

УДК 62.50

© 2002 г. Д.А. Вагин, Н.Н. Петров

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Получены необходимые и достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в задаче простого преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы многогранного множества.

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–8]¹. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы – преследователи и убегающие. Цель группы преследователей – поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих – противоположна [6–14].

Были получены [13] достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в дифференциальной игре со многими преследователями и убегающими при условии, что убегающие используют одно и то же управление. Рассмотрен [14] один частный случай указанной задачи. Для задачи простого преследования получены [15] необходимые и достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего при условии, что убегающие используют одно и то же управление, при этом фазовые ограничения отсутствуют.

В данной работе получены условия поимки хотя бы одного убегающего в задаче простого группового преследования при условии, что убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого многогранного множества.

1. Постановка задачи. В пространстве $R^k (k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей и m убегающих. Законы движения каждого из преследователей P_i (с управлением u_i) и каждого из убегающих E_j (с управлением v) имеют вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leq 1; \quad \dot{y}_j = v, \quad \|v\| \leq 1; \quad x_i, y_j, u_i, v \in R^k \quad (1.1)$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_i^0, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad \text{причем} \quad x_i^0 \neq y_j^0 \quad (1.2)$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено специально, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

Дополнительно предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого многогранного множества

$$D = \{y : y \in R^k, \quad (p_s, y) \leq \mu_s, \quad s = 1, \dots, r\}$$

где $p_1, \dots, p_r$ – единичные векторы, $\mu_1, \dots, \mu_r$ – вещественные числа, такие, что $\text{Int } D \neq \emptyset$.

Пусть $T > 0$ и σ – некоторое конечное разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_q < t_{q+1} = T$$

отрезка $[0, T]$.

¹ См. также: Петров Н.Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений. Л., 1984. 16 с. – Деп. в ВИНТИ 27.03.84, № 1684-84.

Определение 1. Кусочно-программной стратегией V убегающих E_j , соответствующей разбиению σ , будем называть семейство отображений $c^l (l = 0, 1, \dots, q)$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_i(t_l), y_j(t_l), \min_{t \in [0, t_l]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|) \quad (1.3)$$

измеримую функцию $u(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что

$$\|u(t)\| \leq 1, \quad y_j(t) \in D, \quad t \in [t_l, t_{l+1})$$

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который по величинам (1.3) для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $u(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 2. Кусочно-программной контрстратегией U_i преследователя P_i , соответствующей разбиению σ , будем называть семейство отображений $b_i^l (l = 0, 1, \dots, q)$, ставящих в соответствие величинам (1.3) и управлению $u(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$ измеримую функцию $u_i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что

$$\|u_i(t)\| \leq 1, \quad t \in [t_l, t_{l+1})$$

Обозначим данную игру Γ .

Определение 3. В игре Γ происходит уклонение от встречи, если для любого $T > 0$ существуют разбиение σ отрезка $[0, T]$ и стратегия V убегающих E_j , такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ преследователей P_i

$$x_i(t) \neq y_i(t), \quad t \in [0, T]$$

Определение 4. В игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$ и для любой стратегии V убегающих E_j существуют кусочно-программные контрстратегии U_i преследователей P_i , момент $\tau \in [0, T]$ и номера $s \in \{1, 2, \dots, m\}$, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие, что

$$x_r(\tau) = y_s(\tau)$$

2. Вспомогательные результаты. **Определение 5** [16]. Векторы $a_1, a_2, \dots, a_s$ образуют положительный базис R^k , если для любого $x \in R^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s$$

Лемма 1. Пусть векторы $a_1, \dots, a_s$ образуют положительный базис. Тогда для любых векторов $b_l, b_{l+1}, \dots, b_s (1 \leq l \leq s)$ существует $\mu_0 > 0$, такое, что для всех $\mu > \mu_0$

$$a_1, \dots, a_{l-1}, b_l + \mu a_l, \dots, b_s + \mu a_s$$

образуют положительный базис.

Доказательство. Пусть лемма не верна. Тогда существуют векторы $b_l, \dots, b_s$ и последовательность $\mu_n \rightarrow \infty$, такие, что

$$a_1, \dots, a_{l-1}, b_l + \mu_n a_l, \dots, b_s + \mu_n a_s$$

не образуют положительный базис. Поэтому [16] существует последовательность $\{v_n\}$, $\|v_n\| = 1$, такая, что для всех n

$$(a_r, v_n) \leq 0, \quad r = 1, \dots, l-1; \quad (a_r + \mu_n^{-1} b_r, v_n) \leq 0, \quad r = l, \dots, s \quad (2.1)$$

В силу компактности единичной сферы можно считать, что $v_n \rightarrow v_0$, $\|v_0\| = 1$. Переходя в (2.1) к пределу, получаем $(a_r, v_0) \leq 0$, что противоречит положительности базиса [16].

