

УДК 62–50

© 2002 г. А.Ш. Кучкаров, Б.Б. Рихсиев

О ВОЗМОЖНОСТИ УКЛОНЕНИЯ ОТ ВСТРЕЧИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ УБЕГАНИЯ

Рассматривается линейная дифференциальная игра убегания. При выполнении условия "вращаемости" и условия включения области значений управлений преследующего в область значений управлений убегающего доказана возможность уклонения от встречи.

Постановка рассматриваемой задачи принадлежит Л.С. Понтрягину [1, 2], и ей посвящено много исследований (см. [3–10]). Теорема Понтрягина [2] требует выполнения двух условий: "вращаемости" и "преимущества". В формулировке второго условия участвует число $\mu > 1$, отражающее преимущество убегающего объекта перед преследующим. В 1973 г. Л.С. Понтрягиним была сформулирована задача: можно ли доказать теорему убегания [2], если $\mu = 1$? Были даны [5, 6] примеры дифференциальных игр, в которых $\mu = 1$. Однако положительное решение задачи Л.С. Понтрягина пока не получено.

Ниже дано решение задачи Л.С. Понтрягина в случае, когда область управления преследующего содержится в области управления убегающего.

1. Постановка задачи и формулировка результатов. Рассматривается управляемый вектор z , движение которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v + a; \quad z \in R^n, \quad u \in P, \quad v \in Q \quad (1.1)$$

C – линейное отображение R^n в себя, a – заданный постоянный вектор из R^n , u – управляющий параметр преследователя, v – управляющий параметр убегающего, P, Q – заданные выпуклые непустые компактные подмножества пространства R^n . Игра считается законченной, если z достигает заданного линейного подпространства M пространства R^n . Цель убегающего – предотвращение ее окончания, и для ее достижения можно в каждый момент времени $t \geq 0$ выбирать значение $v(t)$ параметра v , используя при этом значения $z(t)$ и $u(t)$ векторов z и u в тот же момент времени t .

Если при любом значении $z(0) \in M$ можно так вести игру, что точка $z(t)$, $t > 0$, никогда не достигнет множества M , то будем говорить, что в игре (1.1) возможно убегание.

Ортогональное дополнение подпространства M в пространстве R^n обозначим через L . Пусть W – пока произвольное векторное подпространство пространства L . Операцию ортогонального проектирования из R^n на W обозначим через π . Пусть A и B – два подмножества пространства W . Будем писать $A \overset{*}{\subset} B$, если существует такой вектор $x \in W$, что $x + A \subset B$.

Будем говорить, что выполнено условие вращаемости, если существует такое двумерное подпространство W пространства L , что не существует в W фиксированного одномерного векторного пространства W_1 , для которого при всех достаточно малых положительных t имеет место включение

$$\pi e^{tC} Q \subset W_1 \quad (1.2)$$

Параллельный перенос любого из множеств P и Q в пространстве R^n может быть компенсирован изменением вектора a . Пользуясь этим, можем считать, что $0 \in P$, $0 \in Q$, и вместо (1.2) имеет место обычное включение

$$\pi e^{tC} Q \subset W_1$$

Теорема. При выполнении условия вращаемости и $P \subset Q$ в игре (1.1) возможно убежание.

2. Вспомогательные утверждения. Определим множества

$$M_{l+1} = \{z \in M_l : Cz + a \in M_l\}, \quad l = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.1)$$

где M_1 – ортогональное дополнение W в R^n . Очевидно, что $M \subset M_1$, $M_{l+1} \subset M_l$ ($l = 1, 2, \dots, n-1$). Можно доказать, что: 1) если $M_{l+1} = M_l$ для некоторого $l = 1, 2, \dots, n-1$, то $M_l = M_{l+1} = \dots = M_n$; 2) если $M_{l+1} \neq M_l$ при всех $l = 1, 2, \dots, n-1$, то $n-2 = \dim M_1 > \dim M_2 > \dots > \dim M_{n-1} = 0$ и $M_n = \emptyset$. Отсюда следует, что если $M_n \neq \emptyset$, то $M_{n-1} = M_{n-2}$. Значит, существует натуральное число k , $k \leq n-2$, такое, что либо $M_k \neq M_{k+1} = \emptyset$, либо $M_1 \neq M_2 \neq \dots \neq M_k = M_{k+1} = \dots = M_n \neq \emptyset$.

Пусть $\dim M_i = k_i$, A_i – некоторое линейное взаимнооднозначное отображение пространства R^{k_i} на M_i , т.е.

$$A_i R^{k_i} = M_i, \quad N_i = M_i \setminus M_{i+1} \quad (2.2)$$

Здесь и всюду далее $i = 1, 2, \dots, k$.

