

УДК 62–50

© 2002 г. В.А. Вахрушев, В.Н. Ушаков

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕДУР УПРАВЛЕНИЯ С ПОВОДЫРЕМ

Рассматриваются позиционные дифференциальные игры сближения с целью для конфликтно-управляемых систем, нелинейных по фазовому вектору. Изучаются задачи приближенного построения множества позиционного поглощения, а также задачи построения процедур управления, гарантирующих наведение на цель. Исследуются вопросы, связанные с разработкой алгоритмов приближенного построения множества позиционного поглощения и процедур управления с поводырем [1–4]. В качестве примера, на котором проиллюстрированы возможности рассматриваемых алгоритмов, приведена игра преследования на плоскости "шофер–убийца" [5]. Для этой игры для нескольких наборов параметров вычислены приближенно множества позиционного поглощения в задаче сближения на фиксированном промежутке времени. Для нескольких конкретных начальных значений фазового вектора конфликтно-управляемой системы и нескольких вариантов выбора управления убегающего вычислены движения системы, порожденные процедурой управления с поводырем.

Работа примыкает к исследованиям [1–14]¹.

1. Постановка задачи. Пусть конфликтно-управляемая система описывается на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ векторным дифференциальным уравнением

$$dx/dt = F(t, x; u, v) \quad (1.1)$$

$$F(t, x; u, v) = f(t, x) + B(t, x)u + C(t, x)v; u \in P, v \in Q$$

Здесь x – фазовый вектор системы, содержащийся в евклидовом пространстве R^m , u, v – векторы управляющих воздействий первого и второго игроков, удовлетворяющие указанным включениям, где P и Q – выпуклые компактные многогранники с конечным числом вершин, содержащиеся в евклидовых пространствах R^p и R^q соответственно.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

А. Функции $f(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных (t, x) в области $[t_0, \vartheta] \times R^m$, а также для любой ограниченной замкнутой области D ($D \subset [t_0, \vartheta] \times R^m$) существуют постоянные Липшица $L_\zeta = L_\zeta(D)$ ($\zeta = f, B, C$) из $(0, \infty)$, такие, что

$$\|\zeta(t, x^{(1)}) - \zeta(t, x^{(2)})\| \leq L_\zeta \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad \zeta = f, B, C \quad (1.2)$$

при любых $(t, x^{(i)}) \in D$, $(i = 1, 2)$.

Б. Существует такая постоянная $\tilde{\kappa}$ из $(0, \infty)$, что при всевозможных значениях $(t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times R^m \times P \times Q$ выполняется неравенство

$$\|F(t, x; u, v)\| \leq \tilde{\kappa}(1 + \|x\|) \quad (1.3)$$

¹ См. также: Гусятников П.Б. Задача преследования и убегания в теории дифференциальных игр: Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Свердловск, 1981. 46 с.

Задача о сближении, стоящая перед первым игроком, рассматривается в двух вариантах.

1°. Построить позиционный способ управления, гарантирующий попадание движения $x(t)$ системы (1.1) в момент времени ϑ на заданное компактное целевое множество M , содержащееся в пространстве R^m .

2°. Построить позиционный способ управления, гарантирующий попадание движения $x(t)$ системы (1.1) на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ на заданное компактное целевое множество M , содержащееся в пространстве R^m .

2. Построение множества позиционного поглощения. Рассматриваемые далее позиционные способы управления, разрешающие задачу о сближении, представляют собой позиционные процедуры управления с поводырем. При построении управлений в процедурах управления с поводырем существенно используется информация о множестве позиционного поглощения. Известно, что множество позиционного поглощения можно определить на основе попятных процедур [1].

Определение 1.1. Оператором u -стабильного поглощения $\pi(t_*; t^*, W^*)$ ($t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$, $W^* \subset R^m$) назовем отображение $\pi(t_*; t^*, \cdot): 2^{R^m} \rightarrow 2^{R^m}$, заданное соотношением

$$\pi(t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{v \in Q} X_v(t_*; t^*, W^*)$$

$$X_v(t_*; t^*, W^*) = \{x_* \in R^m : W^* \cap X_v(t^*; t_*, x_*) \neq \emptyset\}$$

$X_v(t^*; t_*, x_*)$ – множество в R^m всех точек, в которые в момент t^* приходят решения

$$x(\cdot) = (x(t): t_* \leq t \leq t^*, x(t_*) = x_*)$$

дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_v(t, x), F_v(t, x) = F(t, x; P, v)$$

$$B(t, x)P = \{B(t, x)u: u \in P\}$$

Множество позиционного поглощения W^0 для задачи сближения 1° можно определить [1,3] как наибольшее из замкнутых множеств $W \subset [t_0, \vartheta] \times R^m$, удовлетворяющих соотношениям

$$W(\vartheta) \subset M, W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*))$$

$$(W(t) = \{x \in R^m: (t, x) \in W\})$$

для любых t_*, t^* ($t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$).

