

УДК 532.516:534.1

© 2002 г. А.А. Гурченков

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Изучаются движения вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся вначале как твердое тело с постоянной угловой скоростью вместе с ограничивающими ее параллельными стенками, под действием внезапно начинающихся продольных колебаний одной из стенок. Стенки составляют произвольный угол с осью вращения. В общем случае решение получено в виде суммы бесконечного ряда и представлено интегралом, содержащим эллиптическую функцию. Рассматривается ряд частных случаев движения стенки. На основе полученных результатов исследуются отдельные структуры пограничных слоев у стенок.

Данное исследование обобщает предыдущие результаты [1–4]. Показано, что при удалении неподвижной стенки на бесконечность решение совпадает с результатами работы [4], а при отсутствии вращения и удалении неподвижной стенки на бесконечность решение переходит в известное решение задачи о нестационарном движении жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой [1].

1. Точные решения уравнений Навье–Стокса. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей щель шириной l , между параллельными плоскостями Q_0 и Q_1 , которые вращаются с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$, причем вектор ω_0 образует с этими плоскостями постоянный угол $\beta (0 < \beta \leq \pi/2)$. Частный случай $\beta = \pi/2$ был исследован ранее [2]. Плоскость Q_0 в момент времени $t = 0$ начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $u(t)$. Свяжем с вращающейся плоскостью декартову систему координат $Oxyz$ с осями e_x , e_y и e_z так, что плоскость Oxz совпадает с плоскостью Q_0 , а ось y направлена по нормали к ней внутрь жидкости.

Уравнения движения жидкости в системе $Oxyz$, вращающейся с угловой скоростью ω_0 , а также граничные и начальные условия имеют вид

$$\omega_0(\omega_0 \times \mathbf{r}) + 2\omega_0 \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla U + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{r} \in Q_0, \quad t > 0; \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in Q_1; \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) = 0$$

Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор относительно полюса O , $\mathbf{v}$ – скорость жидкости, P – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость жидкости, U – потенциал внешних массовых сил. Решение системы уравнений (1.1) будем искать в виде

$$P = \rho(\omega_0 \times \mathbf{r})^2 / 2 + \rho U + \rho q(y, t), \quad \mathbf{v} = v_x(y, t) \mathbf{e}_x + v_z(y, t) \mathbf{e}_z$$

Тогда система (1.1) распадается на две подсистемы

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\Omega(\mathbf{e}_y \times \mathbf{v}) = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2}, \quad \Omega = \omega_0 \cdot \mathbf{e}_y; \quad \frac{\partial q}{\partial y} = 2\nu(\omega_0 \times \mathbf{e}_y) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}(0, t) = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{v}(l, t) = 0, \quad \mathbf{v}(y, 0) = 0$$

При этом поле скоростей находится из первого уравнения (1.2), а поле давлений определяется по найденному полю скоростей из второго уравнения (1.2).

Решение системы (1.2) ищем в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} \sin 2\Omega t - (\mathbf{W} \times \mathbf{e}_y) \cos 2\Omega t, \quad \mathbf{W} = W_x(y, t)\mathbf{e}_x + W_z(y, t)\mathbf{e}_z \quad (1.3)$$

где $\mathbf{W}(y, t)$ – новая неизвестная функция. Подставляя выражения (1.3) в (1.2), получим для определения W следующую задачу:

$$W_t = \nu W_{yy}, \quad 0 \leq y \leq l \quad (1.4)$$

$$W(0, t) = v(t) \sin 2\Omega t + (v(t) \times \mathbf{e}_y) \cos 2\Omega t, \quad W(l, t) = 0; \quad W(y, 0) = 0$$

Уравнение (1.4) имеет систему собственных функций

$$\sin \frac{\pi n}{l} y, \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем вспомогательную функцию $z(y, t)$ равенством

$$W = (1 - y/l)W(0, t) + z(y, t) \quad (1.5)$$

Подставляя выражение (1.5) в соотношения (1.4), получаем неоднородное уравнение с однородными начальными и граничными условиями

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(1 - \frac{y}{l}\right) \frac{\partial W(0, t)}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$z(0, t) = 0, \quad z(l, t) = 0, \quad z(y, 0) = 0.$$