Следствие. Пусть векторы $a_1, \dots, a_s$ образуют положительный базис. Тогда для любых векторов $b_l, b_{l+1}, \dots, b_s (1 \leq l \leq s)$ существует число $\mu_0 > 0$, такое, что для всех $\mu > \mu_0$ положительный базис образуют системы векторов

$$\{a_1, \dots, a_{l-1}, b_l + \mu a_l, \dots, b_s + \mu a_s\}, \quad \{a_1, \dots, a_{l-1}, a_{\alpha_0}, b_r + \mu a_r, r \neq \alpha_0, r = l, \dots, s\}$$

Пусть

$$\lambda(a, v) = [(a, v) + [(a, v)^2 + \|a\|^2 (1 - \|v\|^2)]^{1/2}] / \|a\|^2, \quad \beta(a, v) = (a, v)$$

Лемма 2. Пусть $1 < l \leq s$. Векторы $a_1, \dots, a_s$ образуют положительный базис тогда и только тогда, когда

$$\min_{\|v\| \leq 1} \max\{\lambda(a_1, v), \dots, \lambda(a_l, v), \beta(a_{l+1}, v), \dots, \beta(a_s, v)\} > 0$$

3. Решение задачи. Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$\dot{z}_{i,j} = u_i - v, \quad z_{i,j}(0) = z_{i,j}^0 = x_i^0 - y_j^0 \quad (3.1)$$

Обозначим через $\text{Int}X$, $\text{co}X$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества $X \subset R^k$.

Будем предполагать в дальнейшем, что выполнено следующее условие: любые k векторов из совокупности

$$\{x_i^0 - y_j^0, y_q^0 - y_r^0, q \neq r, p_1, \dots, p_r\}$$

линейно независимы и $y_j^0 \in \text{Int} D$.

Теорема 1. Пусть

$$0 \notin \text{Int co}\{x_i^0 - y_j^0, p_1, \dots, p_r\} \quad (3.2)$$

Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Из условия (3.2) следует, что существует единичный вектор v_0 , такой, что

$$(x_i^0 - y_j^0, v_0) \leq 0, \quad (p_s, v_0) \leq 0 \quad \text{для всех } i, j, s$$

Задаем стратегию V убегающих E_j следующим образом: $\sigma = \{0, \infty\}$, $v(t) = v_0$ для всех $t \geq 0$. Тогда $y_j(t) = y_j^0 + v_0 t$. Поэтому

$$(p_s, y_j(t)) = (p_s, y_j^0) + t(p_s, v_0) \leq \mu_s$$

Последнее означает, что убегающие не покидают пределы множества D . Кроме того,

$$\begin{aligned} \|x_i(t) - y_j(t)\| &= \|x_i^0 + \int_0^t u_i(\tau) d\tau - y_j^0 - v_0 t\| \geq \|x_i^0 - y_j^0 - v_0 t\| - t = \\ &= [\|x_i^0 - y_j^0\|^2 + t^2 - 2(x_i^0 - y_j^0, v_0)t]^{1/2} - t > 0 \quad \text{для всех } t > 0 \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $n \leq k - 1$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Пусть число

$$d = \min_{p,l} \|y_p^0 - y_l^0\|, \quad \varepsilon > 0 (\varepsilon < d/12)$$

такое, что для всех j

$$\{z : \|z - y_j^0\| \leq \varepsilon\} \subset D$$

Пусть

$$\delta_s = 3\varepsilon/(s+2), \quad J_\alpha(t_s) = \{i: \|y_\alpha(t_s) - x_i(t_s)\| \leq \delta_s\}$$

Покажем, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует не более одного множества $J_\alpha(t_s)$, такого, что $i \in J_\alpha(t_s)$.