В соответствии с формулой Коши для решения задачи Коши

$$\dot{w} = Cw + a, \quad w(0) = w_0$$

имеем

$$w(\tau, w_0) = e^{\tau C} w_0 + \int_0^\tau e^{(\tau-s)C} a ds, \quad -\infty < \tau \leq 0 \quad (2.3)$$

С помощью множества N_i и соотношения (2.3) определим поверхность Σ_i , уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$\Sigma_i: w = w(\tau, w_0), \quad \tau \in (-\infty; 0), \quad w_0 \in N_i$$

или

$$\Sigma_i: w = w(\tau, A_i x), \quad \tau \in (-\infty; 0), \quad x \in R^{k_i} \setminus A_i^{-1} M_{i+1} \quad (2.4)$$

Отметим, что множество точек $w = w(\tau, w_0)$, $\tau \in (-\infty; 0)$, $w_0 \in N_k$ может оказаться точкой. Во всех случаях назовем его поверхностью.

Через $n(z)$ обозначим вектор из W , такой, что

$$(n(z), Cz + a) = 0, \quad z \in R^n \quad (2.5)$$

$((x, y))$ – скалярное произведение векторов x и y .

Лемма 1. Поверхность Σ_i – гладкая. Если $w(\tau, w_0) \in \Sigma_i$, то вектор

$$m(\tau, w_0) = (e^{-\tau C})^T n(w_0) \quad (2.6)$$

является нормалью к поверхности Σ_i в точке $w(\tau, w_0)$ (T – знак транспонирования).

Доказательство. Пусть $w_0 = A_i x_0$, $x_0 \in R^{k_i} \setminus A_i^{-1} M_{i+1}$.

Вычислим (см. (2.1)–(2.3)) (всюду далее $\partial_\tau = \partial / \partial \tau$, $\partial_j = \partial / \partial x_j$, $j = 1, 2, \dots, k$)

$$\partial_\tau w(\tau, A_i x) |_{x=x_0} = e^{\tau C} (C A_i x_0 + a) = e^{\tau C} (C w_0 + a)$$

$$\partial_j w(\tau, A_i x) |_{x=x_0} = e^{\tau C} A_i e_j \quad (2.7)$$

Здесь $(x_1, x_2, \dots, x_{k_i})^T = x \in R^{k_i}$, $e_1, e_2, \dots, e_{k_i}$ – единичные координатные векторы в R^{k_i} . Очевидно, что векторы $A_i e_1, A_i e_2, \dots, A_i e_{k_i}$ образуют базис в пространстве M_i . Отсюда, учитывая определения множеств M_i, N_i , поверхности Σ_i и то, что $\det(e^{\tau C}) \neq 0$, заключаем, что векторы

$$\partial_\tau w(\tau, A_i x)|_{x=x_0}, \quad \partial_j w(\tau, A_i x)|_{x=x_0}$$

линейно независимы. Это означает, что поверхность Σ_i – гладкая.

Доказательство второй части утверждения леммы следует из соотношений (2.5)–(2.7), согласно которым имеем

$$(\partial_\tau w(\tau, A_i x)|_{x=x_0}, m(\tau, w_0)) = (e^{\tau C}(Cw_0 + a), (e^{-\tau C})^T n(w_0)) = 0 \quad (2.8)$$

$$(\partial_j w(\tau, A_i x)|_{x=x_0}, m(\tau, w_0)) = (e^{\tau C} A_i e_j, (e^{-\tau C})^T n(w_0)) = 0$$

Пусть n_0 – произвольный ненулевой вектор из W . Тогда вектор $(e^{-\tau C})^T n_0$ – нормаль к поверхности $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_k$ в точке $w(\tau, w_0)$, $w_0 \in N_i$ (см. (2.1), (2.4), (2.5) и (2.6)). Это означает, что вектор $(e^{-\tau C})^T n_0$ – нормаль к поверхности $\Sigma_0 = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \dots \cup \Sigma_k$ в точке $w(\tau, w_0)$, $w_0 \in M_2$. Отметим, что уравнение поверхности Σ_0 можно записать в виде

$$\Sigma_0: w = w(\tau, w_0), \quad \tau \in (-\infty; 0), \quad w_0 \in M_2$$

Для фиксированного $(\tau_0, w_0) \in (-\infty; 0)$, $w_0 \in M_2$ из равенства

$$\max_{v \in Q} |(m(\tau_0, w_0), -u + v)| = |(m(\tau_0, w_0), -u + v(u))|, \quad v(u) \in P \quad (2.9)$$

определим функцию $v(u)$, $u \in P$, так, что для произвольной измеримой функции $u(t)$, $a \leq t \leq b$, $u(t) \in P$ функция $v(u(t))$, $a \leq t \leq b$, будет измеримой.

