

УДК 531.36; 62–50

© 2002 г. Г.А. Курина

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛАБОУПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Для задач оптимального управления дискретными слабоуправляемыми системами построена асимптотика решения по целым неотрицательным степеням малого параметра, получены оценки близости приближенного решения к точному, установлено невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании следующих приближений управления.

Управление малыми воздействиями встречается в задачах управления космическими аппаратами с малой тягой (электрорядерные двигатели, солнечный парус и т.д.), в разнообразных задачах коррекции и в задачах экономики [1]. Для непрерывной задачи оптимального управления слабоуправляемыми системами без ограничений на значения управляющих воздействий было построено [1] первое приближение решения путем подстановки в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения. Рассматривались [2–6] непрерывные слабоуправляемые системы с ограничением на управление в рамках первого приближения. Метод построения асимптотического разложения решения задачи оптимального управления путем подстановки в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения и определения серии задач оптимального управления для нахождения членов разложения применялся [7, 8] для сингулярно возмущенных систем без ограничений на значения управляющих воздействий и был назван прямой схемой. При этом были построены асимптотические разложения решения любого порядка точности, получены оценки близости приближенного решения к точному и установлено невозрастание значения минимизируемого функционала с каждым новым приближением [7, 8]. Подобные результаты были получены для непрерывных задач оптимального управления слабоуправляемыми системами [9] и для нелинейных дискретных задач оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление [10, 11].

В настоящей работе при помощи прямой схемы строится асимптотика решения задач оптимального управления дискретными слабоуправляемыми системами без ограничений на управление, доказываются оценки близости по управлению, траектории и функционалу приближенного решения к точному, а также устанавливается невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании нового приближения управления.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается следующая дискретная задача для слабоуправляемой системы:

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \sum_{k=0}^N F_k(x(k)) + \varepsilon \sum_{l=0}^{N-1} G_l(x(l), u(l)) \rightarrow \min_u \quad (1.1)$$

$$x(l+1) = f_l(x(l)) + \varepsilon q_l(x(l), u(l)), \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.2)$$

$$x(0) = x^0 \quad (1.3)$$

Здесь

$$x(k) \in X, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad u(l) \in U, \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

$X, U$  – действительные конечномерные евклидовы пространства, число шагов  $N$  фиксировано; всюду далее имеется в виду, что  $k$  принимает значения  $0, 1, \dots, N$ ,

а  $l$  – значения  $0, 1, \dots, N-1$ ;  $F_k, G_l$  – скалярные функции,  $f_l, g_l$  – функции со значениями в  $X$ ,  $\epsilon > 0$  – малый параметр, функции  $F_k, G_l, f_l, g_l$ , входящие в (1.1), (1.2), предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

При  $\epsilon = 0$  система (1.2) оказывается неуправляемой, и, решая задачу

$$P_0 : x(l+1) = f_l(x(l)), x(0) = x^0$$

получаем невозмущенную траекторию.

Асимптотика решения задачи (1.1)–(1.3) будет построена при помощи прямой схемы. Результаты этой статьи были анонсированы автором [12].

**2. Формализм построения асимптотики.** Решение возмущенной задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде рядов

$$x(k) = \sum_{j \geq 0} \epsilon^j x_j(k), u(l) = \sum_{j \geq 0} \epsilon^j u_j(l) \quad (2.1)$$

Соотношения (2.1) подставим в выражения (1.1)–(1.3), правые части в (1.1), (1.2) разложим в ряд по степеням  $\epsilon$ , затем в равенствах (1.2), (1.3) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$ . Тогда минимизируемый функционал запишется в виде

$$J_\epsilon(u) = \sum_{j \geq 0} \epsilon^j J_j \quad (2.2)$$

а из соотношений (1.2), (1.3) получатся уравнения и начальные условия, которым удовлетворяют величины  $x_j(k)$ :

$$\begin{aligned} x_0(l+1) &= \bar{f}_l, x_1(l+1) = (\bar{f}_l)_x x_1(l) + \bar{g}_l, \dots \\ x_j(l+1) &= (\bar{f}_l)_x x_j(l) + (\bar{g}_l)_u u_{j-1}(l) + [\bar{f}_l + \epsilon \bar{g}_l]_j, \quad j > 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$x_0(0) = x^0, \quad x_j(0) = 0, \quad j \geq 1 \quad (2.4)$$

Здесь и далее выражение вида  $(\bar{f}_l)_x$  означает производную функции  $f_l$  по переменной  $x$ , черта сверху означает, что значения соответствующих функций и их производных вычисляются при  $x = x_0, u = u_0$ . Для разложения произвольной функции  $h = h(\epsilon)$  по степеням  $\epsilon$  используется обозначение

$$h(\epsilon) = \sum_{j \geq 0} \epsilon^j h_j = \{h\}_{n-1} + \epsilon^n [h]_n + \alpha(\epsilon^{n+1}), \quad \{h\}_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon^j h_j, \quad [h]_n = h_n$$

