

УДК 532.5

© 2002 г. И.И. Демчик

К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЦИКЛИЧЕСКОГО ФИЛЬТРОВАНИЯ И ФИЛЬТРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

Установлены основные закономерности циклического фильтрования и фильтрования с переменной скоростью в рамках обобщенной математической модели, прототипом которой является модель Шехтмана [1].

Известные математические модели процессов фильтрования через пористые среды, как правило, не позволяют описывать широко применяемые в промышленности процессы циклического фильтрования и фильтрования с переменной скоростью. Вместе с тем для достижения этой цели достаточно перейти к обобщенным математическим моделям минимально необходимой степени общности, т.е. соответственно рассматриваемому случаю учесть в известных моделях зависимость входной концентрации от времени, начальное распределение осадка, существование зависящего от времени состояния предельного насыщения загрузки осадком и зависимость коэффициентов от скорости фильтрования. (Важным исключением из вышесказанного является начальный этап магнитного циклического фильтрования, т.е. этап до обработки входного сечения загрузки, когда концентрация на выходе фильтра не зависит от времени [2].)

1. Переменная скорость фильтрования. Обобщенная математическая модель Шехтмана с соответствующими дополнительными условиями в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v(t) \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(t) C \left[1 - \frac{\rho}{\rho_*(t)} \right] \quad (1.1)$$

$$C|_{x=0} = C_0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x) \quad (1.2)$$

Здесь x – координата в направлении фильтрования ($0 \leq x \leq L$, L – высота загрузки), $v(t)$ – скорость фильтрования, $\beta(t)$ – кинетический коэффициент, $C(x, t)$ – концентрация взвешенных в порах загрузки примесных частиц, $C_0 = \text{const}$ – их концентрация на входе фильтра, $\rho(x, t)$ – концентрация осадка в загрузке, $\rho_*(t)$ – предельная плотность насыщения загрузки осадком в момент времени t [3]

$$\rho_*(t) = \beta(t) C_0 / a(t), \quad a(t) = a_0 v(t), \quad a_0 = \text{const}$$

Исключая из системы (1.1) концентрацию ρ , получаем уравнение, после интегрирования которого по x с учетом первого условия (1.2) приходим к уравнению Бернулли

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{a_0}{C_0} \left\{ x \frac{\partial \rho_*(t)}{\partial t} - v(t) C_0 \right\} C = - \frac{a_0 v(t) C^2}{C_0} \quad (1.3)$$

Для его решения из системы (1.1) предварительно находим соответствующее начальное условие, которое имеет вид

$$C|_{t=0} = \frac{C_0}{E_1(x)}, \quad E_1(x) = \exp \left\{ \frac{\beta(0)}{v(0)} \int_0^x \left[1 - \frac{\rho_0(x')}{\rho_*(0)} \right] dx' \right\} \quad (1.4)$$

Решая уравнение (1.3) с начальным условием (1.4), получаем

$$C(x, t) = C_0 E_2(x, t) E_3(x, t) \quad (1.5)$$

$$E_2(x, t) = \exp \left\{ a_0 \int_0^t \nu(\tau) d\tau + \frac{a_0 x}{C_0} [\rho_*(0) - \rho_*(t)] \right\}, \quad E_3(x, t) = \left[E_1(x) + a_0 \int_0^t \nu(\tau) E_2(x, \tau) d\tau \right]^{-1}$$

Относительно концентрации ρ система (1.1) нелинейна, поэтому возможность ее решения методом исключения концентрации C проблематична. Однако ρ можно найти из второго уравнения (1.1), в котором производная $\partial \rho / \partial t$, на основании уравнения (1.1), заменена уже известной функцией $(-\nu(t) \partial C / \partial x)$. Таким образом, используя выражение (1.5), будем иметь

$$\rho(x, t) = \rho_*(t) + \frac{C_0}{a_0} \frac{\partial \ln C}{\partial x} = [\rho_0(x) E_1(x) + a_0 \int_0^t \nu(\tau) \rho_*(\tau) E_2(x, \tau) d\tau] E_3(x, t) \quad (1.6)$$

Выражения (1.5), (1.6) содержат весь объем информации о процессе фильтрования с переменной скоростью через однородные загрузки, массоперенос в которых протекает по законам, принятым в модели (1.1), (1.2). Эти выражения достаточны для решения ряда оптимизационных задач в случае переменной скорости фильтрования, а не только для нахождения времени защитного действия фильтра и времени достижения предельных потерь напора, чем обычно ограничиваются в теории фильтрования.