Согласно определению W^0 – множество всех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times R^m$, из которых разрешима задача сближения 1°. Вычислить такое множество точно в пространстве позиций можно только для простейших классов систем (1.1).

Для общего случая систем (1.1) разработаны попятные алгоритмы приближенного построения множества W^0 . Это дискретные по времени алгоритмы вычисления в пространстве R^m некоторой системы множеств, аппроксимирующей множество W^0 .

Понятие аппроксимирующей системы множеств возникает при замене непрерывной схемы u -стабильности дискретной схемой. Вводится разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_N = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и замена областей достижимости $X_v(t^*; t_*, x_*)$ их линейными по времени приближениями.

Определение 1.2. Аппроксимирующим оператором u -стабильного поглощения $\tilde{\pi}(t_*; t^*, W^*)$ ($t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$, $W^* \subset R^m$) назовем отображение $\tilde{\pi}(t_*; t^*, \cdot): 2^{R^m} \rightarrow 2^{R^m}$, заданное соотношением

$$\tilde{\pi}(t_*; t^*, W^*) = \bigcap_{v \in Q} \tilde{X}_v(t_*; t^*, W^*)$$

$$\tilde{X}_v(t_*; t^*, W^*) = \{x_* \in R^m : W^* \cap \tilde{X}_v(t_*; t^*, x_*) \neq \emptyset\}$$

$$\tilde{X}_v(t^*; t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F_v(t_*, x_*)$$

где

$$(t^* - t_*)F_v(t_*, x_*) = \{a \in R^m : a = (t^* - t_*)b, b \in F_v(t_*, x_*)\}$$

Аппроксимирующая система множеств (АСМ) определяется исходя из понятия аппроксимирующего оператора u -стабильного поглощения. Но прежде чем приступить к непосредственному определению АСМ, введем некоторые вспомогательные величины

$$\omega_\zeta(\Delta) = \sup_{(t,x):(t,x) \in D, (t+\Delta, x) \in D} \|\zeta(t+\Delta, x) - \zeta(t, x)\|$$

$$K = \sup_{(t,x,u,v) \in D \times P \times Q} \|F(t, x; u, v)\|$$

$$K_1 = \max_{u \in P} \|u\|, \quad K_2 = \max_{v \in Q} \|v\|, \quad K, K_1, K_2 \in [0, \infty)$$

$$\omega^*(\Delta) = \omega_f(\Delta) + K_1\omega_B(\Delta) + K_2\omega_C(\Delta)$$

$$\lambda^* = L_f + K_1L_B + K_2L_C \in [0, \infty)$$

$$\Omega^*(\delta, r) = \omega^*(\delta) + \lambda^*r, \quad \delta \geq 0, r \geq 0$$

$$\lambda = K\lambda^*, \quad \kappa(\Delta) = \omega^*(\Delta) + \lambda\Delta \quad (\Delta \geq 0)$$

Полагая $\rho(F_*, F^*)$ – хаусдорфово расстояние между F_* и F^* , получим, что в рассматриваемой задаче выполняются условия:

$$\rho(F_v(t, x^*), F_v(t, x_*)) \leq \lambda^* \|x^* - x_*\|$$

для любых (t, x_*) , (t, x^*) из D , $v \in Q$ и условия

$$\rho(F_v(t^*, x^*), F_v(t_*, x_*)) \leq \Omega^*(\|t^* - t_*\|, \|x^* - x_*\|)$$

для любых (t_*, x_*) , (t^*, x^*) из D , $v \in Q$. Поэтому согласно схеме из работы [4] можно корректно определить АСМ.

Определение 1.3. Аппроксимирующей системой множеств $\{\tilde{W}(t_i) : t_i \in \Gamma\}$ назовем систему, для которой

$$\tilde{W}(t_N) = M_{\varepsilon_N}, \quad \tilde{W}(t_i) = \tilde{\pi}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1})), \quad i = N-1, \dots, 0$$

где число ε_N находится из рекуррентных соотношений

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda^* \Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i, t_i \in \Gamma; \omega(\Delta) = \Delta\Omega^*(\Delta, K\Delta) = \Delta\omega^*(\Delta) + \lambda^*K\Delta^2$$

Символ Φ_ε означает замкнутую ε -окрестность множества Φ .