где  $\alpha(\epsilon^{n+1})$  означает сумму членов разложения порядка  $\epsilon^{n+1}$  и выше. Волна над функцией означает, что функция вычисляется при  $x(k) = \tilde{x}_{j-1}(k), u(l) = \tilde{u}_{j-2}(l)$ , где

$$\tilde{x}_{j-1}(k) = \sum_{i=0}^{j-1} \epsilon^i x_i(k), \quad \tilde{u}_{j-2}(l) = \sum_{i=0}^{j-2} \epsilon^i u_i(l) \quad (2.5)$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned} [\bar{f}_l + \epsilon \bar{g}_l]_2 &= \frac{1}{2} (\bar{f}_l)_{x^2} x_1^2(l) + (\bar{g}_l)_x x_1(l) \\ [\bar{f}_l + \epsilon \bar{g}_l]_3 &= (\bar{f}_l)_{x^2} x_1(l) x_2(l) + \frac{1}{3!} (\bar{f}_l)_{x^3} x_1^3(l) + \\ &+ (\bar{g}_l)_x x_2(l) + \frac{1}{2} ((\bar{g}_l)_{x^2} x_1^2(l) + (\bar{g}_l)_{u^2} u_1^2(l)) + (\bar{g}_l)_{xu} u_1(l) x_1(l) \end{aligned}$$

Видно, что  $x_0(k)$  – решение задачи  $P_0$ .

Запишем первые коэффициенты из разложения (2.2). Коэффициент  $J_0 = \sum_k \bar{F}_k$  известен после решения задачи  $P_0$ . Имеем

$$J_1 = \sum_k (\bar{F}_k)_x x_1(k) + \sum_l \bar{G}_l$$

$$J_2 = \sum_k ((\bar{F}_k)_x x_2(k) + \frac{1}{2} (\bar{F}_k)_{x^2} x_1^2(k)) + \sum_l ((\bar{G}_l)_x x_1(l) + (\bar{G}_l)_u u_1(l))$$

$$J_3 = \sum_k ((\bar{F}_k)_x x_3(k) + (\bar{F}_k)_{x^2} x_1(k) x_2(k) + \frac{1}{3!} (\bar{F}_k)_{x^3} x_1^3(k)) + \\ + \sum_l ((\bar{G}_l)_x x_2(l) + (\bar{G}_l)_u u_2(l) + \frac{1}{2} ((\bar{G}_l)_{x^2} x_1^2(l) + (\bar{G}_l)_{u^2} u_1^2(l)) + (\bar{G}_l)_{xu} u_1(l) x_1(l))$$

Для определения пары функций  $(x_1(k), u_0(l))$  рассмотрим задачу

$$P_1 : \tilde{J}_1(u_0) = J_1(u_0) = (\bar{F}_N)_x x_1(N) + \sum_l ((\bar{F}_l)_x x_1(l) + \bar{G}_l) \rightarrow \min_{u_0}$$

$$x_1(l+1) = (\bar{f}_l)_x x_1(l) + \bar{g}_l, x_1(0) = 0$$

Отметим, что в задаче  $P_1$  минимизируемый функционал и уравнение состояния линейны по  $x_1(l)$ .

Предположим, что выполнено следующее условие.

*Условие 1°.* Задача  $P_1$  имеет единственное решение, определяемое при помощи равенства (см., например, [13])

$$(H_1(l))_{u_0(l)} = -(\bar{G}_l)_u + \psi_0(l+1)(\bar{g}_l)_u = 0 \quad (2.6)$$

Гамильтониан  $H_1(l)$  задается формулой

$$H_1(l) = -(\bar{F}_l)_x x_1(l) - \bar{G}_l + \psi_0(l+1)((\bar{f}_l)_x x_1(l) + \bar{g}_l)$$

Сопряженная переменная  $\psi_0$  является решением задачи

$$\psi_0(l) = -(\bar{F}_l)_x + \psi_0(l+1)(\bar{f}_l)_x, \quad \psi_0(N) = -(\bar{F}_N)_x \quad (2.7)$$

Задача (2.7) для определения сопряженной переменной решается независимо от задачи определения состояния  $x_1(k)$  и управления  $u_0(l)$ . Если из уравнения (2.6) можно однозначно выразить  $u_0(l)$  через  $\psi_0(l+1)$ , то после нахождения сопряженной переменной, а затем управления, из рекуррентных соотношений (2.3) уравнения состояния находится состояние  $x_1(k)$ .

