

УДК 532.546

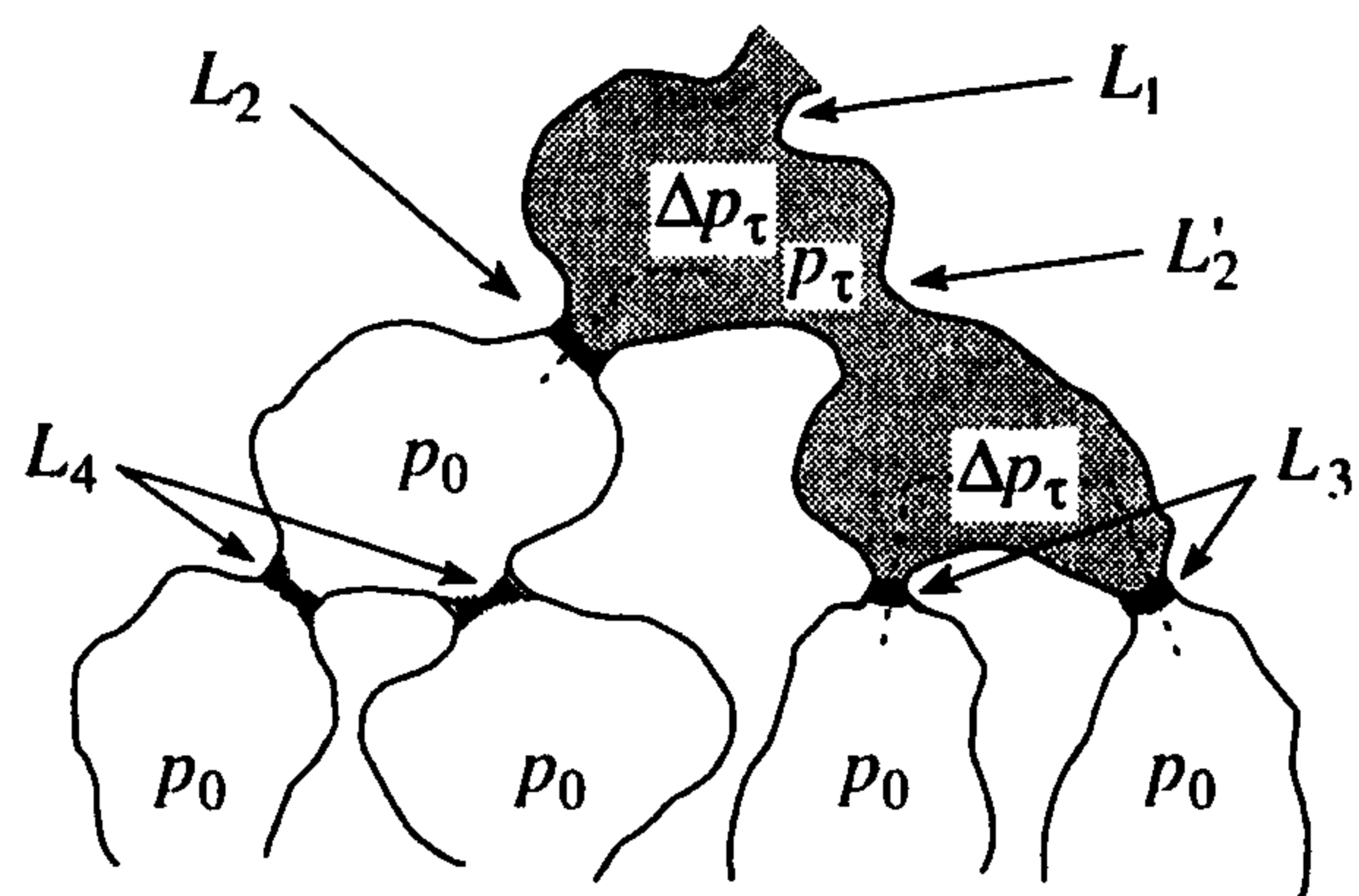
© 2002 г. Д.А. Онищенко

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О ПРОБОЕ КРУПНОЯЧЕИСТОЙ ПЕНЫ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В вероятностной постановке рассматривается задача о несущей способности системы пленочных мембран (ламелл) в пористой среде, которые препятствуют свободному движению нагнетаемого извне газа. Предполагается, что в исходном состоянии ламеллы расположены только в устьях пор. Система может быть названа крупноячеистой пеной, поскольку фактически в каждой поре заключен ровно один ее пузырек. Ламеллы предполагаются неподвижными и разрушаются, если перепад давления на них превышает некоторое критическое значение. Исследуются характеристики кластера пробоя, возникающего при нагнетании в среду заданного количества идеального газа. Задача формулируется в терминах вероятностной механики разрушения дискретных систем и изучается в рамках решеточных моделей. Поры (для простоты одинакового объема) отождествляются с узлами, а ламеллы – с заблокированными в исходном состоянии связями, обладающими случайной прочностью с известным вероятностным распределением. Процесс пробоя состоит в последовательном разрушении перегруженных ламелл и соответствующем расширении области порового пространства, занимаемой нагнетаемым газом. Для нескольких вариантов линейной цепочки узлов и в случае, когда структура системы представляет собой регулярное бинарное дерево (дерево Кэли), в работе получены аналитические выражения для вероятности пробоя на заданную глубину. Приведены примеры расчетов. Поскольку вероятность разрушения ламелл снижается с ростом зоны пробоя, рассматриваемая модель существенно отличается от традиционных перколяционных моделей – в частности, кластер пробоя здесь всегда ограничен.

Интерес к проблеме поведения пен в пористой среде связан с их способностью эффективно препятствовать движению газовых потоков в системе капилляров. Соответствующие механизмы блокирования весьма разнообразны и включают в себя эффекты измельчения структуры пены, разрушения и регенерации ламелл, вытеснение пены в виде каравана ламелл вдоль некоторых активных поровых каналов и др. (см., например, работы [1–3] и библиографию в них). Ключевым параметром проблемы является критический градиент давления, при котором имеет место установившееся течение газа [1, 2], или критический перепад давления, отвечающий моменту динамического страгивания ламелл каравана, что соответствует образованию активного канала [3–5]. Во втором случае говорят о задаче пробоя пены.