Согласно теореме 1 из работы [4], АСМ $\{\tilde{W}(t_i): t_i \in \Gamma\}$ сходится при диаметре разбиения $\Delta(\Gamma) \rightarrow 0$ к множеству позиционного поглощения W^0 . Следовательно, множество W^0 можно вычислять приближенно как систему множеств $\{\tilde{W}(t_i): t_i \in \Gamma\}$. Кроме того, рассматривая некоторую достаточно мелкую сеть $S^{(u)} = \{u_\gamma: u_\gamma \in \partial P, \gamma = 1, \dots, k\}$, удовлетворяющую равенству $\text{co}S^{(u)} = P$, а также $S^{(v)} = \{u_\omega: u_\omega \in \partial Q, \omega = 1, \dots, n\}$, $\text{co}S^{(v)} = Q$, вершин многогранника Q , получаем [4], что множества $\tilde{W}(t_i) (i = N, \dots, 0)$ можно вычислять приближенно по формулам

$$\tilde{W}(t_N) = \tilde{M}, \quad \tilde{W}(t_i) = \bigcap_{\omega=1}^n \bigcup_{\gamma=1}^k \tilde{X}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1})) \quad (2.1)$$

$$i = N-1, \dots, 0$$

Здесь

$$\tilde{X}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1})) = \{x[t_i]: \tilde{W}(t_{i+1}) \cap \tilde{X}_{\omega,\gamma}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset\}$$

$$\tilde{X}_{\omega,\gamma}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) = x[t_i] + \Delta_i F(t_i, x[t_i]; u_\gamma, v_\omega)$$

$\tilde{M}$ – многогранник в R^m с конечным числом вершин, аппроксимирующий целевое множество M .

Известно, что если множество $\tilde{W}(t_{i+1})$ – многогранник с конечным числом вершин, то множество $\tilde{X}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1}))$ будет с известной степенью точности многогранником в R^m , имеющим то же самое число вершин. Вершины многогранника $\tilde{X}_{\omega,\gamma}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1}))$ вычисляются по вершинам $x[t_{i+1}]$ многогранника $\tilde{W}(t_{i+1})$ из уравнения

$$x + \Delta_i F(t_i, x; u_\gamma, v_\omega) = x[t_{i+1}]$$

Решение этого уравнения может быть найдено методом последовательных итераций сколь угодно точно в случае, когда значения Δ_i достаточно малы. В некоторых же случаях, как, например, в случае модельной задачи "шофер–убийца", оно находится точно.

Таким образом, входящие в соотношения (2.1) множества $\tilde{W}(t_i)$ представляют собой конечное пересечение конечных объединений невыпуклых, вообще говоря, многогранников в пространстве R^m , имеющих конечное число вершин. Вычисление объединений и пересечений таких многогранников для случая пространства R^2 осуществляется для различных конкретных задач на основе алгоритмов, разработанных ранее [14].

Конструкция приближения множества позиционного поглощения аппроксимирующими системами множеств разработана и для задачи сближения 2° [4]². Она аналогична конструкции, представленной выше для задачи сближения 1°. В ней также основным элементом приближенного вычисления множества позиционного поглощения является процедура вычисления объединений и пересечений многогранников с конечным числом вершин в евклидовом пространстве.

Так, в случае, когда множество M представимо в виде объединения шаров, радиусы которых ограничены снизу некоторым положительным числом R^* , систему множеств, аппроксимирующую множество позиционного поглощения в задаче сближения 2°,

² См. также: Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения – уклонения. Свердловск, 1983. 60 с. – Деп. в ВИНТИ 5.05.83. № 2454-83.

можно задать соотношениями

$$\tilde{W}(t_N) = \tilde{M}_{\varepsilon_N}, \tilde{W}(t_i) = \tilde{\pi}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1}) \cup M_{\varepsilon_{i+1}})$$

$$i = N - 1, N - 2, \dots, 0,$$

где $\{\varepsilon_i\}$ – некоторая последовательность чисел, таких, что $\varepsilon_0 = 0$ и $\max_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_i \rightarrow 0$ при $\Delta(\Gamma) \rightarrow 0$.