Используя соотношения (2.7), (2.6), (2.3), (2.4), преобразуем слагаемые в выражении для  $J_2$ , которые остаются неизвестными после решения задач  $P_0, P_1$ . Получим

$$\sum_k (\bar{F}_k)_x x_2(k) + \sum_l (\bar{G}_l)_u u_1(l) = \\ = \sum_l (-\psi_0(l) + \psi_0(l+1)(\bar{f}_l)_x) x_2(l) - \psi_0(N) x_2(N) + \sum_l \psi_0(l+1)(\bar{g}_l)_u u_1(l) = \\ = -\sum_k \psi_0(k) x_2(k) + \sum_l \psi_0(l+1) (x_2(l+1) - \frac{1}{2} (\bar{f}_l)_{x^2} x_1^2(l) - (\bar{g}_l)_x x_1(l)) = \\ = -\sum_l \psi_0(l+1) \left( \frac{1}{2} (\bar{f}_l)_{x^2} x_1^2(l) + (\bar{g}_l)_x x_1(l) \right)$$

Значит, коэффициент  $J_2$  в разложении (2.2) зависит только от решений задач  $P_0, P_1$ .

Проводя аналогичные преобразования для части слагаемых из выражения для  $J_3$ , имеем

$$\sum_k (\bar{F}_k)_x x_3(k) + \sum_l (\bar{G}_l)_u u_2(l) = -\sum_l \psi_0(l+1)((\bar{f}_l)_{x^2} x_1(l)x_2(l) + \frac{1}{3!}(\bar{f}_l)_{x^3} x_1^3(l) +$$

$$+ (\bar{g}_l)_x x_2(l) + \frac{1}{2}((\bar{g}_l)_{x^2} x_1^2(l) + (\bar{g}_l)_{u^2} u_1^2(l)) + (\bar{g}_l)_{xu} u_1(l)x_1(l))$$

С учетом последнего соотношения сумму слагаемых в выражении для  $J_3$ , не известных после решения задач  $P_0, P_1$ , обозначим через  $\tilde{J}_2$ .

Для определения пары функций  $(x_2, u_1)$  рассмотрим линейно-квадратичную задачу

$$P_2 : \tilde{J}_2(u_1) = Q_N x_2(N) + \sum_l \left( Q_l x_2(l) + \frac{1}{2} R_l u_1^2(l) + S_l u_1(l) \right) \rightarrow \min_{u_1}$$

$$x_2(l+1) = (\bar{f}_l)_x x_2(l) + (\bar{g}_l)_u u_1(l) + [\bar{f}_l + \varepsilon \bar{g}_l]_2, \quad x_2(0) = 0$$

Функции  $Q_N = (\bar{F}_N)_{x^2} x_1(N)$ ,  $Q_l = (\bar{F}_l)_{x^2} x_1(l) + (\bar{G}_l)_x - \psi_0(l+1)((\bar{f}_l)_{x^2} x_1(l) + (\bar{g}_l)_x)$ ,  $R_l =$   
 $= (\bar{G}_l)_{u^2} - \psi_0(l+1)(\bar{g}_l)_{u^2}$ ,  $S_l = ((\bar{G}_l)_{ux} - \psi_0(l+1)(\bar{g}_l)_{ux})x_1(l)$  зависят от решений задач  $P_0, P_1$ .

Предположим, что выполнено следующее условие.

*Условие 2°.* Операторы  $R_l$  положительно определены.

Тогда линейно-квадратичная задача  $P_2$  однозначно разрешима, т.е. однозначно определяется второе приближение  $(x_2, u_1)$ .

Запишем гамильтониан для задачи  $P_\varepsilon$  (см., например, [13])

$$H(l) = -F_l(x(l)) - \varepsilon G_l(x(l), u(l)) + \psi(l+1)(f_l(x(l)) + \varepsilon g_l(x(l), u(l)))$$

где сопряженная переменная  $\psi$  является решением задачи

$$\psi(l) = (H(l))_{x(l)} = -(F_l(x(l)) + \varepsilon G_l(x(l), u(l)))_x +$$

$$+ \psi(l+1)(f_l(x(l)) + \varepsilon g_l(x(l), u(l)))_x \quad (2.8)$$

$$\psi(N) = -(F_N(x(N)))_x \quad (2.9)$$

Так как рассматривается задача без ограничений на управление, то необходимым условием оптимальности управления для задачи  $P_\varepsilon$  является выполнение равенства

$$(H(l))_{u(l)} = \varepsilon(-(G_l(x(l), u(l)))_u + \psi(l+1)(g_l(x(l), u(l)))_u) = 0 \quad (2.10)$$

Подставим в соотношения (2.8)–(2.10) разложения (2.1) и

$$\psi(k) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \psi_j(k) \quad (2.11)$$