В первой из указанных постановок задача обычно рассматривается в рамках перколяционных (вероятностных по своей природе) подходов [1, 2, 6], когда в предположении об отсутствии коллективных эффектов используются геометрические характеристики кластеров, образованных активными каналами. При этом вероятность для данной связи быть открытой принимается одной и той же (для всего ансамбля ламелл вероятности их разрушения предполагаются одинаковыми и постоянными). Использование численного имитационного моделирования позволяет усложнять модели данного типа, например, принимая во внимание эффекты неоднократного разрушения и регенерации ламелл [2]. Рассматривалась [3–5] задача о пробое в неперколяционной детерминистической постановке, причем была предложена модель вытеснения каравана неразрушаемых ламелл вдоль линейного канала, учитывающая свойство сжимаемости газа в пузырьках пены и тем самым взаимодействие соседних ламелл. Показано, что коллективные эффекты могут существенно влиять на значение критического перепада давления.



Фиг. 1

Ниже рассматривается задача о пробое пены, но в несколько ином аспекте. А именно изучается вероятностная модель, описывающая формирование зоны пробоя (или кластера пробоя по терминологии, принятой в теории перколяции) при нагнетании в среду определенного количества идеального газа. Задача состоит в определении параметров зоны пробоя, т.е. не предполагается наличия течения газа. В качестве механизма, обуславливающего рост кластера пробоя, принимается последовательное разрушение блокирующих ламелл; возможность их вытеснения или перемещение вдоль системы капилляров в модели не рассматривается.

Снижение давления в зоне пробоя по мере ее увеличения приводит к уменьшению вероятности разрушения ламелл на поздних стадиях процесса пробоя по сравнению с начальной стадией, что отличает рассматриваемую модель от традиционных перколяционных постановок.

1. Постановка задачи. Сформулируем задачу оценки "несущей способности" ансамбля ламелл, перекрывающих капилляры, в рамках следующей решеточной модели, которая, как будет показано ниже, может быть исследована методами вероятностной механики разрушения дискретных систем. Узлы решетки отождествляются с порами, объем которых (v_0) одинаков, а заблокированные в исходном состоянии связи – с расположенными в устьях пор ламеллами. Предполагается, что среда заполнена крупночешуйчатой пеной (фиг. 1), когда в каждом устье имеется ровно одна ламелла (L_i на фиг. 1) и каждая пора фактически содержит ровно один пузырек пены, давление в которых одинаково и равно p_0 .

Ламеллы предполагаются неподвижными и разрушаются, открывая связь, если перепад давления на них превышает некоторое критическое значение, которое можно назвать прочностью s ламеллы. Прочности ламелл считаются независимыми случайными величинами с одним и тем же вероятностным распределением $F_s(x)$, заданным на носителе $[s_{\min}, s_{\max}]$. Разрушенная связь не может быть вновь заблокирована, т.е. восстановление ламелл не допускается.

В заданный узел, называемый в дальнейшем базисным, нагнетается газ (одинаковый с газом, находящимся в порах). Пусть задана суммарная масса M нагнетаемого газа. Ближайшие к базисному узлу ламеллы оказываются под действием избыточного давления, и некоторые из них (относительно непрочные) разрушаются (ламеллы L_1 на фиг. 1), а другие – нет. Объем зоны разрушения увеличивается, происходит выравнивание давления на новом, более низком уровне. Снова некоторые из нагруженных ламелл разрушаются (ламеллы L'_2), происходит соответствующее перераспределение давления и т.д. Процесс пробоя завершается, когда все ламеллы на фронте зоны пробоя оказываются способными воспринять соответствующий перепад давления (ламеллы L_2, L_3).

Из рассмотрения исключаются все временные эффекты, и процесс пробоя анализируется с помощью пошаговой схемы. В течение одного шага происходит синхронное разрушение всех перегруженных ламелл и выравнивание давления в пределах новой конфигурации зоны пробоя. Рассматривается случай невзаимодействующих ламелл, когда возмущение давления не передается за пределы зоны пробоя.

Используя модель идеального газа, находим следующее соотношение для величины давления в зоне пробоя на шаге τ :

$$p_\tau = (W/V_\tau + 1)p_0$$

где W – объем, который нагнетаемый газ занимал бы при тех же условиях, в которых находится газ в порах (значения W и M связаны однозначно), а V_τ – объем зоны пробоя в конце шага τ . Тогда скачок давления на нагруженных ламеллах равен

$$\Delta p_\tau = (W/V_\tau)p_0 \quad (1.1)$$

При этом вероятность разрушения ламеллы (т.е. вероятность разблокирования связи) равна $F_s(\Delta p_s)$.

Из сказанного вытекает следующее важное свойство модели: если ламелла не разрушилась на некотором шаге, то она не разрушится и позднее (ламелла L_2 на фиг. 1), так как давление в зоне пробоя может лишь снижаться.

В рамках сформулированной постановки задачи окончательная форма зоны пробоя является случайной. Описанная модель пробоя пены газом во многом аналогична моделям, исследуемым в теории перколяции [6–8]. Однако она существенно отличается от последних тем, что вероятность разблокирования связей в ней уменьшается по мере расширения зоны пробоя (или кластера, как говорят в теории перколяции), в то время как в перколяционных моделях эта вероятность фиксирована. Поэтому можно ожидать существенного отличия в свойствах указанных моделей. Например, очевидно, что при фиксированном количестве нагнетаемого газа кластер пробоя всегда имеет конечные размеры, в то время как эффект возникновения бесконечного кластера является ключевым моментом в перколяционных моделях.

Кластер пробоя может трактоваться как конфигурация набора разрушенных элементов некоторой структурной системы (а именно системы ламелл), находящейся под действием заданной нагрузки (нагнетание заданного количества газа) при условии, что известен закон перераспределения нагрузок на работоспособные элементы системы (соотношение (1.1)). Поэтому задача об определении вероятности пробоя пены на заданную глубину может быть рассмотрена методами вероятностной механики разрушения дискретных систем или структурной теории надежности (см., например, [9, 10]¹).

Будем понимать под системой ламелл порядка N совокупность ламелл, которые расположены на расстоянии не более N "шагов" от базисного узла. Назовем k -м структурным уровнем этой системы совокупность узлов, находящихся на расстоянии ровно k шагов от базисного узла (такой набор узлов в регулярных решетках называют k -й координационной группой [7]). Под "несущей способностью" (или прочностью) системы ламелл следует понимать их противодействие процессу расширения зоны пробоя. Скажем, что система ламелл порядка N разрушена при "нагрузке" W , если хотя бы один узел N -го структурного уровня попал в зону пробоя. В этом случае будем также говорить, что глубина пробоя оказалась не меньше N .