Лемма 2. Пусть

$$z_0 = w(\tau_0, w_0) \in \Sigma, \quad (m(\tau_0, w_0), Q) = \{0\} \quad (2.10)$$

где $\Sigma = \Sigma_1$ или $\Sigma = \Sigma_0$. Тогда для любой измеримой функции $u(\cdot): [0; t_0] \rightarrow P$ ($t_0 > 0$) решение $z(t, z_0, u(\cdot))$ уравнения

$$\dot{z} = Cz - u + v(u) + a, \quad z(0) = z_0$$

"сойдет" с поверхности Σ , т.е. существует момент времени $t_1 \in (0; t_2]$, такой, что $z(t_1, z_0, u(\cdot)) \notin \Sigma$.

Доказательство. Предположим, что существует такая измеримая функция $u_0(\cdot): [0; t_0] \rightarrow P$, что

$$z(t, z_0, u_0(\cdot)) \in \Sigma, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (2.11)$$

В силу непрерывности вектор-функции $m(\tau, w)$, $-\infty < \tau < \infty$, $w \in M_1$, из соотношений (2.9)–(2.11) следует существование числа $\varepsilon > 0$, такого, что

$$\min_{u \in P} |(m(\tau, w), -u + v(u))| > 0 \quad \text{при} \quad |\tau - \tau_0| < \varepsilon, \quad |w - w_0| < \varepsilon \quad (2.12)$$

Далее, из включения (2.10) вытекает, что

$$z(t, z_0, u_0(\cdot)) \in \{w(\tau, w_1): |\tau - \tau_0| < \varepsilon, w_1 \in w_0(\varepsilon)\}, \quad 0 \leq t \leq t_2 \quad (2.13)$$

$$w_0(\varepsilon) = \{w \in M_1 \setminus M_2: |w - w_0| < \varepsilon\} \quad \text{при} \quad \Sigma = \Sigma_1$$

$$w_0(\varepsilon) = \{w \in M_2: |w - w_0| < \varepsilon\} \quad \text{при} \quad \Sigma = \Sigma_0$$

где t_2 – достаточно малое положительное число.

Через $h = h(z(t, z_0, u_0(\cdot)))$ обозначим нормаль к поверхности Σ в точке $z = z(t, z_0, u_0(\cdot)) \in \Sigma$. Тогда (см. (2.13))

$$h \in \{m(\tau, w) : |\tau - \tau_0| < \varepsilon, w \in w_0(\varepsilon)\}, \quad 0 \leq t \leq t_2 \quad (2.14)$$

Из соотношений (2.8) и (2.11) следует равенство

$$(Cz + a, h) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_2$$

Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} (\dot{z}, h) &= (Cz - u_0(t) + v(u_0(t)) + a, h) = \\ &= (-u_0(t) + v(u_0(t)), h) = 0 \end{aligned}$$

почти всюду на $[0; t_2]$. Последнее равенство противоречит неравенству (2.12) (см. включение (2.14)).

3. Доказательство теоремы. Пусть в момент времени $t = 0$ объект z находится в точке z_0 , т.е. $z(0) = z_0$. Положим $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ (см. лемму 2). Возможны два случая.

А. Если решение $z(t, z_0)$, $t \geq 0$, уравнения

$$\dot{z} = Cz + a, \quad z(0) = z_0 \quad (3.1)$$

никогда не достигнут множества M , то положим $v = v(u) = u$. Тогда, очевидно, объект z никогда не достигнет множества M .

Б. Пусть решение $z(t, z_0)$, $t \geq 0$, уравнения (3.1) достигнут множества M в некоторый момент времени $t = t_0$, $t_0 > 0$ (не ограничивая общности, можно считать, что $z(t, z_0) \notin M$, $0 \leq t \leq t_0$). Положим $z(t_0, z_0) = w_0$. Тогда очевидно, что $w_0 \in M$, траектории $z(t, z_0)$, $0 \leq t \leq t_0$ и $w(\tau, w_0)$, $-t \leq \tau \leq 0$, совпадают: $z(t, z_0) = w(t - t_0, w_0)$, где $w(\tau, w_0)$ – решение уравнения

$$\dot{w}(\tau) = Cw(\tau) + a, \quad w(0) = w_0$$

Предположим, что

$$(m(\tau, w_0), Q) \equiv \{0\}, \quad -t_0 \leq \tau < 0$$

Тогда (см. (2.6))

$$\{0\} = (m(\tau, w_0), Q) = ((e^{-\tau C})^T n(w_0), Q) = (n(w_0), e^{-\tau C} Q) = (n(w_0), \pi e^{-\tau C} Q), \quad -t_0 \leq \tau < 0$$