Приравнивая в полученных выражениях коэффициенты при наименьшей и следующей степенях  $\varepsilon$ , получаем равенства (2.6), (2.7), вытекающие из условия оптимальности управления для задачи  $P_1$ , и равенства

$$\psi_1(l) = -(\bar{F}_l)_{x^2} x_1(l) - (\bar{G}_l)_x + \psi_0(l+1)((\bar{f}_l)_{x^2} x_1(l) + (\bar{g}_l)_x) + \psi_1(l+1)(\bar{f}_l)_x \quad (2.12)$$

$$\psi_1(N) = -(\bar{F}_N)_{x^2} x_1(N) \quad (2.13)$$

$$-(\bar{G}_l)_{ux} x_1(l) - (\bar{G}_l)_{u^2} u_1(l) + \psi_0(l+1)((\bar{g}_l)_{ux} x_1(l) + (\bar{g}_l)_{u^2} u_1(l)) +$$

$$+ \psi_1(l+1)(\bar{g}_l)_u = 0 \quad (2.14)$$

Если запишем принцип максимума для задачи  $P_2$  (см., например, [13]), то управление  $u_1(l)$  будет удовлетворять уравнению (2.14), а сопряженная переменная  $\psi_1(k)$  будет являться решением задачи (2.12)–(2.13).

Значит, уравнения для состояния, управления и сопряженной переменной, полученные с помощью необходимого условия оптимальности управления для задач  $P_1$  и  $P_2$ , совпадают с уравнениями для соответствующего приближения асимптотики решения задачи (1.2), (1.3), (2.8)–(2.10), полученной из необходимого условия оптимальности управления для задачи  $P_\varepsilon$ .

Перейдем к высшим приближениям.

Рассмотрим задачи  $P_j$  ( $j \geq 0$ ). При  $j = 0, 1$  задачи  $P_0, P_1$  соответственно определены ранее, а при  $j \geq 2$  задачи  $P_j$  представляют собой линейно-квадратичные задачи следующего вида:

$$P_j : \tilde{J}_j(u_{j-1}) = [(\tilde{F}_N)_x]_{j-1} x_j(N) + \sum_l ([-\tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)_x + (\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l)_x]_{j-1} x_j(l) + \frac{1}{2} R_l u_{j-1}^2(l) + [-\tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{g}_l)_u + (\tilde{G}_l)_u]_{j-1} u_{j-1}(l)) \rightarrow \min_{u_{j-1}} \quad (2.15)$$

$$x_j(l+1) = (\tilde{f}_l)_x x_j(l) + (\tilde{g}_l)_u u_{j-1}(l) + [\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l]_j, \quad x_j(0) = 0 \quad (2.16)$$

Напомним, что волна над функциями  $f_b, g_l, F_k, G_l$  и их производными означает, что они вычисляются при  $x = \tilde{x}_{j-1}, u = \tilde{u}_{j-2}$ , где  $\tilde{x}_{j-1}(k), \tilde{u}_{j-2}(l)$  определяются соотношениями (2.5), пара  $(x_i, u_{i-1})$  – решение задачи  $P_i$ , а функция  $\tilde{\psi}_{j-2}$  определяется равенством

$$\tilde{\psi}_{j-2}(k) = \sum_{i=0}^{j-2} \varepsilon^i \psi_i(k) \quad (2.17)$$

где  $\psi_i(k)$  – сопряженная переменная в задаче  $P_{i+1}$ .

Отметим, что уравнение состояния в задаче  $P_j$  – это коэффициент при  $\varepsilon^j$  в равенстве, которое следует из (1.2) после подстановки в него соотношений (2.1) и разложения получившегося выражения в ряд по степеням  $\varepsilon$ .

При  $j = 2$  из (2.15), (2.16) получаем ранее рассмотренную задачу  $P_2$ , в которой критерий качества  $\tilde{J}_2(u_1)$  представляет собой преобразованное выражение коэффициента  $J_3$  из разложения (2.2), если отбросить члены, известные после решения задач  $P_0, P_1$ .

Запишем гамильтониан для задачи  $P_j$  ( $j \geq 2$ )

$$H_j(l) = [-\tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)_x + (\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l)_x]_{j-1} x_j(l) - \\ - \frac{1}{2} R_l u_{j-1}^2(l) - [-\tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{g}_l)_u + (\tilde{G}_l)_u]_{j-1} u_{j-1}(l) + \\ + \psi_{j-1}(l+1)((\tilde{f}_l)_x x_j(l) + (\tilde{g}_l)_u u_{j-1}(l) + [\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l]_j)$$

где сопряженная переменная  $\psi_{j-1}$  является решением задачи

$$\psi_{j-1}(l) = (H_j(l))_{x_j(l)} = [-\tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)_x + (\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l)_x]_{j-1} + \\ + \psi_{j-1}(l+1)(\tilde{f}_l)_x \quad (2.18)$$

$$\psi_{j-1}(N) = -[(\tilde{F}_N)_x]_{j-1} \quad (2.19)$$

Необходимым условием оптимальности управления для задачи  $P_j$  ( $j \geq 2$ ) является равенство

$$(H_j(l))_{u_{j-1}(l)} = -R_l u_{j-1}(l) - [-\tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{g}_l)_u + (\tilde{G}_l)_u]_{j-1} + \psi_{j-1}(l+1)(\bar{g}_l)_u = 0 \quad (2.20)$$

