительном сжатии (индекс минус) или предварительном растяжении (индекс плюс) слоя (верхний индекс) или полупространства (нижний индекс). Расчеты проведены для $a = 1$.

Кривые 1 соответствуют естественному состоянию, 2 – растяжению, 3 – сжатию соответствующей области составной среды. Из графиков следует, что $\text{Re}Q_0$ и Im^*Q_0 в отсутствие начальных напряжений имеют осциллирующий, обусловленный неоднородностью среды характер, на который существенное влияние оказывает локализация НДС. Сжатие слоя (кривые 3 на фиг. 2, а), равно как и растяжение полупространства (кривые 2 на фиг. 2, б), понижает неоднородность слоистой структуры. Наоборот, растяжение слоя, равно как и сжатие полупространства, повышает неоднородность среды. Это подтверждает отмеченную ранее [6–8] особенность влияния НДС на динамическую жесткость среды: сжатие слоя или однородного полупространства приводит к повышению их динамической жесткости, растяжение – к ее снижению.

Из графиков также следует, что при локализации НДС в полупространстве существуют частоты максимального и минимального влияния начальных напряжений на реакцию среды. Такие частоты при локализации НДС в слое отсутствуют. Таким образом, в структурно-неоднородной среде сохраняются обнаруженные ранее [6–8] при изучении динамических свойств преднапряженных слоя [8] и однородного полупространства [6, 7] особенности: наличие в задаче для полупространства частот максимального и минимального влияния НДС на реакцию среды и отсутствие таких частот в задачах для слоя.

Необходимо отметить, что сжатие слоя приводит к увеличению уровня излучения энергии из зоны контакта, растяжение слоя – к его уменьшению на всех частотах. Локализация начальных напряжений в полупространстве также влияет на уровень излучения из зоны контакта, но это изменение зависит от частоты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00787, 99-01-01015, 00-01-9602н Р2000юг), Федеральной целевой программы "Интеграция" (А0017), Американского Фонда научных исследований и развития (U.S. Civilian Research and Development Foundation, REC-004-A). Мнение Фонда может не совпадать с выводами статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
2. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
4. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Белянкова Т.И., Калинин В.В.* О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 123–134.
7. *Белянкова Т.И., Калинин В.В.* Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 83–94.
8. *Белянкова Т.И., Калинин В.В.* Динамика массивного тела, осциллирующего на поверхности предварительно напряженного слоя // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 89–101.

Краснодар, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
23.ІІІ.2001