Так же, как и в случае задачи сближения 1°, множества $\tilde{W}(t_i)$ ($i = 0, \dots, N$) можно вычислять приближенно по формулам

$$\tilde{W}(t_N) = \tilde{M}, \tilde{W}(t_i) = \bigcap_{\omega=1}^n \bigcup_{\gamma=1}^k \tilde{X}_{\omega, \gamma}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1}) \cup \tilde{M})$$

$$i = N - 1, N - 2, \dots, 0$$

$$\tilde{X}_{\omega, \gamma}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}(t_{i+1})) = \{x[t_i] \in R^m : (\tilde{W}(t_{i+1}) \cup \tilde{M}) \cap \tilde{X}_{\omega, \gamma}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset\}$$

$\tilde{M}$ – многогранник, аппроксимирующий целевое множество M .

Как и в случае задачи сближения 1°, процедура вычисления множеств $\tilde{W}(t_i)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) может быть осуществлена для конкретных задач сближения 2° на плоскости R^2 . Например, ниже рассматривается задача преследования "шофер–убийца". К решению этой задачи можно подойти, решая задачу сближения 2° для соответствующей конфликтно-управляемой системы на различных промежутках времени $[t_0, T]$. Решение же задачи сближения на фиксированном промежутке времени $[t_0, T]$ можно осуществить, по крайней мере приближенно, с помощью аппроксимирующих конструкций в задаче сближения 2°, которые были рассмотрены выше.

3. Процедуры управления. При решении задач сближения удобным позиционным способом управления является позиционная процедура управления с поводырем [1, 2]. Одно из положительных свойств этих процедур управления – устойчивость порождаемых ими движений по отношению к малым возмущениям фазового вектора системы. Другое положительное свойство – простота их реализации на ЭВМ, по крайней мере, для систем вида (1.1) на плоскости. Наиболее трудный момент реализации процедуры управления с поводырем, заключающийся в вычислении пересечения пучка движений с сечением моста, в случае плоскости может быть реализован с помощью упомянутых выше процедур пересечения многогранников (см. [14]).

В этом разделе рассматриваются позиционные процедуры управления с поводырем, в которых соответствующие управления в реальном движении и поводыре выбираются на основе идеи копирования [6, 7]. При этом управление второго игрока в поводыре выбирается на основе копирования с запаздыванием.

Рассмотрим задачу сближения 1°. Разрешающий позиционный способ управления будем строить как позиционную процедуру управления с поводырем первого игрока. Без ограничения общности будем считать, что известна ограниченная область D , в которой должны содержаться движения, порожденные процедурой управления с поводырем и приходящие в некоторую ε -окрестность цели M . В последующих рассуждениях фигурирует именно эта область D .

Оговоримся заранее, что вспомогательное движение поводыря строится как движение, проходящее через систему множеств, аппроксимирующих множество позиционного поглощения. В связи с этим разрешающая процедура управления, о которой пойдет речь ниже, будет приводить реальное движение системы (1.1) не точно на цель M , а в некоторую ее ε -окрестность. Величина ε зависит от диаметра $\Delta(\Gamma)$ разбиения Γ , на котором рассматривается АСМ, и $\varepsilon \rightarrow 0$, когда $\Delta(\Gamma) \rightarrow 0$.

Итак, полагая, что задана АСМ $\{\tilde{W}(t_i): t_i \in \Gamma\}$ ([4]), определим позиционную процедуру управления с поводырем первого игрока, отвечающую разбиению Γ .

Введем обозначения

$$Y_k(t) = (t - t_k)F(t_k, y[t_k]; u_*^k, v_*^k)$$

$$X_k(t) = \int_{t_k}^t F(\tau, x[\tau]; u^k, v(\tau)) d\tau$$

$$H^k = \Delta F(t_k, x[t_k]; u^k, v^k) + h^k$$

$$h^k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (F(\tau, x[\tau]; u^k, v^k) - F(t_k, x[t_k]; u^k, v^k)) d\tau$$

$$v^k = \frac{1}{\Delta} \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(\tau) d\tau$$

$$z_k = \|y[t_k] - x[t_k]\|, k = 0, \dots, N-1$$

$$\varphi(\Delta) = K_2(\vartheta - t_0)\omega_C(\Delta) + L_C K K_2(\vartheta - t_0)\Delta + 2(\vartheta - t_0)\Delta \kappa(\Delta) +$$

$$+\Delta \|C(t_0, x[t_0])v_*^0\| + \Delta K K_2 + (\vartheta - t_0)\kappa(\Delta)$$

Пусть $x[t_0]$ – некоторая точка из R^m . Находим в множестве $\tilde{W}(t_0)$ точку $y[t_0]$, ближайшую к $x[t_0]$.