В немногочисленных работах по теории фильтрования с убывающей скоростью последняя, как правило, аппроксимируется функциями, позволяющими получать приемлемые для прикладных расчетов решения. Например, искомый закон уменьшения скорости фильтрования аппроксимировался ступенчатой функцией [4], была показана [5] возможность аппроксимации линейного закона ее убывания гиперболическим в реальных условиях эксплуатации фильтров.

Фильтрование с изменяющейся в направлении движения потока скоростью имеет место в фильтрах с изменяющейся геометрией. Однако это особый, более общий, чем рассмотренный, случай законов массопереноса. Действительно, можно показать (см. [6]), что в уравнениях (1.1) неявно предполагается постоянство сечения загрузки.

2. Циклическое фильтрование. В соответствии с реальными условиями работы фильтров в циклическом режиме предполагается, что объем фильтруемой жидкости значительно больше рабочего объема фильтра. По тем же причинам скорость фильтрования считается постоянной, а загрузка фильтра в начальный момент времени – свободной от осадка.

Перейдем к безразмерным переменным, используя в качестве масштабов времени, длины, концентрации взвешенных частиц и концентрации осадка соответственно $\rho_*/(\beta C_0)$, ν/β , C_0 , ρ_* и сохраняя за новыми переменными прежние обозначения.

Исходная система уравнений для i -го цикла ($i = 1, 2, \dots, n$) в безразмерных переменных с соответствующими дополнительными условиями имеет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = C_i(1 - \rho_i) \quad (2.1)$$

$$C_0 = 1, \quad C_{0i}(t) = C_i(L, t), \quad \rho_0(x, 0) \equiv 0, \quad \rho_i(x, 0) \equiv \rho_{i-1}(x, t_0) \quad (2.2)$$

Здесь t_0 – длительность одного цикла фильтрования, $C_i(x, t)$ – нормированная концентрация взвешенных частиц в загрузке в пределах i -го цикла, $C_0 = 1$ – нормированная исходная концентрация этих частиц в фильтруемой жидкости или их концентрация на входе фильтра в течение первого цикла фильтрования, $C_{0i}(t)$ – нормированная концентрация взвешенных примесных частиц на входе фильтра в пределах $(i + 1)$ -го цикла, $C_i(L, t)$ – их нормированная концентрация на выходе фильтра

в пределах i -го цикла, $\rho_i(x, t)$ – нормированная концентрация осадка, накопившегося в загрузке за время $[(i - 1)t_0 + t]$, $\rho_0(x, 0)$ – нормированное распределение осадка в загрузке в начале первого цикла.

На каждом цикле, за исключением первого, входной концентрацией является выходная концентрация предыдущего цикла, а начальным распределением осадка – его распределение, образовавшееся за время t_0 продолжительности предыдущего цикла. Временем прохождения фильтруемой жидкости через фильтр можно пренебречь, поскольку на практике объем этой жидкости значительно больше рабочего объема фильтра.

Решая задачу (2.1), (2.2) в соответствии с алгоритмом, приведенным в разд. 1, получим

$$\begin{aligned} C_i(x, t) &= C_{i-1}(L, t)Z_{i-1}(L, t)\Phi(x, L, t, t_0) \\ \rho_i(x, t) &= [Z_{i-1}(L, t) - 1 + \rho_{i-1}(x, t_0)R_0(x, t_0)]\Phi(x, L, t, t_0) \\ \Phi(x, L, t, t_0) &= [R_0(x, t_0) + Z_{i-1}(L, t) - 1]^{-1} \\ R_0(x, t_0) &= \exp\left\{\int_0^x [1 - \rho_{i-1}(x', t_0)]dx'\right\}, \quad Z_{i-1}(L, t) = \exp\left[\int_0^t C_{i-1}(L, \tau)d\tau\right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда в соответствии с условиями (2.2) находим концентрации $C_1(x, t)$ и $\rho_1(x, t)$ на первом цикле фильтрования

$$C_1(x, t) = \frac{e^t}{e^t + A_1(x)}, \quad \rho_1(x, t) = \frac{B_1(t)}{e^x + B_1(t)} \quad (2.4)$$

$$A_1(x) = e^x - 1, \quad B_1(t) = e^t - 1$$

Для нахождения концентраций $C_2(x, t)$ и $\rho_2(x, t)$ на втором цикле фильтрования подставим выражения для входной концентрации $C_1(L, t)$ и начального распределения осадка $\rho_1(x, t_0)$ в соотношения (2.3). Получим

$$C_2(x, t) = \frac{e^t}{e^t + A_2(x)}, \quad \rho_2(x, t) = \frac{B_2(t)}{e^x + B_2(t)} \quad (2.5)$$

$$A_2(x) = e^{L-t_0}(e^x + e^{t_0} - 1) - 1, \quad B_2(t) = e^{t_0-L}(e^t + e^L - 1) - 1$$