Будем искать решение уравнений (1.6) в виде ряда по собственным функциям однородного уравнения (1.4) (всюду далее, если не оговорено противное, суммирование ведется по n от 1 до ∞)

$$z = \sum z_n(t) \sin(\pi n y / l) \quad (1.7)$$

Подставляя ряд (1.7) в уравнение (1.6), получаем уравнение первого порядка, откуда находим

$$z_n(t) = -\frac{2}{\pi n} \int_0^t \dot{W}(0, \tau) \exp[-\nu \lambda_n^2 (t - \tau)] d\tau, \quad \text{где } \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (1.8)$$

(точкой обозначена производная по t). Интегрируя в правой части равенства (1.8) по частям и подставляя в равенство (1.5) при учете представления (1.7), получим решение уравнения (1.4)

$$W = 2\nu l^{-2} \sum n \sin(\lambda_n y) \int_0^t W(0, \tau) \exp[-\nu \lambda_n^2 (t - \tau)] d\tau \quad (1.9)$$

Используя формулу (1.9), из выражений (1.3) находим поле скоростей

$$\mathbf{v} = 2\nu l^{-2} \sum n \sin(\lambda_n y) \mathbf{B}_n(t), \quad \mathbf{B}_n(t) = \int_0^t \mathbf{T}(\tau, t - \tau) \exp[-\nu \lambda_n^2 (t - \tau)] d\tau \quad (1.10)$$

$$\mathbf{T}(\tau, t - \tau) = \mathbf{u}(\tau) \cos 2\Omega(t - \tau) + (\mathbf{u}(\tau) \times \mathbf{e}_y) \sin 2\Omega(t - \tau)$$

Решая второе из уравнений (1.2), в правую часть которого подставлено выражение (1.10), можем найти поле давлений внутри щели. Векторы касательных напряжений, действующие на границы щели со стороны жидкости, определяются выражениями

$$\mathbf{F}_0 = 2\pi^2 \rho \nu^2 l^{-3} \sum n^2 \mathbf{B}_n(t), \quad \mathbf{F}_l = 2\pi^2 \rho \nu^2 l^{-3} \sum (-1)^n n^2 \mathbf{B}_n(t) \quad (1.11)$$

Соотношения (1.10), (1.11) полностью решают поставленную задачу.

Для дальнейшего анализа удобно представить поле скоростей и векторы касательных напряжений в комплексной форме

$$\hat{v} = v_z + iv_x, \quad \hat{u} = u_z + iu_x, \quad \hat{F}_0 = F_{0z} + iF_{0x}, \quad \hat{F}_l = F_{lz} + iF_{lx}$$

Исходя из выражений (1.10) и (1.1), получим

$$\hat{v} = \sum 2\pi n v l^{-2} \sin(\lambda_n y) \hat{I}_n(t)$$

$$\hat{I}_n(t) = \int_0^t \hat{u}(t-\tau) \exp[(-v\lambda_n^2 - i2\Omega)\tau] d\tau \quad (1.12)$$

$$\hat{F}_0 = 2\pi^2 \rho v^2 l^{-3} \sum n^2 \hat{I}_n(t), \quad \hat{F}_l = 2\pi^2 \rho v^2 l^{-3} \sum (-1)^n n^2 \hat{I}_n(t) \quad (1.13)$$

Учитывая известную формулу ([5], с. 378), выразим сумму ряда через эллиптические функции

$$\sum 2\pi n l^{-2} \sin(\lambda_n y) \exp(-\lambda_n^2 t) = \sum \Psi(2nl + y, t) = -\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial y} \theta_3\left(\frac{y}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)$$

$$\Psi(y, t) = \frac{y}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-y^2}{4t}\right), \quad t > 0; \quad \theta_3(u, t) = 1 + 2 \sum \exp(-n^2 \pi^2 t) \cos 2\pi n u$$

Например, поле скоростей можно выразить через эллиптические тэта-функции Якоби

$$\hat{v} = -\frac{v}{l} \int_0^t \exp(-2i\Omega\tau) \hat{u}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial y} \theta_3\left(\frac{y}{2l}, \frac{\tau v}{l^2}\right) d\tau$$

а также представить в виде ряда

$$\hat{v} = v \sum \int_0^t \Psi(2nl + y, v\tau) \hat{u}(t-\tau) \exp(-2i\Omega\tau) d\tau$$

Отметим, что при $n = 0$ из последнего выражения следует результат [4], отвечающий случаю вращающегося полупространства вязкой жидкости над плоской пластиной.