На промежутке $[t_0, t_1)$ задаем в поводыре управление второго игрока как некоторый вектор $v_*^0 \in Q$, а управление первого игрока – вектор $u_*^0 \in P$ находим из условия $y[t_1] \in \tilde{W}(t_1)$, где $y[t] = y[t_0] + Y_0[t]$.

Вектор-функцию $y[t]$ на $[t_0, t_1]$ назовем движением поводыря.

На промежутке $[t_0, t_1)$ в реальной системе управление первого игрока – вектор $u^0 \in P$ определяем равенством $u^0 = u_*^0$. Считаем, что на промежутке $[t_0, t_1)$ в реальной системе реализуется какое-то измеримое управление $v(t) \in Q, t \in [t_0, t_1)$. Тогда движение реальной системы на $[t_0, t_1]$ удовлетворяет равенству

$$x[t] = x[t_0] + X_0[t]$$

Очевидно, что имеет место представление

$$x[t_1] = x[t_0] + H^0$$

Справедливо неравенство $\|h^0\| \leq \Delta \kappa(\Delta)$.

Далее, по индукции считая, что на промежутке $[t_{k-1}, t_k)$ ($1 \leq k \leq N-1$) заданы управления $u_*^{k-1}, v_*^{k-1}, u^{k-1}, v^{k-1}(\cdot)$, а также движения поводыря и реальной системы $y[\cdot]$ ($y[t_k] \in \tilde{W}(t_k)$), $x[\cdot]$ на $[t_{k-1}, t_k]$, порожденные этими управлениями, определяем управления, движения поводыря и реальной системы $y[\cdot], x[\cdot]$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ следующим образом.

Вектор $v_*^k \in Q$ находим из условия

$$\|x[t_k] - x[t_{k-1}] - \Delta F(t_{k-1}, x[t_{k-1}]; u^{k-1}, v_*^k)\| \leq \Delta \kappa(\Delta)$$

Выполняется неравенство

$$\|\Delta C(t_{k-1}, x[t_{k-1}])v_*^k - \Delta C(t_{k-1}, x[t_{k-1}])v^{k-1}\| \leq 2\Delta \kappa(\Delta)$$

Вектор $u_*^k \in P$ определяем из условия $y[t_{k+1}] \in \tilde{W}(t_{k+1})$, где $y[t] = y[t_k] + Y_k(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Такой вектор u_*^k существует, поскольку $y[t_k]$ удовлетворяет включению $y[t_k] \in \tilde{W}(t_k)$.

Вектор-функцию $y[t]$ на $[t_k, t_{k+1}]$ назовем движением поводыря.

Вектор $u^k \in P$ определяем равенством $u^k = u_*^k$.

Определяем движение реальной системы на $[t_k, t_{k+1}]$ соотношением

$$x[t] = x[t_k] + X_k(t),$$

где $v(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ – реализовавшееся управление второго игрока.

Для точки $x[t_{k+1}]$ справедливо представление

$$x[t_{k+1}] = x[t_k] + H^k$$

Справедливо неравенство $\|h^k\| \leq \Delta\kappa(\Delta)$.

Так, перебирая последовательно все номера $k = 0, \dots, N - 1$, определяем позиционную процедуру управления с поводырем первого игрока, отвечающую разбиению Γ .

Теперь оценим величину z_{k+1} в узловых точках $t_{k+1} \in \Gamma$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) через начальное отклонение z_0 .

Справедливы равенства

$$y[t_{k+1}] - x[t_{k+1}] = (y[t_k] - x[t_k]) + \Delta(F(t_k, y[t_k]; u^k, v^k) - F(t_k, x[t_k]; u^k, v^k)) - h^k$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Отсюда получаем, что

$$z_{k+1} \leq z_0 + \Delta L_f \sum_{i=0}^k z_i + \Delta L_B K_1 \sum_{i=0}^k z_i + \Delta L_C K_2 \sum_{i=0}^k z_i + \Delta k \omega_C(\Delta) K_2 + \Delta k L_C K \Delta K_2 + \\ + \Delta k 2 \Delta \kappa(\Delta) + \Delta \|C(t_0, x[t_0]) v_*^0\| + \Delta K K_2 + k \Delta \kappa(\Delta)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Учитывая неравенства $k\Delta \leq \vartheta - t_0$, получаем оценку

$$z_{k+1} \leq z_0 + \lambda \Delta \sum_{i=0}^k z_i + \varphi(\Delta)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Тогда

$$z_1 \leq z_0 + \lambda \Delta z_0 + \varphi(\Delta) \leq e^{\lambda \Delta} z_0 + \varphi(\Delta)$$

$$z_2 \leq z_0 + \lambda \Delta (z_0 + z_1) + \varphi(\Delta) \leq e^{2\lambda \Delta} z_0 + e^{\lambda \Delta} \varphi(\Delta)$$