Пусть $i \in J_\alpha(t_s) \cap J_\beta(t_s)$. Тогда

$$d \leq \|y_\alpha(t_s) - y_\beta(t_s)\| \leq \|y_\alpha(t_s) - x_i(t_s)\| + \|x_i(t_s) - y_\beta(t_s)\| \leq 2\delta_s < d$$

Задаем стратегию V убегающих E_j следующим образом:

$\sigma = \{t_s\}_{s=0}^\infty$, $t_0 = 0$, $t_{s+1} = t_s + \varepsilon/(s+2)$, $v(t) = v_s$ для всех $t \in [t_s, t_{s+1})$, где v_s , $\|v_s\| = 1$ удовлетворяет следующей системе:

$$(v_s, x_q(t_s) - y_j(t_s)) \leq 0, \quad q \in J_j(t_s), \quad (v_s, y_1(t_s) - y_1^0) \leq 0$$

Докажем, что данная стратегия гарантирует уклонение от встречи. Обозначим

$$\Delta_{ij}(t) = \|x_i(t) - y_j(t)\|$$

1°. Покажем, что $y_j(t) \neq x_i(t)$ для всех t . Пусть $t \in [t_s, t_{s+1})$. Тогда, если $i \in J_j(t_s)$, то $\Delta_{ij}(t) > 0$ в силу выбора v_s , а если $i \in J_j(t_s)$, то

$$\Delta_{ij}(t_s) > \delta_s, \quad \Delta_{ij}(t) \geq \Delta_{ij}(t_s) - 2(t - t_s) > \delta_s - 2(t_{s+1} - t_s) > 0$$

2°. Покажем, что $y_j(t) \in D$ для всех $t \in [t_s, t_{s+1})$. Условия

$$y_1(t) \in D, \quad \|y_1(t) - y_1^0\| \leq \varepsilon(s+1)/(s+2)$$

следуют из выбора v_s и ранее полученных результатов [17].

Так как

$$\|y_j(t) - y_j^0\| = \|y_1(t) - y_1^0\| \text{ для всех } t$$

то в силу выбора ε получаем, что $y_j(t) \in D$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $n \geq k$ и

$$0 \in \text{Intco}\{x_i^0 - y_j^0, p_1, \dots, p_r\} \quad (3.3)$$

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Доказательство. Если $r = 0$, то доказательство следует из полученных ранее результатов [16].

Пусть $r = 1$. Условие (3.3) означает, что векторы $\{x_i^0 - y_j^0, p_1\}$ образуют положительный базис. Рассмотрим минимальный положительный базис. В силу предположения и полученного ранее результата ([8], с. 109, теорема 1.7) минимальный положительный базис содержит $k + 1$ вектор. Если вектор p_1 не входит в минимальный положительный базис, то утверждение следует из полученных ранее результатов [15]. Пусть p_1 входит в минимальный положительный базис. Обозначим через I множество индексов $i \in \{1, \dots, n\}$, входящих в минимальный положительный базис. Пусть

$$J(i) = \{j \mid x_i^0 - y_j^0 \text{ входит в минимальный положительный базис}\}, \quad J = \bigcup_{i \in I} J(i)$$

Если $|J| = 1$, то утверждение теоремы следует из полученных ранее результатов [8].

Пусть $|J| \geq 2$. Считаем, что $I = \{1, \dots, q\}$, $J = \{1, \dots, l\}$.

Пусть, далее, $c_\alpha^\beta = y_\alpha^0 - y_\beta^0$. Тогда $z_{i\alpha}^0 = z_{i1}^0 + c_1^\alpha$ для всех i, α , $\alpha \neq 1$. Поэтому набор

$$\{z_{i1}^0, i \in I, c_1^\alpha, \alpha \in J, \alpha \neq 1, p_1\}$$

образует положительный базис. Можно считать, что данный базис является минимальным. Так как $n \geq k$, то $q < n$. Отсюда $q + \alpha - 1 \in \{q + 1, \dots, n\}$ для всех $\alpha \neq 1$, $\alpha \in J$.

В силу следующего набор

$$\{z_{i,1}^0, i \in I, z_{0^{q+\alpha-1,1}}^\alpha + \mu_\alpha^1, \alpha \neq 1, \alpha \in J, p_1\}$$

образует положительный базис при некотором $\mu > 1$. Задаем управления преследователей следующим образом ($t \in [0, T]$):

$$u_i'(t) = v(t) - \lambda(z_{i,1}^0, v(t))z_{i,1}^0, \quad i \in I$$

$$u^{q+\alpha-1}(t) = v(t) - \lambda(z_0^{q+\alpha-1,1} + \mu_\alpha^1, v(t))(z_0^{q+\alpha-1,1} + \mu_\alpha^1), \quad \alpha \in J, \quad \alpha \neq 1$$

Момент T будет указан ниже.

