

УДК (531.36+539.3):534.1

© 2002 г. И.В. Андрианов

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ОТ ДИСКРЕТНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ К НЕПРЕРЫВНОЙ

Обсуждается вопрос о связи движений дискретной упругой среды с ее осредненной аппроксимацией. Показано, что при надлежащем определении решений в рамках теории сплошной среды на их основе можно достаточно точно описывать движение дискретной цепочки масс.

1. Исходная задача. Была рассмотрена ([1], см. также [2–5]) задача о движении цепочки масс под действием приложенной к крайней массе силы $f(0)$. Исходная задача описывается системой уравнений

$$\ddot{\delta}_j = \xi^2 (\delta_{j+1} - 2\delta_j + \delta_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad \xi^2 = c/M \quad (1.1)$$

$$\delta_0 = -f(t), \quad \delta_{n+1} = 0 \quad (1.2)$$

при нулевых начальных условиях. Здесь M – масса частицы, c – жесткость пружины, δ_j – сила упругости между j -й и $(j-1)$ -й точками.

Для больших значений n обычно используется непрерывная аппроксимация дискретной задачи (1.1), (1.2)

$$\delta_n(x, t) = \xi^2 H^2 \delta_{xx}(x, t) \quad (1.3)$$

$$\delta(0, t) = -f(t), \quad \delta((n+1)H, t) = 0; \quad \delta(x, 0) = \delta_t(x, 0) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь H – расстояние между материальными точками (частицами).

Имея решение краевой задачи (1.3), (1.4), можно пересчитать решение для дискретной среды по формулам

$$\delta_j(t) = \delta(jH, t), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

При $f(t) = -1$ точное решение краевой задачи (1.3), (1.4) [6] таково:

$$\delta(x, t) = \theta \left(nH \arcsin \left| \sin \left(\frac{\pi}{2n} \xi t \right) \right| - x \right) \quad (1.6)$$

Здесь θ – функция Хевисайда.

Отсюда следует, что для всех значений времени

$$|\delta(x, t)| \leq 1 \quad (1.7)$$

Предоставим теперь слово авторам работы [1] (с. 990): "Некоторые авторы (например, [3, 6, 7]) полагали, что при $f(t) = -1$ аналогичное (1.7) неравенство имеет место и для всех компонент решения системы (1.1) при достаточно большом n ... Однако проделанные непосредственные расчеты при больших n , равных 60, 80, 120, показали, что значения $\delta_j(t)$ в отдельные моменты t_j^* , разные для разных j , существенно (на десятки процентов) превышают единицу, что имеет непосредственные

практические последствия, если речь идет, например, о железнодорожном составе". Далее авторы [1] проводят строгое математическое исследование, результаты которого сформулированы в виде теорем, и приходят к окончательному выводу ([1], с. 993): "На языке механики изложенное выше означает, что одномерную сплошную среду на неограниченных временных интервалах при анализе так называемых локальных свойств нельзя рассматривать как предельный случай одномерной цепочки точечных масс при неограниченном увеличении количества таких точек".

Описанное явление (появление всплесков) будем называть парадоксом Курчанова – Мышкиса – Филимонова.

2. Частоты колебаний. Полагая $f(t) = 0$, исследуем соотношение между собственными частотами колебаний дискретной (1.1), (1.2) и непрерывной (1.3), (1.4) систем.

В качестве критерия достаточной точности непрерывной аппроксимации будем использовать близость частот дискретной и непрерывной систем. Разумеется, этот критерий весьма условен, однако, поскольку искомое решение в рамках непрерывной модели рассматривается как разложение по собственным формам колебаний, увеличение точности определения соответствующих частот, несомненно, повышает точность решения задачи о свободных или вынужденных колебаниях цепочки.

Дискретная система (1.1), (1.2) имеет $n + 1$ собственных частот, описываемых формулами

$$\omega_k = 2\xi \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1 \quad (2.1)$$

Непрерывная система (1.3), (1.4) имеет дискретный бесконечный спектр

$$\alpha_k = \pi\xi \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Выражения (2.2) аппроксимируют частоты колебаний дискретной системы (2.1), для первых частот – хорошо, для больших значений k – плохо, а, скажем, ω_{n+1} определяется с погрешностью 50% (числовой коэффициент π вместо 2). Точность аппроксимации (2.2) может быть повышена (об этом – далее), а пока отметим следующее: частоты непрерывной системы ω_{n+2} , ω_{n+3} и т.д. никакого отношения к дискретной системе (1.1), (1.2) не имеют. Это – паразитные частоты, и, если речь идет об исследовании дискретной системы (1.1), (1.2), учитываться они не должны.

Отметим, что в данном случае, когда рассматривается одномерная система, никаких проблем не возникает: нужно аппроксимировать систему с n частотами, и для этой цели используется n первых частот континуальной системы. Возможно, в двух- или трехмерном случае нужно более подробное исследование.