Учитывая приведенные неравенства, можно доказать, что

$$z_k \leq e^{\lambda(\vartheta - t_0)} z_0 + e^{\lambda(\vartheta - t_0)} \varphi(\Delta), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

4. Пример. Рассматривается дифференциальная игра "шофер–убийца" [5]. Преследователь движется на плоскости с фиксированной скоростью w_1 . Радиус кривизны его траектории ограничен снизу положительным числом R . Преследователь управляет выбором значения кривизны траектории в каждый момент времени. Убегающий, движущийся в той же плоскости, обладает простым движением, причем движется

с фиксированной скоростью w_2 . Преследователь стремится захватить убегающего в заранее заданную l -окрестность как можно быстрее. Уравнения движения в этой игре преследования в редуцированном пространстве имеют вид

$$\dot{x}_1 = -w_1 R^{-1} x_2 \varphi + w_2 \sin \psi \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = w_1 R^{-1} x_1 \varphi + w_2 \cos \psi - w_1$$

Управления игроков φ, ψ удовлетворяют ограничениям

$$-1 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

С этой задачей преследования тесно связана задача сближения системы с целью M на фиксированном промежутке времени $[0, T]$, $T \in (0, \infty)$. А именно, изохроны в задаче преследования являются кусками границы соответствующих сечений множества позиционного поглощения, и разрешающая стратегия в задаче преследования может быть построена как процедура управления с поводырем или как стратегия, экстремальная к множеству позиционного поглощения.

Систему (4.1) можно заменить следующей системой:

$$\dot{x}_1 = -w_1 R^{-1} x_2 u_1 + w_2 v_1$$

$$\dot{x}_2 = w_1 R^{-1} x_1 u_2 + w_2 v_2 - w_1 \quad (4.2)$$

$$u = (u_1, u_2) \in P, v = (v_1, v_2) \in Q$$

$$P = \{u : u_1 = u_2, -1 \leq u_1 \leq 1\}, Q = \{v : \|v\| \leq 1\}$$

Уравнения (4.2) принадлежат к классу нелинейных дифференциальных уравнений вида (1.1), и к ним применимы рассмотренные алгоритмы. Как и указывалось выше, алгоритмы состоят из следующих трех основных частей.

1°. Приближение множеств P, Q, M многоугольниками.

2°. Решение нелинейного уравнения

$$x + (t_{i+1} - t_i)F(t_i, x; u_\gamma, v_\omega) = x_s[t_{i+1}] \quad (4.3)$$

на каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ при различных наборах векторов $u_\gamma, v_\omega, x_s[t_{i+1}]$ – вершин соответствующих многоугольников, аппроксимирующих множества P, Q, M .

3°. Построение пересечений и объединений невыпуклых неодносвязных многоугольников в R^2 (см. [14]).