Можно ввести числовую характеристику прочности системы ламелл R_N , которая, как вытекает из сказанного, равна минимальному значению величины W , при котором пробой достигает глубины N . В силу вероятностной формулировки задачи величина R_N является случайной и обладает некоторой функцией распределения $F_R(x)$. Согласно определению функции распределения,

$$F_R(W) = \Pr\{R_N < W\}$$

где в правой части записана вероятность события, заключающегося в том, что прочность системы ламелл меньше приложенной нагрузки W (напомним, что величина W пропорциональна количеству нагнетаемого газа).

Итак, для того чтобы охарактеризовать прочность системы ламелл, требуется найти функцию распределения $F_R(x)$ или, что то же самое, совокупность значений $P_N(W)$ – вероятностей пробоя на глубину N – при произвольных значениях W .

Замечание. Система, анализируемая в рамках описанной модели, относится к так называемому классу систем с разгрузкой, поскольку нагрузка на неразрушенные ламеллы снижается по мере развития процесса разрушения в системе. В таких системах вероятность разрушения

¹ См. также: *Онищенко Д.А.* Некоторые принципы построения и анализа квазистатических моделей вероятностной механики разрушения дискретных систем: Препринт № 572. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. 31 с.

может зависеть от последовательности разрушения элементов [10]¹. Принятый здесь вариант синхронного разрушения всех перегруженных на данном шаге ламелл не является единственно возможным. Однако аналитическое исследование других вариантов (например, последовательное разрушение ламелл в очередности возрастания значений их прочности) наталкивается на значительные трудности.

Если теперь задаться некоторой конкретной топологией решетки (системы пор), то сделанных предположений достаточно для проведения анализа задачи о пробое с помощью той или иной схемы численного имитационного моделирования (см., например, [2]). Использование методов Монте-Карло [11] делает возможным вероятностное представление результирующих параметров задачи (например, глубины пробоя или объема кластера пробоя). Однако ожидать получения каких-либо аналитических результатов реально лишь при анализе задачи на регулярных решетках – так же как и в теории перколяции.

В настоящей работе задача о пробое будет рассмотрена для нескольких вариантов линейной цепочки узлов и в случае, когда структура системы представляет собой регулярное бинарное дерево (дерево Кэли). Ниже для этих случаев будут аналитически получены соотношения, определяющие вероятность пробоя на заданную глубину, и будут выявлены некоторые особенности рассматриваемой модели. Можно предположить, что некоторые из свойств модели пробоя, полученные на указанных выше решетках, могут оказаться аналогичными и в случае других решеток в силу эмпирического принципа универсальности, находящего свое подтверждение в теории перколяции [7, 8].

2. Решение задачи в случае линейной цепочки узлов. Рассмотрим простейшую одномерную решетку с линейной конфигурацией узлов (фиг. 2). Требуется найти вероятность того, что при заданном значении W зона пробоя достигнет "глубины" $k = N$. Такое событие эквивалентно произведению событий, заключающихся в разрушении ламелл $1, 2, \dots, N$ при нагрузках $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_N$ соответственно, где, согласно соотношению (1.1), $\Delta p_k = p_k - p_0 = [W/(k\nu_0)]p_0$ ($k = 1, \dots, N$). Поэтому соответствующая вероятность в силу независимости прочностей ламелл равна

$$P_N(W) = \prod_{k=1}^N F_s\left(\frac{W}{k}\right) \quad (2.1)$$

(здесь и далее считаем $p_0 = 1$, $\nu_0 = 1$, если не оговорено другое).

При небольших значениях N распределение (2.1) существенно зависит от конкретного вида функции F_s . Покажем, что в асимптотическом пределе $N \rightarrow \infty$ поведение распределения $P_N(W)$ обладает некоторой универсальностью.

Перейдем для удобства к "удельной нагрузке": будем характеризовать количество нагнетаемого газа величиной $c = W/N$. Тогда соотношение (2.1) запишется в виде

$$P_N(c) = \prod_{k=1}^N F_s\left(\frac{cN}{k}\right) \quad (2.2)$$

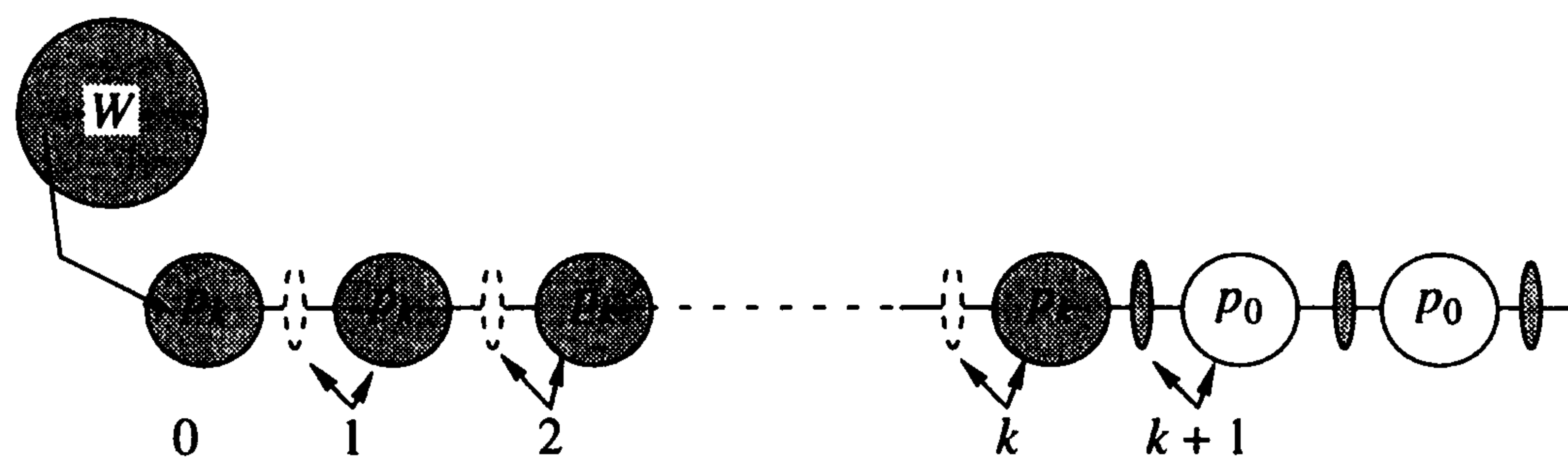
Видно, что $P_N(c) = 0$ при $c \leq c_{\min}$ и $P_N(c) = 1$ при $c \geq c_{\max}$. Поэтому рассмотрим поведение величины $P_N(c)$ при $c_{\min} < c < c_{\max}$. Пусть $c_1 = (c + c_{\max})/2$; при этом $F(c_1) < 1$. Если глубина N достаточно велика, можно утверждать, что $(cN)/k < c_1$ при $k > k_1$, где $k_1 = \gamma N$ ($\gamma = c/c_1 < 1$). Теперь из соотношения (2.2) получим

$$P_N(c) = \prod_{k=1}^{k_1} F\left(\frac{cN}{k}\right) \cdot \prod_{k=k_1+1}^N F\left(\frac{cN}{k}\right) \leq 1 \cdot [F(c_1)]^{N-k_1} = [F(c_1)]^{(1-\gamma)N}$$