3. Движение цепочки масс под действием силы. Перейдем к краевой задаче (1.3)–(1.5). Полагая $f(t) = -1$, решение будем разыскивать в виде

$$\delta = -1 + \frac{x}{(n+1)H} + u(x, t) \quad (3.1)$$

Тогда функция $u(x, t)$ определяется краевой задачей

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \xi^2 H^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = u((n+1)H, t) = 0; \quad u(x, 0) = 1 - \frac{x}{(n+1)H}, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

Решение краевой задачи (3.2), (3.3) находится методом Фурье

$$u(x, t) = S_\infty, \quad S_m = \frac{(n+1)}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{(n+1)H} \cos(\alpha_k t) \quad (3.4)$$

Величины α_k определяются выражением (2.2).

Решение (3.1), (3.4) описывает продольное движение стержня. Если же аппроксимируется движение цепочки частиц (1.1), (1.2), то в бесконечной сумме нужно удерживать лишь $n + 1$ гармонику, остальные не имеют к движению цепочки масс никакого отношения. Иными словами, движение дискретной системы (1.1) может быть приближенно описано при помощи выражения

$$\delta = -1 + \frac{x}{(n+1)H} + S_{n+1} \quad (3.5)$$

Численные расчеты с использованием выражения (3.5) при $n = 60, 80, 120$ показывают, что действительно имеют место обнаруженные ранее [1, 2] "всплески" и δ может превосходить единицу.

Психологически, конечно, наличие точного решения (1.6) подкупает, однако нужно помнить, что континуальная аппроксимация должна служить только для определения тех частот колебаний и форм движения дискретной цепочки, которые присущи последней.

4. Повышение точности континуальной аппроксимации. Решение (3.5) качественно правильно описывает движение цепочки масс, однако количественно точность невысока, так как формы колебаний, близкие к $(n + 1)$ -й, описываются аппроксимацией (1.3) плохо.

Для уточнения решения можно предложить такой подход.

Перепишем систему (1.1) при помощи разностного оператора в виде [8–10]

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 4\xi^2 \sin^2\left(-\frac{iH}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta = 0 \quad (4.1)$$

Разложение разностного оператора в ряд Тейлора в окрестности нуля дает

$$\sin^2\left(-\frac{iH}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta = \frac{1}{4} H^2 \left[\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{H^2}{12} \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} + \frac{H^4}{360} \frac{\partial^6 \delta}{\partial x^6} + \dots \right] \quad (4.2)$$

Удерживая в разложении (4.2) только первый член, получаем обычную континуальную аппроксимацию (1.3). Удерживая три члена, получаем аппроксимацию более высокого порядка

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \xi^2 H^2 \left[\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{H^2}{12} \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} + \frac{H^4}{360} \frac{\partial^6 \delta}{\partial x^6} \right] \quad (4.3)$$

Сравнение $(n + 1)$ -й частоты для континуальной цепочки (4.3) с $(n + 1)$ -й частотой дискретной системы показывает существенное увеличение точности (численный коэффициент 2.11 вместо 2 в точном решении). Поэтому целесообразно использовать для описания движения цепочки масс решение (3.5), полагая

$$\alpha_k = \pi \xi \frac{k}{n+1} \left[1 - \frac{\pi^2 k^2}{12(n+1)^2} + \frac{\pi^4 k^4}{360(n+1)^4} \right]^{1/2}$$

Отметим, что применение формулы Тейлора для замены разностного оператора известно давно. Недоверие к этому приему в силу его сугубо формального характера высказывал в своих лекциях по теории колебаний Л.И. Мандельштам [11]. Обоснование он получил, например, в рамках моментных теорий упругости (теории сред с дальным действием) [12] или метода дифференциального приближения [13].

Численные расчеты с использованием уравнения (4.3) подтверждают наличие обнаруженных ранее [1, 2] всплесков.

5. "Высокочастотное осреднение" и составные уравнения. Разностный оператор в уравнении (4.1) можно рассматривать также в окрестности тождественного преобразования

$$\sin^2\left(-\frac{iH}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1 + \frac{H^2\partial^2}{4\partial x^2} + \dots \quad (5.1)$$

Тогда континуальное приближение можно записать так (см. [14–16]):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\xi^2 + \xi^2 H^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta = 0 \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) описывает колебания цепочки по близкой к "пилообразной" ($\delta_i = -\delta_{i-1}$) форме.

Наличие континуальных аппроксимаций (1.3) и (5.2) позволяет построить составное уравнение [8–10, 17], приближенно пригодное во всем диапазоне частот и форм колебаний цепочки масс. Основная идея метода составных уравнений может быть сформулирована следующим образом [17]:

а) определяются члены дифференциальных уравнений, пренебрежение которым порождает неоднородности;

б) возможно проще аппроксимируются эти члены, при этом сохраняются их существенные черты в области неоднородности.