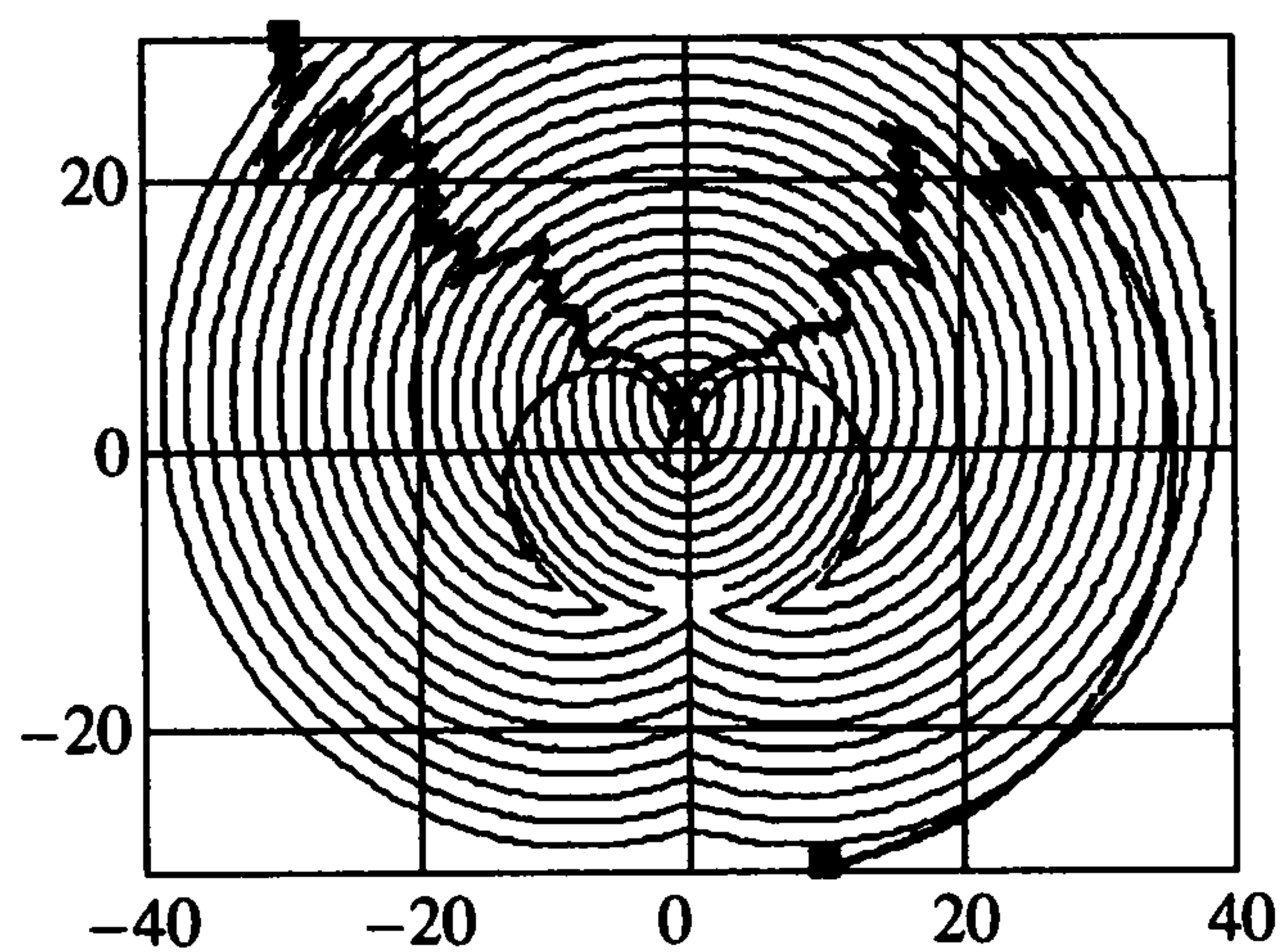
Построение многоугольников, аппроксимирующих множества P, Q, M , производится заданием на границах этих множеств сеток. Число звеньев аппроксимирующих многоугольников выбирается с учетом возможностей ЭВМ и необходимой степени точности приближения.

Отметим, что решение $(x_1[t_i], x_2[t_i])$ уравнения (4.3) в рассматриваемой игре можно выписать аналитически. В общем же случае приходится решать подобное уравнение приближенно.