Из системы (3.1) имеем

$$z_{i,1}(t) = z_{i,1}^0 h_i(t), \quad i \in I \tag{3.4}$$

$$z_{q+\alpha-1,1}(t) + \mu_\alpha^1 = (z_0^{q+\alpha-1,1} + \mu_\alpha^1) h_{q+\alpha-1}^\alpha(t), \quad \alpha \in J, \quad \alpha \neq 1$$

где

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_{i,1}^0, v(\tau)) d\tau$$

$$h^{q+\alpha-1}(t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_0^{q+\alpha-1,1} + \mu_\alpha^1, v(\tau)) d\tau, \quad \alpha \neq 1, \quad \alpha \in J$$

Так как стратегия убегающих допустима, то $(p_1, y_j^i(t)) \leq \mu_1$ для всех $t > 0$. Отсюда

$$\int_0^t (p_1, v(\tau)) d\tau \leq \gamma; \quad \gamma = \max_j (\mu_1 - (p_1, y_j^0))$$

В силу леммы 2 величина

$$\delta = \min_{\|v\| \leq 1} \max \{ \lambda(z_{i,1}, v), i \in I, \lambda(z_0^{q+\alpha-1,1} + \mu_\alpha^1, v), \alpha \neq 1, \alpha \in J, (p_1, v) \}$$

положительна. Пусть $T_1(t), T_2(t) -$ два подмножества интервала $[0, t]$, такие, что

$$T_1(t) = \{ \tau \in [0, t], (p_1, v(\tau)) < \delta \}$$

$$T_2(t) = \{ \tau \in [0, t], (p_1, v(\tau)) \geq \delta \}$$

Тогда

$$\gamma \geq \int_0^t (p_1, v(\tau)) d\tau = \int_0^{T_1(t)} (p_1, v(\tau)) d\tau + \int_0^{T_2(t)} (p_1, v(\tau)) d\tau \geq \delta \mu(T_2(t)) - \mu(T_1(t))$$

С другой стороны, $\mu(T_2(t)) + \mu(T_1(t)) = t$ (μ — мера Лебега). Из последних двух соотношений следует, что

$$\mu(T_1(t)) \geq (t\delta - \gamma)/(1 + \delta)$$

Кроме того,

$$\sum_i h_i(t) = n - \int_0^t \sum_i \lambda_i(v(\tau)) d\tau \leq n - \int_0^t M(\tau) d\tau$$

где

$$M(\tau) = \max_i \lambda_i(v(\tau)), \lambda_i(v) = \lambda(z_{i,1}^0, v), \quad i \in I; \quad \lambda_{q+\alpha-1}(v) = \lambda(z_{q+\alpha-1,1}^0 + \mu c_1^\alpha, v),$$

$$\alpha \neq 1, \alpha \in J$$

Далее,

$$\int_0^t M(\tau) d\tau \geq \int_{T_1(t)} M(\tau) d\tau \geq \delta \mu(T_1(t)) \geq \delta \frac{t\delta - \gamma}{1 + \gamma}$$

Поэтому

$$\sum_i h_i(t) \leq n - \delta \frac{t\delta - \gamma}{1 + \gamma}$$

Из последнего неравенства следует, что существует момент T и номер r , такие, что $h_r(T) = 0$. Если $r \in I$, то $z_{r,1}(T) = 0$ и, следовательно, в игре Γ происходит поимка.

Если $h_{q+\alpha_0-1}(T) = 0$ при некотором $\alpha_0 \in J$, $\alpha_0 \neq 1$, то $z_{q+\alpha_0-1,1}(T) = -\mu c_1^{\alpha_0}$.

Справедливо включение

$$0 \in \text{Intco}\{x_i(T) - y_i(T), i \in I, j \in J, p_1\} \quad (3.5)$$

Действительно, из соотношений (3.4) имеем $z_{i1}^0 = z_{i1}(T)/h_i(T)$. Кроме того,

$$z_{i\alpha}(T) = z_{i1}(T) + c_1^\alpha = z_{i1}(T) + z_{i\alpha}^0 - z_{i1}^0 \text{ для всех } \alpha \in J, \alpha \neq 1$$

Поэтому

$$z_{i\alpha}^0 = z_{i\alpha}(T) - z_{i1}(T) + z_{i1}^0 = z_{i\alpha}(T) + \frac{1 - h_i(T)}{h_i(T)} z_{i1}(T) \text{ для всех } \alpha \in J, \alpha \neq 1$$

По условию система $\{z_{ij}^0, i \in I, j \in J, p_1\}$ образует положительный базис. Поэтому положительный базис образует и система

$$\left\{ \frac{z_{i1}(T)}{h_i(T)}, z_{i\alpha}(T) + \frac{1 - h_i(T)}{h_i(T)} z_{i1}(T), \alpha \in I \setminus \{1\}, p_1 \right\}$$

Так как $h_i(T) \in (0, 1]$, то положительный базис образует система векторов $\{z_{ij}(T), i \in I, j \in J, p_1\}$. Отсюда следует включение (3.5).