**Теорема 1.** Уравнения для состояния, управления и сопряженной переменной, полученные с помощью необходимого условия оптимальности управления для задачи  $P_m$  ( $m \geq 1$ ), совпадают с уравнениями для  $x_m$ ,  $u_{m-1}$ ,  $\psi_{m-1}$  из асимптотики (2.1), (2.11) решения задачи (1.2), (1.3), (2.8)–(2.10), полученной с помощью необходимого условия оптимальности управления для задачи  $P_\epsilon$ .

**Доказательство.** При  $m = 1, 2$  утверждение теоремы уже доказано. Предположим, что оно верно при  $m < j$ . При  $j \geq 2$  введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta x(k) &= x(k) - \tilde{x}_{j-1}(k) = \epsilon^j x_j(k) + \alpha(\epsilon^{j+1}) \\ \Delta \psi(k) &= \psi(k) - \tilde{\psi}_{j-2}(k) = \epsilon^{j-1} \psi_{j-1}(k) + \alpha(\epsilon^j) \\ \Delta u(l) &= u(l) - \tilde{u}_{j-2}(l) = \epsilon^{j-1} u_{j-1}(l) + \alpha(\epsilon^j) \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\tilde{x}_{j-1}(k)$ ,  $\tilde{u}_{j-2}(l)$ ,  $\tilde{\psi}_{j-2}(k)$  задаются формулами (2.5), (2.17).

Подставляя в соотношения (1.2), (1.3), (2.8) – (2.10) вместо  $x$ ,  $u$ ,  $\psi$  их представления из (2.21), после преобразований имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j-1}(l+1) + \Delta x(l+1) &= \tilde{f}_l + \epsilon \tilde{g}_l + (\tilde{f}_l + \epsilon \tilde{g}_l)_x \Delta x(l) + \epsilon (\tilde{g}_l)_u \Delta u(l) + \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon^{2j-1} (\bar{g}_l)_{u^2} u_{j-1}^2(l) + \alpha(\epsilon^{2j}), \quad \Delta x(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{j-2}(l) + \epsilon^{j-1} \psi_{j-1}(l) &= -(\tilde{F}_l + \epsilon \tilde{G}_l)_x + \tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{f}_l + \epsilon \tilde{g}_l)_x + \\ &+ \epsilon^{j-1} \psi_{j-1}(l+1)(\tilde{f}_l)_x + \alpha(\epsilon^j) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{j-2}(N) + \epsilon^{j-1} \psi_{j-1}(N) &= -(\tilde{F}_N)_x + \alpha(\epsilon^j) \\ -(\tilde{G}_l)_u - \epsilon^{j-1} (\bar{G}_l)_{u^2} u_{j-1}(l) &+ \tilde{\psi}_{j-2}(l+1)(\tilde{g}_l)_u + \\ &+ \epsilon^{j-1} \psi_0(l+1)(\bar{g}_l)_{u^2} u_{j-1}(l) + \epsilon^{j-1} \psi_{j-1}(l+1)(\bar{g}_l)_u = \alpha(\epsilon^j) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Приравнивая в соотношении (2.22) коэффициенты при  $\epsilon^j$ , а в (2.23), (2.24) коэффициенты при  $\epsilon^{j-1}$ , получаем соотношения (2.16) и (2.18)–(2.20), вытекающие из необходимого условия оптимальности управления для задачи  $P_j$ . Тем самым установлено утверждение теоремы при  $m = j$ , что и доказывает теорему 1.

При условиях 1°, 2° справедлива

**Теорема 2.** Коэффициент  $J_{2m}$  в разложении (2.2) известен после решения задач  $P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), из которых находятся  $x_i(k)$ ,  $u_{i-1}(l)$  ( $i \geq 1$ ). Преобразованное выражение для коэффициента  $J_{2m+1}$  в разложении (2.2) после отбрасывания членов, известных после решения задач  $P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), совпадает с критерием качества  $\tilde{J}_{m+1}$  в задаче  $P_{m+1}$ .

**Доказательство.** При  $m = 0$  коэффициент  $J_{2m} = J_0$  известен после решения задачи  $P_0$ , а коэффициент  $J_{2m+1} = J_1$  является критерием качества в задаче  $P_1$ .

При  $m = 1$  доказано, что коэффициент  $J_{2m} = J_2$  известен после решения задач  $P_0, P_1$ , а из преобразованного выражения для  $J_3$  получается критерий качества  $\tilde{J}_2$  в линейно-квадратичной задаче  $P_2$ , из которой при условии 2° однозначно определяется  $(x_2, u_1)$ .