Аналогично находим концентрации $C_n(x, t)$ и $\rho_n(x, t)$ на n -м цикле фильтрования

$$C_n(x, t) = \frac{e^t}{e^t + A_n(x)}, \quad \rho_n(x, t) = \frac{B_n(t)}{e^x + B_n(t)} \quad (2.6)$$

Здесь

$$A_1(x) = e^x - 1, \quad A_{n+1}(x) = \frac{1 + A_n(L)}{1 + B_n(t_0)}[e^x + B_n(t_0)] - 1$$

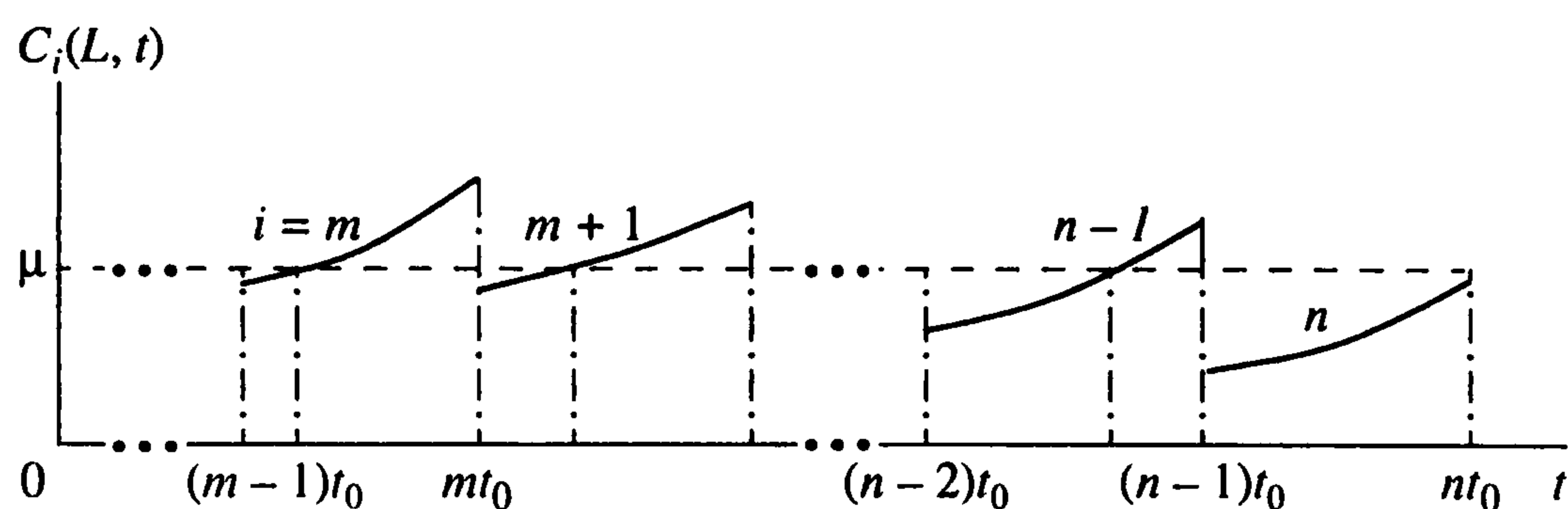
$$B_1(t) = e^t - 1, \quad B_n(t) = \frac{1 + B_{n-1}(t_0)}{1 + A_{n-1}(L)}[e^t + A_{n-1}(L)] - 1; \quad n = 2, 3, \dots$$

Из выражений (2.3) – (2.6) следует положительность функций $A_i(x)$ и $B_i(t)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) при произвольных x и t , положительность функций $A_1(x)$ и $B_1(t)$ при $0 < x \leq L$, $0 < t \leq t_0$ ($A_i(0) = 0$, $B_i(0) = 0$), а также неравенства

$$A_{i+1}(x) > A_i(x), \quad B_{n+1}(t) > B_n(t)$$

Поэтому можно сделать вывод, что

$$\partial C_i(x, t) / \partial t > 0, \quad \partial \rho_i(x, t) / \partial x < 0 \text{ при } 0 < x < L \text{ и } 0 < t < t_0$$



Следовательно, в пределах одного цикла концентрация $C_i(x, t)$ – монотонно возрастающая функция времени, а концентрация $\rho_i(x, t)$ – монотонно убывающая функция x при $t = \text{const}$. Однако при фиксированных x и t с возрастанием числа циклов фильтрования (i) концентрация $C_i(x, t)$ уменьшается, а концентрация $\rho_i(x, t)$ растет.