Построим составное уравнение так, чтобы при $k \ll n + 1$ оно приближенно совпадало с уравнением (1.3), а при $k = n + 1$ получалось точное значение частоты. В результате имеем

$$\left(1 - \alpha^2 H^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \xi^2 H^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \quad (5.3)$$

Выражение для k -й частоты колебаний

$$\alpha_k = \pi\xi \frac{k}{\sqrt{(n+1)^2 + \pi^2 \alpha^2 k^2}} \quad (5.4)$$

дает значения, близкие к частотам дискретной цепочки, при всех k от 1 до $n + 1$. Наибольшая погрешность достигается при $k/(n + 1) = 1/2$. Числовой множитель в точном значении частоты равен $\sqrt{2}$, а по формуле (5.4) имеем 1.34. Поэтому логично применить уравнение (5.3) для расчета движения системы масс. Решение при этом имеет вид (3.5) с α_k в виде (5.4). Численные расчеты с использованием решения (3.5), (5.4) подтверждают наличие обнаруженных ранее [1, 2] всплесков.

6. Заключение. Улам ([18], с. 105, 106 рус. перевода) пишет: "В обычном способе введения непрерывности многое должно быть подвергнуто критическому рассмотрению и обсуждению... Конечная система N обыкновенных дифференциальных уравнений в пределе при $N \rightarrow \infty$ превращается в одно или несколько уравнений с частными производными. Законы Ньютона о сохранении энергии и момента кажутся корректно сформулированными для предельного случая континуума. Однако сразу возникает по меньшей мере одно возможное возражение против неограниченной применимости этой формулировки. А именно тот факт, что предельные уравнения молчаливо подразумевают непрерывность среды, как будто накладывает различные ограничения на возможные движения аппроксимирующих конечных систем. В самом деле, в любой момент в стремящемся к пределу процессе вполне можно себе представить две соседние частицы, движущиеся в противоположных направлениях с относительной скоростью, которая не обязана стремиться к нулю при $N \rightarrow \infty$, в то время как непрерывность решения предельной задачи для сплошной среды исключает

такое положение... В некоторых случаях поэтому обычные дифференциальные уравнения гидродинамики могут дать ошибочное описание физического процесса".

То, о чем писал Улам на основе общих соображений [18], было численно обнаружено и математически исследовано [1–5]. Собственно, в том, что осредненные соотношения не позволяют получать верные результаты для всего спектра воздействий, ничего неожиданного нет. Вопрос может быть сформулирован таким образом: можно ли построить уравнение в частных производных, достаточно хорошо описывающее движение дискретной системы? Метод составных уравнений является одним из возможных путей поиска ответа на этот вопрос.

Автор благодарит А.М. Филимонова за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курчанов П.Ф., Мышкис А.Д., Филимонов А.М. Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера // ПММ. 1991. Т. 55. № 6. С. 989–995.
2. Filimonov A.M., Kurchanov P.F., Myshkis A.D. Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with N beads when N is large // C.r. Acad. sci. Paris. Ser. 1. 1991. V. 313. № 13. P. 961–965.
3. Filimonov A.M. Some unexpected results on the classical problem of vibrations of the string with N beads. The case of multiple frequencies // C.r. Acad. sci. Paris. Ser. 1. 1991. V. 315. № 8. P. 957–961.
4. Filimonov A.M. Continuous approximations of difference operators // J. Difference Equat. and Appl. 1996. V. 2. № 4. P. 411–422.
5. Filimonov A.M., Myshkis A.D. Asymptotic estimate of solution of one mixed difference-differential equation of oscillations theory // J. Difference Equat. and Appl. 1998. V. 4. № 1. P. 13–16.
6. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1960. 432 с.
7. Жуковский Н.Е. Работа (усилие) русского сквозного и американского несквозного тяговых приборов при трогании поезда с места и в начале его движения // Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. Т. 8. С. 221–255.
8. Андрианов И.В. Континуальное приближение для высокочастотных колебаний цепочки // Докл. АН УССР. Сер. А. 1991. № 2. С. 13–15.
9. Образцов И.Ф., Андрианов И.В., Нерубайло Б.В. Континуальное приближение для высокочастотных колебаний цепочки и составные уравнения // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 111–112.
10. Awrejcewicz J., Andrianov I.V., Manevitch L.I. Asymptotic Approaches in Nonlinear Dynamics: New Trends and Applications. Heidelberg: Springer, 1998. 310 p.
11. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
12. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 415 с.
13. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979. 222 с.
14. Веденова Е.Г., Маневич Л.И., Нусиченко В.П., Лысенко С.А. Солитоны в существенно нелинейной одномерной цепочке // ПТМФ. 1983. № 6. С. 156–159.
15. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
16. Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. N.Y.: Wiley, 1996. 552 p.
17. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964. = Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
18. Ulam S.M. A Collection of Mathematical Problems. N.Y.; L.: Interscience, 1960. = Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука. 1964. 168 с.

Днепропетровск
e-mail: igor_andrianov@hotmail.com

Поступила в редакцию
22.X.2001