Следовательно, $P_N(c) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, т.е.

$$P_N \rightarrow H(s_{\max}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

где H – ступенчатая функция. Это означает, что количество нагнетаемого газа,



Фиг. 2

необходимое для пробоя на глубину N , при больших значениях N должно быть пропорциональным глубине пробоя:

$$W(N) \sim s_{\max} N \quad (2.4)$$

причем этот вывод не зависит от конкретного вида распределения F_s .

В рамках этой же модели может быть поставлена и несколько иная задача, представляющая интерес, а именно: найти распределение глубины пробоя в зависимости от количества нагнетаемого газа и ее числовые характеристики (например, среднее значение глубины пробоя). Заметим, что глубина пробоя (обозначим ее $D(W)$) является дискретной случайной величиной.

В случае линейной цепочки узлов эта задача также может быть решена аналитически. Сначала найдем вероятность $P'_k(W)$ пробоя *точно* на глубину k ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$P'_k(W) = \prod_{i=1}^k F_s\left(\frac{W}{i}\right) \cdot \left[1 - F_s\left(\frac{W}{k+1}\right)\right] \quad (2.5)$$

(при $k = 0$ первый сомножитель считается равным единице). Эта формула отличается от формулы (2.1) наличием дополнительного множителя, равного вероятности того, что ламелла с номером $k + 1$ не разрушится после разрушения первых k ламелл. Набор величин $P'_k(W)$ представляет собой ряд распределения случайной величины $D(W)$, поэтому среднее значение глубины пробоя дается суммой

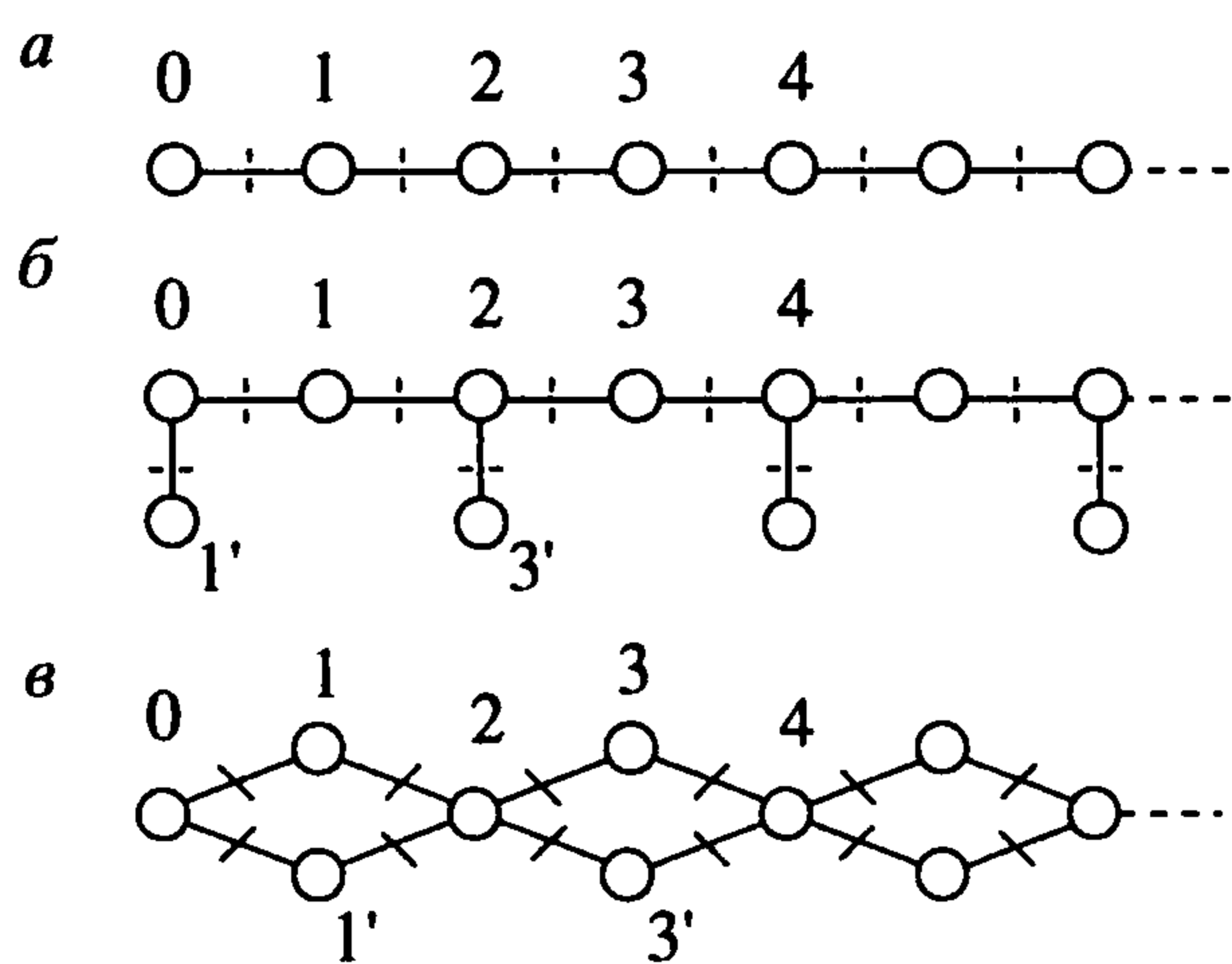
$$\langle D(W) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P'_k(W) \quad (2.6)$$

Аналогичные формулы могут быть записаны для дисперсии и высших моментов.

Грубая оценка зависимости величины $\langle D(W) \rangle$ от W может быть получена с помощью следующих соображений. Выражение (2.5) обращается в нуль как при $k > W/s_{\min}$, так и при $k \leq W/s_{\max}$. Поэтому величина $D(W)$ принимает значения лишь в интервале $[W/s_{\max}, W/s_{\min}]$, и значит, имеет место оценка $W/s_{\max} < \langle D(W) \rangle < W/s_{\min}$. Отметим, что из соотношений (2.3) и (2.4) следует, что $\langle D(W) \rangle \rightarrow W/s_{\max}$ при увеличении W .