По сравнению с однократным фильтрованием циклическое обладает принципиальными особенностями, вследствие которых возникает необходимость в обобщении некоторых основных характеристик процесса фильтрования и введении новых. Прежде всего это относится ко времени защитного действия фильтра t_p , вместо которого целесообразно ввести время циклического осветления (очистки) фильтруемой жидкости t_c до наперед заданного уровня μ ($0 < \mu < 1$). Действительно, при однократном фильтровании и постоянной входной концентрации концентрация на выходе фильтра $C(L, t)$ непрерывно возрастает. Поэтому время t_p определялось как время достижения предельно допустимого уровня μ концентрации примесных частиц в фильтруемой жидкости, после чего фильтрование прекращалось. При циклическом фильтровании в рассматриваемом случае концентрация на выходе фильтра $C(L, t)$ имеет вид последовательности криволинейных трапеций с убывающей с увеличением номера цикла высотой (фигура). Иными словами, здесь ситуация принципиально иная, в частности потому, что в течение всего времени до прекращения фильтрования или значительной его части концентрация на выходе фильтра $C(L, t)$ превышает допустимый уровень. Поэтому время t_c естественно определить как время, начиная с которого при дальнейшем фильтровании качество фильтрата будет не хуже требуемого. Последнее означает, что время t_c определяется по-разному в зависимости от целевого предназначения фильтрата (так же как и время t_p при переменной входной концентрации). Действительно, в циклическом режиме в общем случае возможны ситуации, когда уровень μ достигается в разные моменты времени t на протяжении довольно значительного числа циклов (фигура). Как правило, требование потребителя к качеству фильтрата – это либо требование к среднему значению выходной концентрации $C_i(L, t)$ за время t_0 , либо разного рода ограничения на характеристики выбросов данной концентрации над уровнем μ за определенный период времени. Поэтому процесс фильтрования целесообразно прекратить задолго до n -го цикла, начиная с которого кривая $C_n(L, t)$ полностью опустится ниже уровня μ . Тем самым можно избежать избыточной очистки фильтруемой жидкости и повысить производительность фильтра.

Кроме времени t_c , к числу основных характеристик процесса циклического фильтрования относится и время достижения предельных потерь напора t_n . Для его расчета необходимо установить закон роста потерь напора на загрузке фильтра $h_n(t)$ в рассматриваемом режиме работы. В случае фильтров постоянного сечения с произвольной однородной загрузкой имеем [3]

$$h_n(t) = i_0 \varepsilon_0^3 \int_0^L \frac{dx}{\varepsilon_n^3(x, t)}, \quad \varepsilon_n(x, t) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\rho_n}{\gamma \varepsilon_0} \right) \quad (2.7)$$

где $i_0 = \text{const}$ – начальный гидравлический уклон, $\varepsilon_0 = \text{const}$ – исходная пористость загрузки, $\varepsilon_n(x, t)$ – пористость загрузки в сечении x в момент времени t в пределах n -го

цикла фильтрования, γ – плотность образующегося осадка. После перехода к безразмерным переменным $x, t, \rho_n, z = e^x + B_n(t)$ с ранее введенными масштабами и безразмерной переменной $h_n(t)$ с масштабом $i_0\nu/\beta$ при сохранении за этими переменными прежних обозначений и подстановки в равенство (2.7) выражения (2.6) для ρ_n будем иметь

$$h_t(t) = \sum_{k=0}^6 q_k(t) B_n^{6-k}(t)$$

$$r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = (1-p)^3, \quad r_4 = r_6 = 1, \quad r_5 = 1-3p; \quad p = \rho_* / (\gamma \epsilon_0)$$

$$q_0 = Lr_0, \quad q_k(t) = \frac{r_k}{k} [M^k(t) - N^k(t)]$$

$$M^k(t) = [e^L + B_n(t)]^k, \quad N^k(t) = 1 + B_n(t), \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

Отсюда при заданном гидравлическом напоре определяется время t_h .

Полученные выше выражения достаточны для оптимизации работы фильтров рассмотренного типа в циклическом режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтман Ю.М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 212 с.
2. Сандуляк А.В. Очистка жидкостей в магнитном поле. Львов: Выща шк., 1984. 166 с.
3. Минц Д.М. Теоретические основы технологии очистки воды. М.: Стройиздат, 1964. 156 с.
4. Сенявин М.М., Веницианов Е.В. Способ повышения эффективности сорбционного фильтра // Теорет. основы хим. технологии. 1987. Т. 21. № 2. С. 277–280.
5. Демчик И.И. К теории процессов фильтрования с убывающей скоростью // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 517–519.
6. Кочмарский В.З., Демчик И.И. Модель фильтра с переменной геометрией загрузки и одновременным заполнением слоев // Химия и технология воды. 1986. Т. 8. № 2. С. 11–15.

Ровно
e-mail: wa @ rstu.rv.ua

Поступила в редакцию
18.1.2000