Итак, при  $m = 0, 1$  теорема справедлива.

Предположим, что утверждение теоремы имеет место при  $0 \leq m \leq n-1$  ( $n \geq 2$ ).

Допустим, что найдены решения задач  $P_j$  при  $j = 0, 1, \dots, n$ . Тогда  $\tilde{x}_n(k), \tilde{u}_{n-1}(l), \tilde{\psi}_{n-1}(k)$ , определяемые формулами (2.5), (2.17) при  $j = n+1$ , являются известными функциями.

Преобразуем выражение для  $J_\varepsilon(u)$  из (1.1), подставив вместо  $x, u$  их представления из (2.21) при  $j = n+1$ . Будем иметь

$$J_\varepsilon(u) = \sum_k (\tilde{F}_k + (\tilde{F}_k)_x \Delta x(k)) + \varepsilon \sum_l (\tilde{G}_l + (\tilde{G}_l)_x \Delta x(l) + (\tilde{G}_l)_u \Delta u(l) + \frac{\varepsilon^{2n}}{2} (\tilde{G}_l)_{u^2} u_n^2(l)) + \alpha(\varepsilon^{2n+2}) \quad (2.25)$$

Здесь волна над функциями и их производными означает, что они вычисляются при  $x(k) = \tilde{x}_n(k), u(l) = \tilde{u}_{n-1}(l)$ .

Применяя введенные ранее обозначения, из соотношений (2.25) и (2.23), (2.24) при  $j = n+1$  получаем

$$J_\varepsilon(u) = \{\tilde{F}_N\}_{2n+1} + \{(\tilde{F}_N)_x\}_{n-1} \Delta x(N) + \varepsilon^{2n+1} [(\tilde{F}_N)_x]_n x_{n+1}(N) + \sum_l (\{\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l\}_{2n+1} + \{(\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l)_x\}_{n-1} \Delta x(l) + \varepsilon^{2n+1} [(\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l)_x]_n x_{n+1}(l) + \{\varepsilon(\tilde{G}_l)_u\}_n \Delta u(l) + \varepsilon^{2n+1} [(\tilde{G}_l)_u]_n u_n(l) + \frac{\varepsilon^{2n+1}}{2} (\tilde{G}_l)_{u^2} u_n^2(l)) + \alpha(\varepsilon^{2n+2}) \quad (2.26)$$

$$\{(\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l)_x\}_{n-1} = -\tilde{\psi}_{n-1}(l) + \{\tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)_x\}_{n-1}$$

$$\tilde{\psi}_{n-1}(N) = -\{(\tilde{F}_N)_x\}_{n-1}$$

$$\{\varepsilon(\tilde{G}_l)_u\}_n = \{\varepsilon \tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{g}_l)_u\}_n$$

Учитывая последние три равенства, а также условие  $\Delta x(0) = 0$  и получаемое из (2.22) при  $j = n+1$  путем умножения скалярно на  $\tilde{\psi}_{n-1}(l+1)$  соотношение

$$\begin{aligned} & \{\tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)_x\}_{n-1} \Delta x(l) + \{\varepsilon \tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{g}_l)_u\}_n \Delta u(l) = \\ & = \{\tilde{\psi}_{n-1}(l+1) \Delta x(l+1)\}_{2n+1} + \{\tilde{\psi}_{n-1}(l+1) \tilde{x}_n(l+1) - \\ & - \tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)\}_{2n+1} - \varepsilon^{2n+1} [\tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)_x]_n x_{n+1}(l) - \\ & - \varepsilon^{2n+1} [\tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{g}_l)_u]_n u_n(l) - \frac{\varepsilon^{2n+1}}{2} \psi_0(l+1)(\tilde{g}_l)_{u^2} u_n^2(l) + \alpha(\varepsilon^{2n+2}) \end{aligned}$$

из (2.26) имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \{\tilde{F}_N + \sum_l (\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l + \tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{x}_n(l+1) - \tilde{f}_l - \varepsilon \tilde{g}_l))\}_{2n+1} + \\ &+ \varepsilon^{2n+1} ([(\tilde{F}_N)_x]_n x_{n+1}(N) + \sum_l ([-\tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{f}_l + \varepsilon \tilde{g}_l)_x + \\ &+ (\tilde{F}_l + \varepsilon \tilde{G}_l)_x]_n x_{n+1}(l) + [-\tilde{\psi}_{n-1}(l+1)(\tilde{g}_l)_u + (\tilde{G}_l)_u]_n u_n(l) + \\ &+ \frac{1}{2} (-\psi_0(l+1)(\tilde{g}_l)_{u^2} + (\tilde{G}_l)_{u^2}) u_n^2(l)) + \alpha(\varepsilon^{2n+2}) \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что  $J_{2n}$  (коэффициент при  $\varepsilon^{2n}$  в разложении  $J_\varepsilon(u)$  по степеням  $\varepsilon$ ) известен после решения задач  $P_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ). Если в  $J_{2n+1}$  (коэффициенте при  $\varepsilon^{2n+1}$ ) возьмем сумму членов, зависящих от неизвестных  $x_{n+1}(k)$ ,  $u_n(l)$ , то она совпадает с критерием качества  $\tilde{J}_{n+1}(u_n)$  в задаче  $P_{n+1}$  (см. (2.15) при  $j = n + 1$ ).