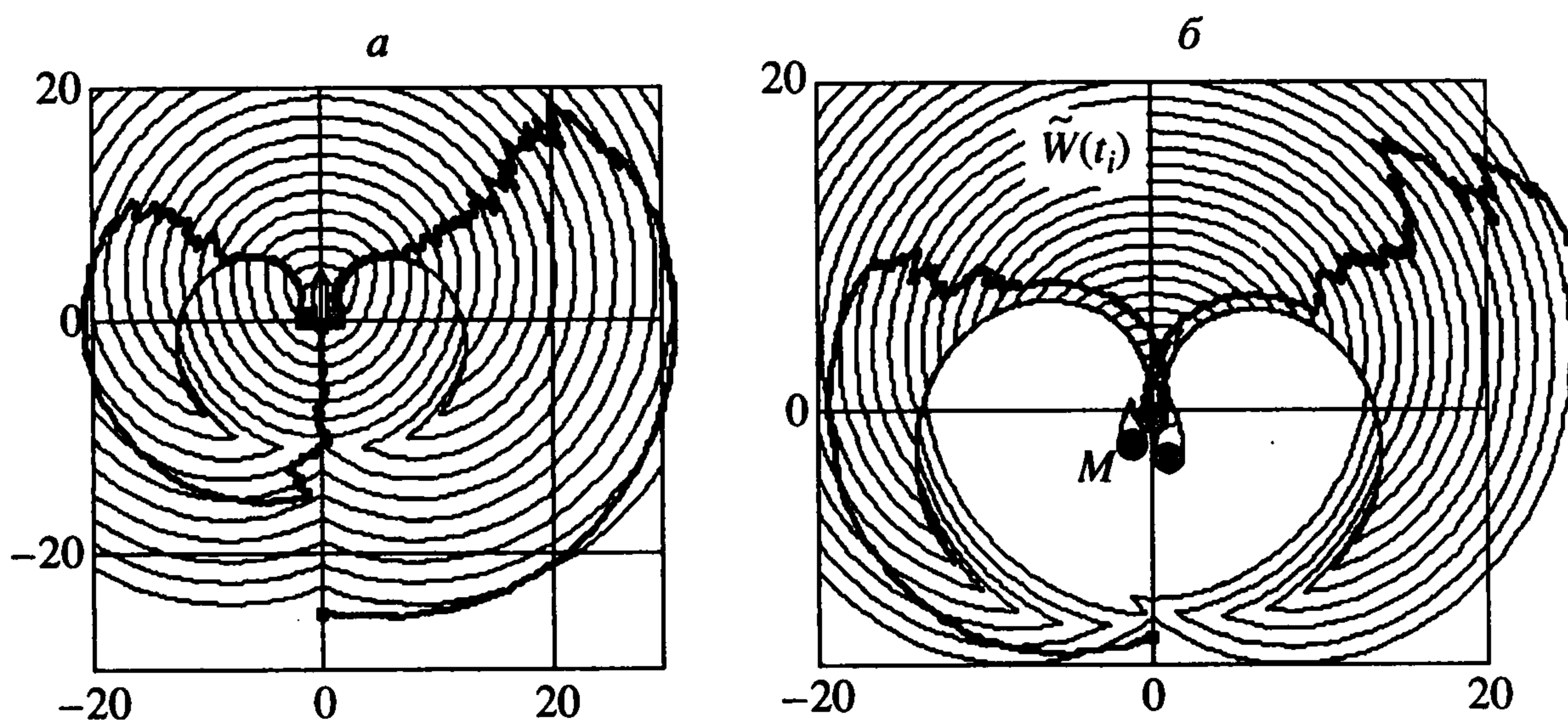
Построение системы множеств $\{\tilde{W}(t_i) : t_i \in \Gamma\}$ проводилось при следующих значениях параметров:

$$w_1 = 2.5, w_2 = 1, R = 0.5, l = 1, [t_0, \vartheta] = [0, 2]$$

$$\Gamma = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = 2\}, \Delta = t_{i+1} - t_i = 0.05, N = 100$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Множества P , Q , M приближаются многоугольниками на плоскости с соответствующими вершинами

$$u_\gamma = (u_{\gamma 1}, u_{\gamma 2}): u_{\gamma 1} = u_{\gamma 2}, u_{\gamma 1} = \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) / \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\gamma = 0, \dots, S_p, S_p = 4$$

$$v_\omega = (v_{\omega 1}, v_{\omega 2}): v_{\omega 1} = \cos \frac{2\pi\omega}{S_q}, v_{\omega 2} = \sin \frac{2\pi\omega}{S_q}$$

$$\omega = 1, 2, \dots, S_q, S_q = 8$$

$$x_s = (x_{s1}, x_{s2}): x_{s1} = l \cos \frac{2\pi s}{S_m}, x_{s2} = l \sin \frac{2\pi s}{S_m}$$

$$s = 1, 2, \dots, S_m, S_m = 60$$

На фиг. 1, 2 изображены множества $\tilde{W}(t_i), t_i \in \Gamma$ и движения системы (4.2) для двух различных начальных позиций, отмеченных маркерами. При этом убегающий выбирал управление случайным образом. На фиг. 2 изображены движения системы (3.2), если целевое множество M задано двумя квадратами (а) или тремя кругами (б).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00146, 00-15-96057).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Аппроксимация в дифференциальной игре // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 2. С. 197–204.
3. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
4. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 216–222.
5. Isaacs R. Differential Games. N.Y. etc.: Wiley, 1965. = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
6. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для дифференциальной игры сближения – уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 397–406.
7. Субботин А.И., Ушаков В.Н. Альтернатива для дифференциальной игры сближения – уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 387–395.
8. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
9. Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287.
10. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1983. № 4. С. 78–85.
11. Алексейчик М.И. Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1975. Т. 7. С. 191–199.
12. Остапенко В.В. Приближенное решение задач сближения–уклонения в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 30–34.
13. Пономарев А.П. Улучшенная оценка сходимости альтернированных сумм к альтернированному интегралу Понтрягина // Мат. заметки. 1984. Т. 35. № 1. С. 83–91.
14. Вахрушев В.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Алгоритмы построения пересечения и объединения множеств на плоскости // Управление с гарантированным результатом. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1987. С. 28–36.

Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
22.VIII.2000