3. Некоторые особенности модели пробоя. Чтобы выявить отличительные черты модели пробоя по сравнению с моделями перколяционного типа, рассмотрим задачу о пробое на трех простых решетках, изображенных на фиг. 3, где узел 0 – базисный и все связи в исходном состоянии блокированы. Назовем решетки, обозначенные на фиг. 3 буквами a , b и v , решетками типа 1, 2 и 3 соответственно. Решение для решетки 1 было получено выше и дается формулой (2.1).

Чтобы найти вероятность пробоя до глубины N для решетки 2, заметим, что в отличие от решетки 1 теперь необходимо принять во внимание множественность конфигураций системы, соответствующих событию пробоя. В самом деле, зона пробоя, достигающая глубины N , может включать в себя произвольное количество



Фиг. 3

"лишних" узлов $1', 3', \dots$ В перколяционной постановке факт разблокирования соответствующих этим узлам связей $0-1', 2-3', \dots$ никак не влияет на искомую вероятность наличия связного пути от базисного узла до узла N -го структурного уровня. В модели же пробоя разблокирование связи, ведущей к лишнему узлу (или мертвому концу в терминах перколяции), приводит к снижению нагрузки на ламеллы, расположенные на фронте пробоя, что выражается в уменьшении вероятности разрушения некоторых связей по сравнению со случаем, когда связи, ведущие

к лишним узлам, остались заблокированными. Отсюда следует, что вероятность пробоя на решетке 2, вообще говоря, меньше вероятности пробоя на решетке 1:

$$P_N^{(2)}(W) < P_N^{(1)}(W) \quad (3.1)$$

Заметим, что если связь, ведущая к лишнему узлу, не разрушена на данном шаге, то она не разрушится и позднее, и поэтому соответствующий узел не войдет в состав кластера пробоя.

Вычислим вероятность $P_N^{(2)}(W)$. Обозначим через $H_{i_1 \dots i_N}$ такую конфигурацию зоны пробоя, когда на первом структурном уровне разрушено i_1 ламелл, на втором — i_2 и т.д., и наконец, на N -м — i_N . При этом $i_{2k-1} (k = 1, 2, \dots)$ может принимать значения 1 или 2 (так как имеются две нагруженные ламеллы), а $i_{2k} \equiv 1$. Когда зона пробоя достигает узла с номером k , нагрузка q на активные ламеллы равна $W/(1 + i_1 + \dots + i_{k-1})$. Поскольку различные конфигурации кластера пробоя, однозначно определяемые наборами $\{i_1, \dots, i_N\}$, являются несовместными событиями, а прочности ламелл — независимые случайные величины, то вероятность пробоя до глубины N находится как сумма вероятностей реализации всевозможных конфигураций (по теореме сложения для вероятности суммы событий [12]). Когда N четное, получаем

$$\begin{aligned} P_N^{(2)}(W) = & \sum_{i_1=1}^2 [F_s(q_0)]^{i_1} [1 - F_s(q_0)]^{2-i_1} F_s(q_{i_1}) \\ & \sum_{i_3=1}^2 [F_s(q_{i_1+i_2})]^{i_2} [1 - F_s(q_{i_1+i_2})]^{2-i_2} F_s(q_{i_1+i_2+i_3}) \dots \\ & \dots \sum_{i_{N-1}=1}^2 [F_s(q_{i_1+\dots+i_{N-2}})]^{i_{N-1}} [1 - F_s(q_{i_1+\dots+i_{N-2}})]^{2-i_{N-1}} F_s(q_{i_1+\dots+i_{N-1}}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где введено обозначение

$$q_j = W/(j + 1) \quad (3.3)$$

Поясним, что при $i_1 = 1$ первые два сомножителя в первой сумме определяют вероятность события, заключающегося в разрушении связи $0-1$ и неразрушении связи $0-1'$, а третий сомножитель равен вероятности разрушения связи $1-2$ при нагрузке $W/2$; при $i_1 = 2$ первые два сомножителя в первой сумме определяют вероятность события, заключающегося в одновременном разрушении связей $0-1$ и $0-1'$, а третий сомножитель равен вероятности разрушения связи $1-2$ при соответственно меньшей нагрузке $W/3$. Аналогичные соображения справедливы и для остальных сумм.

Из неравенства (3.1) сразу следует, что при нормировании

$$W = cN$$

асимптотическое свойство (2.3) верно и для решетки 2. Если же рассмотреть другую нормировку величины количества нагнетаемого газа

$$W = c(3/2 N)$$

(при которой количество нагнетаемого газа сопоставляется с полным объемом "порового пространства" в пределах N структурных уровней), то требуется дополнительное исследование. Можно доказать, что свойство (2.3) имеет место и в этом случае (соответствующие выкладки аналогичны приведенным в разд. 2, но более громоздки).

Рассмотрим теперь решетку 3 (фиг. 3, в). Она может быть получена из решетки 2 посредством добавления связей $1'-2$, $3'-4$, Помимо еще большего увеличения возможных конфигураций кластера пробоя, это приводит к возникновению нового эффекта "запаздывающего" разблокирования узлов. Чтобы пояснить, о чем идет речь, рассмотрим звено $\{0, 1, 2, 1'\}$ на фиг. 3, в. Предположим, что на первом шаге связь $0-1$ разрушилась, а связь $0-1'$ не разрушилась, оставив тем самым узел $1'$ закрытым. Для дальнейшего развития процесса пробоя необходимо разрушение связи $1-2$, что приводит к нагружению связи $2-1'$. При ее возможном разрушении узел $1'$ оказывается разблокированным, добавляется к кластеру пробоя и тем самым оказывает влияние на дальнейшее развитие процесса пробоя. Ясно, что при более сложной топологии решетки "время запаздывания" может быть, вообще говоря, произвольным, что чрезвычайно усложняет (если не исключает вообще) нахождение аналитического решения.