Так как

$$x_i(T) - y_1(T) = x_i(T) - y_{\alpha_0}(T) + \Delta(T), \quad \Delta(T) = y_{\alpha_0}(T) - y_1(T)$$

то положительный базис образует набор

$$\{x_i(T) - y_{\alpha_0}(T), \Delta(T), x_i(T) - y_i(T), i \in I, j \in J \setminus \{1\}, p_1\} \quad (3.6)$$

Из условия $z_{q+\alpha_0-1,1}(T) = -\mu c_1^{\alpha_0}$ следует, что

$$x_{q+\alpha_0-1}(T) - y_{\alpha_0}(T) = x_{q+\alpha_0-1}(T) - y_1(T) - \Delta(T) = (\mu - 1)(y_{\alpha_0}^0 - y_1^0)$$

Отметим, что $\Delta(T) = y_{\alpha_0}^0 - y_1^0$.

Заменяя в системе (3.6) вектор $\Delta(T)$ вектором $x_{q+\alpha_0-1}(T) - y_{\alpha_0}(T)$, получаем, что

положительный базис образует получающийся при этом набор. Поэтому

$$0 \in \text{Intco}\{x_i(T) - y_j(T), j \neq 1, p_1\}$$

Принимая момент T за начальный, получаем игру, в которой участвует уже $m - 1$ убегающих. Продолжая данный процесс дальше, получим, что существует момент T_0 , такой, что

$$0 \in \text{Intco}\{x_i(T_0) - y_s(T_0), p_1\}$$

при некотором s . Теперь поимка следует из известных результатов [8].

Пусть теперь число $r > 1$ произвольно. Так как векторы

$$\{x_i^0 - y_j^0, p_1, \dots, p_r\}$$

образуют положительный базис, то существуют положительные числа α_{ij}, β_s , такие, что

$$0 = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(x_i^0 - y_j^0) + \sum_s \beta_s p_s \quad (3.7)$$

Рассмотрим вектор

$$p_0 = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r$$

Покажем, что

$$\{x_i^0 - y_j^0, p_0\} \quad (3.8)$$

образуют положительный базис, если $p_0 \neq 0$, и положительный базис образуют

$$\{x_i^0 - y_j^0\}, \text{ если } p_0 = 0.$$

Пусть $p_0 \neq 0$, $x \in R^k$. В силу предположения любые k векторов из совокупности $\{x_i^0 - y_j^0\}$ линейно независимы. Поэтому существуют вещественные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ и векторы $b_1, \dots, b_k$ из набора $\{x_i^0 - y_j^0\}$, такие, что

$$x = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_k b_k.$$

В силу соотношения (3.7) получаем

$$x = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_k b_k + d \left(\sum_{i,j} \alpha_{ij}(x_i^0 - y_j^0) + \sum_s \beta_s p_s \right) = d p_0 + \sum_{i,j} \alpha_{ij}^0 (x_i^0 - y_j^0) \quad (3.9)$$

Взяв число d положительным и достаточно большим, получим, что все коэффициенты в правой части равенства (3.9) положительны. Последнее и означает, что векторы (3.8) образуют положительный базис.

Случай $p_0 = 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00454) и конкурсного центра Минобразования России (Е00-1.0-5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.

3. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989. 232 с.
4. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
7. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
8. Петров Н.Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. 196 с.
9. Петров Н.Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре "казаки – разбойники" // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
10. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 725–726.
11. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 12–21.
12. Чикрий А.А., Прокопович П.В. О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов // Кибернетика. 1989. № 5. С. 59–63.
13. Сатимов Н., Маматов М.Ш. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Докл. АН Узб ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
14. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89–95.
15. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
16. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
17. Иванов Р.П. Простое преследование–убегание на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1318–1321.

Ижевск
e-mail: npetrov @ udmnet. ru

Поступила в редакцию
15.VII.2001