2. Поле скоростей потока, индуцированного заданным движением граничной плоскости. Пусть одна из плоскостей, составляющих границы щели, колеблется с затуханием в продольном направлении со скоростью

$$\hat{u} = \exp(-\alpha t) \sum_{\pm} \hat{A}_{\pm} \exp(\pm i\omega t) \quad (2.1)$$

где $\hat{A}_{\pm}$ – комплексные амплитуды (постоянные величины), ω – частота, α – коэффициент затухания. В этом случае поле скоростей и касательные напряжения могут быть представлены в виде

$$\hat{v} = \frac{2\pi v}{l^2} \exp(-2i\Omega t) \sum n \sin(\lambda_n y) S_n(t) \quad (2.2)$$

$$\hat{F}_0 = \frac{2\pi^2 \rho v^2}{l^3} \exp(-2i\Omega t) \sum n^2 S_n(t), \quad \hat{F}_l = \frac{2\pi^2 \rho v^2}{l^3} \exp(-2i\Omega t) \sum (-1)^n n^2 S_n(t) \quad (2.3)$$

Здесь

$$S_n(t) = \sum_{\pm} \hat{A}_{\pm} \frac{\exp(p_{\pm} t) - \exp(-v\lambda_n^2 t)}{v\lambda_n^2 + p_{\pm}} = 2 \sum_{\pm} \hat{A}_{\pm} \frac{\exp[-(v\lambda_n^2 - p_{\pm})t/2]}{v\lambda_n^2 + p_{\pm}} \operatorname{sh} \frac{v\lambda_n^2 + p_{\pm}}{2}$$

$$p_{\pm} = -\alpha + i(2\Omega \pm \omega)$$

Видно, что даже в случае резонансных частот ω , т.е. когда $v\lambda_n^2 + p_{\pm} = 0$, поле скоростей тем не менее остается гладким.

Представляет интерес рассмотреть поведение решения при $t \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\lambda_n^2 \approx n^2$, воспользуемся далее табличными суммами [6]. Тогда для поля скоростей и касательных напряжений получим асимптотические выражения

$$\hat{v} = \exp(-\alpha t) \sum_{\pm} \left[\hat{A}_{\pm} \exp(\pm i\omega t) \frac{\text{sh}(l-y)\sigma_{\pm}}{\text{sh}(l\sigma_{\pm})} \right] \quad (2.4)$$

$$\hat{F}_0 = -\rho v \exp(-\alpha t) \sum_{\pm} \hat{A}_{\pm} \sigma_{\pm} \exp(\pm i\omega t) \text{cth}(l\sigma_{\pm}) \quad (2.5)$$

$$\hat{F}_l = -\rho v \exp(-\alpha t) \sum_{\pm} \hat{A}_{\pm} \sigma_{\pm} \frac{\exp(\pm i\omega t)}{\text{sh}(l\sigma_{\pm})} \quad (2.6)$$

где $\sigma_{\pm} = \sqrt{p_{\pm}/v}$. Переходя в соотношениях (2.4) и (2.6) к пределу при $l \rightarrow \infty$ (тем самым щель превращается в полупространство), получим в точности формулы (2.17) и (2.18) из [4], где рассмотрено движение вязкой жидкости в полупространстве, ограниченном плоскостью, движущейся со скоростью (2.1).

Теперь покажем, что не только в асимптотическом случае, но и в общем случае поле скоростей (1.12) при $l \rightarrow \infty$ переходит в соответствующее поле для полупространства [4]. В самом деле, в случае щели ширины l из граничных условий находится дискретное множество собственных значений $\lambda_n = \pi n/l$. При $l \rightarrow \infty$ это множество составляет непрерывный спектр $0 < \lambda < \infty$. Поэтому сумма в правой части равенства (1.12) при $l \rightarrow \infty$ заменится интегралом. При учете этого замечания поле скоростей (1.12) запишем в виде

$$\hat{v} = \frac{2v}{\pi} \int_0^t \hat{u}(t-\tau) \exp(-2i\Omega\tau) \left[\int_0^{\infty} \lambda \sin(\lambda y) \exp(-v\lambda_n^2 t) d\lambda \right] d\tau \quad (2.7)$$

Вычисляя несобственный интеграл, получаем формулу для $\hat{v}$ из [4].

3. Структура пограничных слоев. Исследуем подробнее выражение (2.2) для поля скоростей. Из формулы (2.2) видно, что при приближении по оси y к неподвижной границе щели, т.е. при $y \rightarrow l$, наблюдается экспоненциальное затухание скорости жидкости в любые моменты времени.