В рассматриваемом варианте решетки решение тем не менее найти удастся, правда, за счет введения одного дополнительного предположения. А именно если предположить, что после разрушения одной из связей $1-2$ и $1'-2$ сначала разрушается (или не разрушается) вторая из них и лишь затем анализируется состояние связей $2-3$ и $2-3'$ (естественно, аналогичное правило должно применяться и во всех остальных звеньях), то можно показать, что вероятность пробоя при четных N вычисляется по формуле

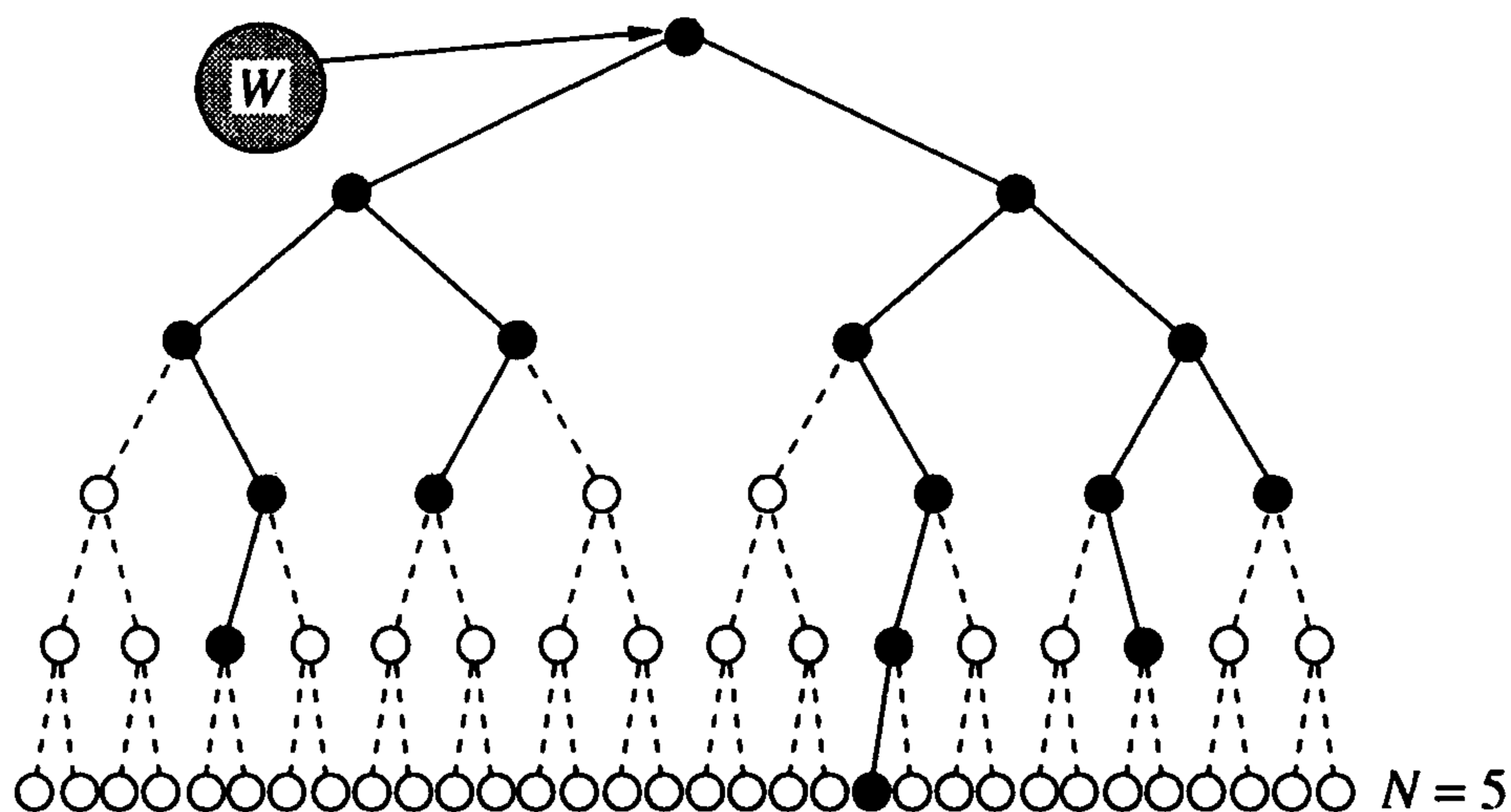
$$\begin{aligned} P_N^{(3)}(W) = & \sum_{i_1=2}^3 \{2f_0(1-f_0)f_1(f_2)^{i_1-2}(1-f_2)^{3-i_1} + (i_1-2)[f_0^2 f_2(2-f_2)]^{i_1-2}\} \dots \\ & \dots \sum_{i_{N-1}=2}^3 \{2f_{i_{N-1}}(1-f_{i_{N-1}})f_{i_{N-1}+1}(f_{i_{N-1}+2})^{i_{N-1}-2}(1-f_{i_{N-1}+2})^{3-i_{N-1}} + \\ & + (i_{N-1}-2)[f_{i_{N-1}}^2 f_{i_{N-1}+2}(2-f_{i_{N-1}+2})]^{i_{N-1}-2}\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$f_{i_k+l} = F_s(q_{i_1+\dots+i_k+l}), \quad k=0, \dots, N-1; l=0, 1, 2; i_0=0$$

Величины q вычисляются с помощью соотношения (3.3); переменными суммирования в (3.4) являются $i_1, i_3, \dots, i_{N-1}$.

Соотношение (3.4) существенно сложнее, чем (3.2), и провести асимптотический анализ с помощью того же подхода, что и выше, здесь не удастся. Открытым является также вопрос о том, какая из решеток – 2 или 3 – более "прочная". Возможно, что ответ зависит от вида распределения F_s .

4. Аналитическое решение задачи о пробое на дереве Кэли. Рассмотрим задачу о пробое на дереве Кэли (иногда соответствующую решетку узлов называют решеткой Бете) с коэффициентом ветвления 2 (см. фиг. 4, где приведена схема дерева порядка $N=5$). Особенностью дерева Кэли является отсутствие в его структуре замкнутых путей. Кроме того, если применительно к рассматриваемой модели пробоя определить текущий фронт пробоя как совокупность ламелл, которые на данном шаге впервые оказались нагруженными (такие ламеллы назовем активными), то он может лишь удаляться от базисного узла. Это существенно облегчает определение глубины пробоя.



Фиг. 4

Определим событие Z как возникновение хотя бы одного пробитого канала, достигающего глубины N (т.е. возникновение цепочки открытых пор, состоящей по крайней мере из N звеньев) при условии, что задано количество нагнетаемого газа W . В качестве примера на фиг. 4 показана возможная конфигурация при пробое системы на глубину $N = 5$, где сплошные линии отвечают разрушенным ламеллам, а штриховые – неразрушенным. Соответственно совокупность темных точек представляет собой кластер пробоя.