Теорема доказана.

*Замечания.* 1°. Для получения задачи  $P_{n+1}$  достаточно требовать, чтобы для функций, входящих в (1.1), (1.2), существовали непрерывные производные по  $(x, u)$  в окрестности  $(x_0, u_0)$  до  $2n + 2$  порядка включительно, для функций  $g_l$ ,  $G_l$  гладкость по  $(x, u)$  может быть на единицу меньше.

2°. Решение линейно-квадратичной задачи  $P_j$  для  $j \geq 2$  при условии 2° однозначно находится с помощью рекуррентных соотношений. Действительно, из (2.18), (2.19) однозначно находится  $\psi_{j-1}(l)$ . При условии 2° из (2.20) однозначно находится  $u_{j-1}(l)$ . Подставляя найденное значение оптимального управления в первое соотношение (2.16), получаем рекуррентные соотношения (2.16) для определения оптимальной траектории  $x_j(k)$ .

**3. Оценки приближенного решения.** Предположим, что найдены решения задач  $P_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ ): функции  $x_j(k)$ ,  $u_{j-1}(l)$  ( $j \geq 1$ ). Оценим приближенное решение задачи  $P_\varepsilon$ :  $\tilde{x}_n(k)$ ,  $\tilde{u}_{n-1}(k)$  (см. (2.5) при  $j = n + 1$ ).

*Лемма 1.* Если для уравнения

$$Az = F(z, \varepsilon), \quad z \in Z \quad (3.1)$$

где  $Z$  – банахово пространство, в котором действует линейный оператор  $A$ ,  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, выполняются следующие условия:

1) оператор  $A$  имеет ограниченный обратный,

2) для любого  $\mu > 0$  существуют такие постоянные  $\delta = \delta(\mu)$  и  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu)$ , что если  $\|z_i\| \leq \delta(\mu)$  ( $i = 1, 2$ ),  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , то имеет место неравенство

$$\|F(z_1, \varepsilon) - F(z_2, \varepsilon)\| \leq \mu \|z_1 - z_2\| \quad (3.2)$$

3) при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\|F(0, \varepsilon)\| \leq d\varepsilon^q, \quad q > 0 \quad (3.3)$$

где постоянная  $d$  не зависит от  $\varepsilon$ , то существуют  $\varepsilon_1$ ,  $\mu > 0$ , такие, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  в шаре  $S$ :  $\|z\| \leq \delta(\mu)$  уравнение (3.1) имеет единственное решение, и для него справедливо неравенство

$$\|z\| \leq c\varepsilon^q \quad (3.4)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $\varepsilon$ .

*Доказательство.* Если взять, например,  $\mu = 1/(2\|A^{-1}\|)$ , то из неравенства (3.2) следует, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  оператор  $A^{-1}F$  является сжимающим в шаре  $S$ .

При  $z_2 = 0$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  из (3.2) получаем неравенство

$$\|A^{-1}F(z_1, \varepsilon)\| \leq \|A^{-1}\|\mu\|z_1\| + \|A^{-1}\|\|F(0, \varepsilon)\|$$

Отсюда при учете соотношения (3.3) вытекает, что при

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 = \min\left(\varepsilon_0(\mu), (\delta(\mu)/(2\|A^{-1}\|d))^{1/q}\right)$$

оператор  $A^{-1}F$  переводит шар  $S$  в себя.

В силу принципа сжимающих отображений уравнение (3.1) при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  в шаре  $S$  имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Покажем, что все последовательные приближения  $z_{i+1} = A^{-1}F(z_i, \epsilon)$  при  $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$  по норме не превосходят  $c\epsilon^q$  (постоянная  $c$  одинакова для всех приближений).

В качестве нулевого приближения возьмем  $z_0 = 0$ .

В силу неравенства (3.3) имеем

$$\|z_1\| = \|A^{-1}F(0, \epsilon)\| \leq \|A^{-1}\| d\epsilon^q$$

Используя неравенство (3.2) при  $\mu = 1/(2\|A^{-1}\|)$ ,  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ , получаем

$$\|z_2\| \leq \|z_2 - z_1\| + \|z_1\| = \|A^{-1}F(z_1, \epsilon) - A^{-1}F(0, \epsilon)\| +$$

$$+ \|z_1\| \leq \frac{1}{2}\|z_1\| + \|z_1\| \leq 2\|A^{-1}\| d\epsilon^q$$

Воспользуемся методом математической индукции.