Рассмотрим поле скоростей жидкости (2.4). Выражения для частот $\sigma_{\pm}$, входящих в формулу (2.4), представим в виде

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{\delta_{\pm}} + \xi_{\pm}, \quad \delta_{\pm} = \left(\frac{2v}{|p_{\pm}| - \alpha} \right)^{1/2}, \quad \xi_{\pm} = \left(\frac{|p_{\pm}| + \alpha}{2v} \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

Формулу для скорости жидкости (2.4) можно записать следующим образом:

$$\hat{v} = \exp(-\alpha t) \sum_{\pm} \hat{A}_{\pm} \exp(\pm i\omega t) [\text{ch}(\sigma_{\pm} y) - \text{sh}(\sigma_{\pm} y) \text{cth}(\sigma_{\pm} l)] \quad (3.2)$$

Расписывая гиперболические синус и косинус через экспоненты, видим, что решение представляет собой набор восьми волн с волновыми числами $\xi_{\pm}$ и частотой ω , распространяющихся по оси y навстречу друг другу и экспоненциально затухающих с течением времени. При $l \gg \delta_{\pm}$ все волны экспоненциально затухают по оси y на расстояниях $\delta_{\pm}$ соответственно. Таким образом, в случае $l \gg \delta_{\pm}$ влияние второй плоскости, ограничивающей щель, на величины пограничных слоев $\delta_{\pm}$ не ощущается. Ее присутствие в этом случае приводит лишь к появлению отраженных волн, часть

из которых имеет амплитуду $\hat{A}_{\pm} \operatorname{cth} l(1/\delta_{\pm} + i\xi_{\pm})$, зависящую от ширины щели и параметров движения плоскости, составляющей ее границу.

Заметим, что в резонансном случае, т.е. при $\omega = 2\Omega$ имеем: $p_+ = -\alpha + 4i\Omega$, $p_- = -\alpha$, и поэтому $1/\delta_- = 0$, $\xi_- = \sqrt{\alpha/\nu}$. Следовательно, все волны в решении (3.2) с амплитудой $\hat{A}_-$ участвуют лишь в колебательном движении и не затухают по оси y . Если при этом $\alpha = 0$, то $p_- = \xi_- = 0$, т.е. в резонансном случае волны с амплитудой $\hat{A}_-$, набегающие на движущуюся плоскость, отсутствуют.

Рассмотрим случай экспоненциально затухающего движения плоскости. Положим в соотношениях (2.4) – (2.6) $\omega = 0$. Тогда $p_+ = p_- = -\alpha + 2i\Omega = p$; обозначим также $\hat{A}_+ = \hat{A}_- = \hat{A}$. Получим

$$\hat{v} = \hat{A} \exp(-\alpha t) \operatorname{sh}[(l-y)\sigma] / \operatorname{sh}(l\sigma) \quad (3.3)$$

$$\hat{F}_1 = -\rho\nu\sigma\hat{A} \exp(-\alpha t) / \operatorname{sh}(l\sigma), \quad \hat{F}_0 = -\rho\nu\sigma\hat{A} \exp(-\alpha t) / \operatorname{cth}(l\sigma)$$

где $\sigma = \sqrt{p/\nu}$. Из формул (3.3) при $l \rightarrow \infty$ получаем формулы (2.24) и (2.25) из [4].

Заметим, что были отмечены [2] трудности, связанные с решением задачи при $\omega \rightarrow 2\Omega$. Во-первых, оказалось, что один из пограничных слоев, формирующихся на границе щели, неограниченно возрастает при $\omega \rightarrow 2\Omega$. Во-вторых, решение (поле скоростей) зависит от порядка операций в двойном предельном переходе $t \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 2\Omega$. При рассмотрении пограничных слоев Экмана было обнаружено [3] резонансное поведение решения при $\omega \rightarrow 2\Omega$; численные результаты показали увеличение скорости течения в пограничном слое, обусловленной этим резонансом.

Таким образом, проведенный анализ показал, что затухание обеспечивает существование решения внутри щели и снимает трудности, отмеченные ранее [2–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955, 520 с.
2. Thornley Cl. On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quart J. Mech and Appl. Math. 1968. V. 21. № 4. P. 451–461.
3. Debnath L., Mukherjee S. Unsteady multiple boundary layers on a porous plate in a rotating system // Phys. Fluids. 1973. V. 16. № 9. P. 1418–1421.
4. Гурченков А.А., Яламов Ю.И. Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // ПМТФ. 1980. № 4. С. 66–69.
5. Doetsch G. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. Munchen; Wien: R. Oldenbourg, 1961. 256 S.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.