Чтобы найти вероятность возникновения события Z , надо идентифицировать все различные варианты конфигурации зоны пробоя, приводящей к событию Z . Обозначим через $H_{i_1 \dots i_N}$ такие из них, когда на первом структурном уровне разрушено i_1 ламелл, на втором – i_2 и т.д., и наконец, на N -м – i_N . При этом должно выполняться условие $i_k \leq 2i_{k-1}$ ($k = 1, \dots, N$), так как одна открытая пора на уровне $k - 1$ может дать не более двух открытых пор следующего структурного уровня.

Можно подсчитать, что существует $C_2^{i_1} C_{2i_1}^{i_2} \dots C_{2i_{N-1}}^{i_N}$ различных конфигураций пробитой зоны для одного набора $(i_1, \dots, i_N)$. Реализации конкретных конфигураций являются несовместными событиями. Перебор всевозможных наборов $(i_1, \dots, i_N)$ и применение теоремы сложения приводят к следующей формуле для вероятности пробоя на глубину не меньше N :

$$P_N(W) = \sum_{i_1=1}^2 C_2^{i_1} [F_s(q_0)]^{i_1} [1 - F_s(q_0)]^{2-i_1} \sum_{i_2=1}^{2i_1} C_{2i_1}^{i_2} [F_s(q_{i_1})]^{i_2} [1 - F_s(q_{i_1})]^{2i_1-i_2} \dots \sum_{i_3=1}^{2i_2} C_{2i_2}^{i_3} [F_s(q_{i_1+i_2})]^{i_3} [1 - F_s(q_{i_1+i_2})]^{2i_2-i_3} \dots \dots \sum_{i_N=1}^{2i_{N-1}} C_{2i_{N-1}}^{i_N} [F_s(q_{i_1+\dots+i_{N-1}})]^{i_N} [1 - F_s(q_{i_1+\dots+i_{N-1}})]^{2i_{N-1}-i_N} \quad (4.1)$$

Здесь $q_j = W/(j + 1)$ ($j = 0, 1, \dots, 2^N$) – перепад давления на ламеллах, находящихся на границе зоны пробоя при условии, что до этого момента было разрушено ровно $j = i_1 + i_2 + \dots$ ламелл. Произведения $[.]^{i_k} [.]^{2i_{k-1}-i_k}$ равны вероятностям того, что из $2i_{k-1}$ нагруженных ламелл на следующем шаге разрушится ровно i_k , а остальные $2i_{k-1} - i_k$ не разрушатся.

Соотношение (4.1) аналогично соотношениям (3.2) и (3.4), полученным в случае линейной цепочки пор. Однако оно имеет комбинаторный характер; при этом число слагаемых (равное числу различных вариантов конфигураций зоны пробоя) стремительно

возрастает с ростом N . Эффективно оценить эту зависимость аналитически сложно. Компьютерные расчеты, проведенные при небольших N , показывают, что время расчета величины $P_N(W)$ возрастает при переходе от N к $N + 1$ примерно в 2^N раз. Поэтому непосредственное использование формулы (4.1) для численных расчетов при больших значениях N , по-видимому, невозможно.

Большой интерес представляет вопрос о поведении соответствующего распределения в асимптотическом пределе, т.е. при $N \rightarrow \infty$.

Как показали исследования родственной задачи о вероятностной прочности пучка волокон с иерархической структурой, также имеющей вид бинарного дерева Кэли (см. работу [10] и ссылки в ней), предельные распределения могут быть различных типов, включая как вырожденные ступенчатые, отвечающие эффекту возникновения порога прочности (как показано выше, такая ситуация имеет место для линейных решеток типа 1 и 2), так и невырожденные.

Асимптотический анализ соотношения (4.1) представляется весьма сложным не только в рамках аналитических подходов, но, как было отмечено выше, и численных.

На фиг. 5 приведены примеры модельных расчетов при $N = 1, 3, 5, 7$. По оси абсцисс отложены не сами значения W количества нагнетаемого газа, а относительные значения s , определяемые соотношением

$$W = cV^{(N)} \quad (4.2)$$

где $V^{(N)} = 2^{N+1}$ – полный объем порового пространства в пределах N структурных уровней (для удобства принято, что объем корневого узла равен $2v_0$). Для конкретизации распределения прочности ламелл F_s используется традиционное соотношение [1, 2] для лапласовского скачка давления на ламелле

$$s \sim \gamma/r_t \quad (4.3)$$

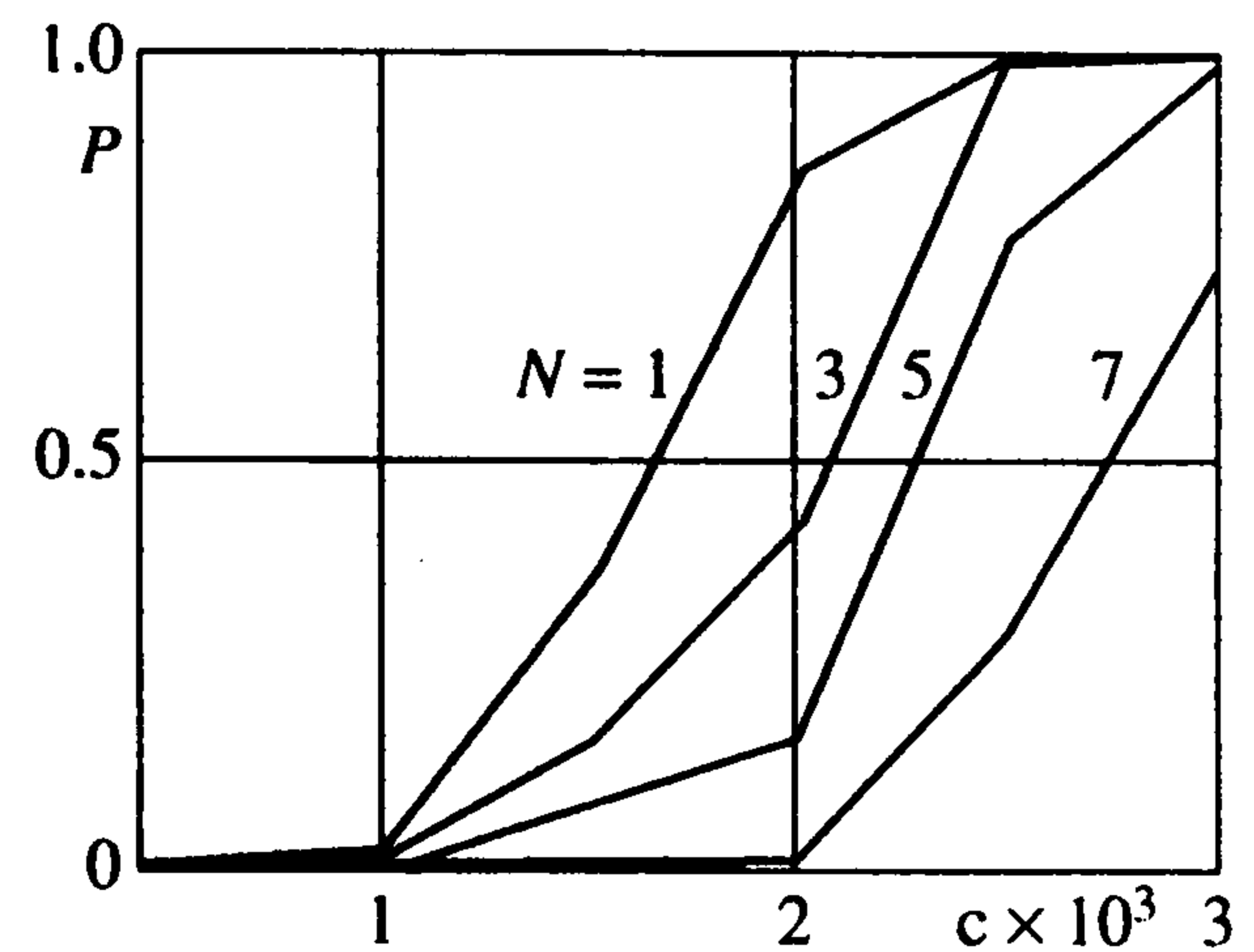
где r_t – радиус устья поры, а γ – коэффициент поверхностного натяжения (в расчетах принято $\gamma = 0.03$ Н/м). В качестве основной случайной переменной в расчетах принимался радиус устья поры r_t , подчиняющийся нормальному закону с плотностью