Отсюда, учитывая включение $n(w_0) \in W$, заключаем, что множества $\pi e^{-\tau C} Q$ лежат в одномерном подпространстве $W_1 \in W$ при всех $\tau \in [-t_0, 0)$, что противоречит условию вращаемости. Значит, существует такое число τ_0 , $\tau_0 \in [-t_0, 0)$, что $(m(\tau_0, w_0), Q) \neq \{0\}$. На отрезке времени $[0; t_0 + \tau_0]$ положим $v(t) = u(t)$. Тогда

$$z(t) = w(t - t_0, w_0) \notin M, \quad 0 \leq t \leq t_0 + \tau_0$$

Поэтому, не ограничивая общности, считаем, что $\tau_0 = -t_0$, т.е.

$$(m(-t_0, w_0), Q) = (m(\tau_0, w_0), Q) \neq \{0\}$$

Положим $z_0(\sigma) = \{z \in R^n : |z - z_0| < \sigma\}$. Выберем число σ так, что

1) $z_0(\sigma) \cap M = \emptyset$, 2) $z_0(\sigma) \cap \Sigma_0 = \emptyset$, если $z_0 \in \Sigma_1$.

Можно убедиться в возможности такого выбора σ . Далее из равенства (2.9) определим функцию $v = v_0(u)$, $u \in P$.

Фиксируем положительное число ε так, чтобы для произвольной измеримой функции $u(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, $u(t) \in P$ выполнялось включение $z \in z_0(\sigma)$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, где $z = z(t, z_0, u(\cdot))$, $v_0(u(\cdot))$ – решение уравнения

$$\dot{z} = Cz - u(t) + v_0(u(t)) + a, \quad z(0) = z_0$$

Очевидно, что такое число ε_0 существует.

Пусть преследующий выбирает произвольное управление $u = u(t)$, $t \geq 0$. Положим

$$v(t) = v_0(u(t)), \quad t \geq 0$$

Тогда в силу леммы 2 существует такое число t_1 , $0 < t_1 < \varepsilon$, что

$$z(t_1, z_0, u(\cdot), v_0(u(\cdot))) \in \Sigma_m$$

если $z_0 \in \Sigma_m$, $m = 0, 1$.

Более того, если $z_0 \in \Sigma_1$, то в силу выбора чисел σ и ε имеем

$$z(t_1, z_0, u(\cdot), v_0(u(\cdot))) \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma$$

Значит, если $z_0 \in \Sigma_0$, то на достаточно малом отрезке времени можем добиться того, что $z(t_1) \in \Sigma_0$. Если при этом окажется, что $z(t_1) \in \Sigma_1$, то аналогичным образом добьемся, чтобы

$$z(t_2) \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma$$

При этом $z(t) \in M$ при всех $t \in [0; t_2]$.

При $t \geq t_2$ положим $v = v(u) = u$ и точка z , двигаясь в соответствии с соотношением (2.3), не попадет на множество M .

Теорема доказана.

4. Пример. В игре (1.1) $n \geq 2$, множества P , Q и M имеют вид

$$P = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n : |x_i| \leq 1/\sqrt{n}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$Q = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

$$M = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n : x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0\}$$

($M = \{0\}$ при $n = 2$). Тогда, очевидно, множество $e^{tC}Q$ – тело в R^n , $pe^{tC}Q$ содержит внутреннюю точку как двумерное тело, т.е. условие вращаемости выполнено. Кроме того, $P \subset Q$ и $\mu = 1$. В то же время условия Л.С. Понтрягина [1] и работ [2–10] не выполняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189. № 4. С. 721–723.
2. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1971. Т. 112. Ч. 1. С. 30–63.
3. Gamkrelidze R.V., Kharatishvili G.L. A differential game of evasion with nonlinear control // SIAM J. Control. 1974. V. 12. № 2. P. 332–349.
4. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. 1968. № 1. С. 65–78.
5. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. О квазилинейных дифференциальных играх убегания // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1046–1052.
6. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. К полному исследованию обобщенного контрольного примера Л.С. Понтрягина // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 3. С. 436–443.
7. Гусятников П.Б. Дифференциальная игра убегания // Кибернетика. 1978. № 4. С. 72–77.
8. Никольский М.С. О линейной задаче убегания // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1024–1027.
9. Никольский М.С. О квазилинейной задаче убегания // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 539–542.
10. Сатимов Н.Ю. Об одном способе уклонения от встречи в дифференциальных играх // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141). № 3. С. 380–393.

Ташкент
e-mail: root.im @ tashkent.su

Поступила в редакцию
8.XII.2000