$$w_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} \exp \frac{(x - m_r)^2}{2\sigma_r^2}$$

усеченному на интервал $10^{-6} \dots 10^{-4}$ м (типичный диапазон радиуса пор [1,2]). Для среднего значения m_r и среднеквадратичного отклонения σ_r были приняты следующие значения: $m_r = 5 \cdot 10^{-5}$ м, $\sigma_r = 10^{-5}$ м.

Из соотношения (4.3) следует, что прочность ламелл заключена в диапазоне 300...30000 Па с модой (точка максимума плотности распределения) в точке 600 Па. Отметим, что распределение прочности оказывается несимметричным и сдвинутым в сторону меньших значений. В качестве начального давления p_0 принято атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Графики зависимостей величин P_N от s , как уже было сказано выше, являются фактически функциями распределения прочности фрагмента дерева Кэли порядка N . Графики на фиг. 5 показывают, что при увеличении N имеет место тенденция "дрейфа" распределений влево, т.е. снижение прочности системы при заданном значении s . Напомним, что в рассмотренных выше случаях линейных структур имела место обратная ситуация – распределения смещались вправо (это определяется свойством (2.3)).



Фиг. 5

5. Заключение. Исследуемая вероятностная модель пробоя крупноячеистой пены при нагнетании в пористую среду идеального газа имеет принципиальные отличия от моделей перколяционного типа. Кластер пробоя всегда ограничен, и задача заключается в определении вероятности пробоя на глубину не меньше заданной. Аналитические решения, найденные в случае линейной цепочки пор и в случае, когда структура системы представляет собой регулярное бинарное дерево (дерево Кэли), имеют очень сложный вид. Поэтому можно предположить, что для эффективного анализа модели пробоя на решетках с более сложной структурой потребуются приближенные подходы.

Асимптотическое исследование, проведенное для линейной цепочки узлов, выявило эффект возникновения вырожденного порога прочности. Ограниченные численные результаты, полученные для дерева Кэли, позволяют предположить, что в случае других решеток асимптотическое поведение распределений прочности системы блокирующих ламелл может оказаться нетривиальным и существенным образом зависеть от метода нормировки количества нагнетаемого газа.

Представляется, что предложенные в работе подходы могут найти применение при исследовании моделей с различным физическим содержанием, в частности при описании некоторого процесса, распространяющегося по стохастической древовидной структуре от корня к вершине с постепенно убывающей интенсивностью. Примерами являются задачи, возникающие при изучении проблем дыхания (см. [13], где с помощью аппарата теории перколяции проводился анализ некоторой механической модели принудительной вентиляции легких).

Автор благодарит К.Г. Корнева за обсуждение постановки задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00957, 96-15-96251) и доложена на Международной конференции "Современная теория фильтрации", посвященной памяти П.Я. Кочкиной (сентябрь 1999 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rossen W.R., Gauglitz P.A.* Percolation theory of creation and mobilization of foams in porous media // *AIChE Journal*. 1990. V. 36. № 8. P. 1176–1188.
2. *Ентов В.М., Мусин Р.М.* Микромеханика нелинейных двухфазных течений в пористых средах. Сеточное моделирование и перколяционный анализ // *Изв. РАН. МЖГ*. 1997. № 2. С. 118–130.
3. *Kornev K.G., Neimark A.V., Rozhkov A.N.* Physical mechanisms of foam flow in porous media // *Advances in the Flow and Rheology of Non-Newtonian Fluids* / Eds. D.A. Siginer et al. Amsterdam etc.: Elsevier, 1999. Pt B. P. 1151–1182.
4. *Корнев К.Г.* Капиллярный пиннинг пены в пористой среде // *ЖЭТФ*. 1995. Т. 107. № 6. С. 1895–1906.
5. *Dautov R., Kornev K., Mourzenko V.* Foam patterning in porous media // *Phys. Rev. E*. 1997. V. 56. № 3. P. 6929–6944.
6. *Larson R.G., Scriven L.E., Davis H.T.* Percolation theory of two phase flow in porous media // *Chem. Eng. Sci.* 1981. V. 36. № 1. P. 57–73.
7. *Эфрос А.Л.* Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982. 175 с.
8. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to Percolation Theory. London: Taylor and Francis, 1994. 124 p.
9. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
10. *Онищенко Д.А.* Вероятностное моделирование многомасштабного разрушения // *Изв. РАН. МТТ*. 1999. № 5. С. 27–48.
11. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975. 470 с.
12. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 447 с.
13. *Suki B., Barabasi A.-L., Hantos Z., Petak F., Stanley H.E.* Avalanches and power-law behaviour in lung inflation // *Nature*. 1994. V. 368. № 6472. P. 615–618.

Москва
onish@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
9.XI.1999