Предположим, что при  $0 \leq j \leq i$  справедливо неравенство

$$\|z_j\| \leq 2\|A^{-1}\| d\epsilon^q$$

Далее имеем

$$\|z_{i+1}\| \leq \|z_{i+1} - z_i\| + \|z_i - z_{i-1}\| + \dots + \|z_2 - z_1\| + \|z_1\|$$

При  $j \leq i$ ,  $\mu = 1/(2\|A^{-1}\|)$  и  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  из неравенства (3.2) следует

$$\|z_{j+1} - z_j\| = \|A^{-1}F(z_j, \epsilon) - A^{-1}F(z_{j-1}, \epsilon)\| \leq \frac{1}{2}\|z_j - z_{j-1}\| =$$

$$= \frac{1}{2}\|A^{-1}F(z_{j-1}, \epsilon) - A^{-1}F(z_{j-2}, \epsilon)\| \leq \frac{1}{2^2}\|z_{j-1} - z_{j-2}\| \leq \dots \leq \frac{1}{2^j}\|z_1\|$$

Тогда

$$\|z_{i+1}\| \leq \left( \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-1}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) \|z_1\| \leq 2\|z_1\| \leq c\epsilon^q$$

где  $c = 2\|A^{-1}\|d$  не зависит от номера приближения и от  $\epsilon$ .

Поэтому решение уравнения (3.1) при  $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$  удовлетворяет оценке (3.4).

При условиях 1°, 2° и достаточно малых  $\epsilon \neq 0$  установим однозначную разрешимость задачи (1.2), (1.3), (2.8)–(2.10). При учете обозначений (2.21) при  $j = n + 1$ ,  $\epsilon \neq 0$ ,  $n \geq 1$  разрешимость этой задачи эквивалентна разрешимости следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta x(l+1) &= \left( \bar{f}_l \right)_x \Delta x(l) + \epsilon \left( \bar{g}_l \right)_u \Delta u(l) + \left[ f_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l)) + \right. \\ &+ \epsilon g_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l), \tilde{u}_{n-1}(l) + \Delta u(l)) - \tilde{x}_n(l+1) - \left. \left( \bar{f}_l \right)_x \Delta x(l) - \epsilon \left( \bar{g}_l \right)_u \Delta u(l) \right], \quad \Delta x(0) = 0 \\ \epsilon \Delta \psi(l) &= \epsilon \Delta \psi(l+1) \left( \bar{f}_l \right)_x + \left[ \epsilon \left( - \left( F_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l)) + \right. \right. \right. \\ &+ \epsilon G_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l), \tilde{u}_{n-1}(l) + \Delta u(l)) \Big) \Big)_x + \\ &+ \left( \tilde{\psi}_{n-1}(l+1) + \Delta \psi(l+1) \right) \left( f_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l)) + \epsilon g_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l), \tilde{u}_{n-1}(l) + \Delta u(l)) \right)_x - \\ &- \tilde{\psi}_{n-1}(l) - \Delta \psi(l+1) \left( \bar{f}_l \right)_x \Big] \\ \epsilon \Delta \psi(N) &= \left[ -\epsilon \left( F_N(\tilde{x}_n(N) + \Delta x(N)) \right)_x - \epsilon \tilde{\psi}_{n-1}(N) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta u(l) = & \varepsilon R_l^{-1} \Delta \psi(l+1) (\bar{g}_l)_u + \left[ \varepsilon R_l^{-1} \left( -G_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l), \tilde{u}_{n-1}(l) + \Delta u(l)) \right)_u + \right. \\ & \left. + \left( \tilde{\psi}_{n-1}(l+1) + \Delta \psi(l+1) \right) \left( g_l(\tilde{x}_n(l) + \Delta x(l), \tilde{u}_{n-1}(l) + \Delta u(l)) \right)_u + R_l \Delta u(l) - \Delta \psi(l+1) (\bar{g}_l)_u \right] \end{aligned}$$

Видно, что соответствующая последней задаче однородная линейная система

$$\begin{aligned} \Delta x(l+1) &= \left( \bar{f}_l \right)_x \Delta x(l) + \varepsilon \left( \bar{g}_l \right)_u \Delta u(l), \quad \Delta x(0) = 0 \\ \varepsilon \Delta \psi(l) &= \varepsilon \Delta \psi(l+1) \left( \bar{f}_l \right)_x, \quad \varepsilon \Delta \psi(N) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon \Delta u(l) = \varepsilon R_l^{-1} \Delta \psi(l+1) (\bar{g}_l)_u$$

имеет только нулевое решение.

Введем вектор  $z$  в пространстве  $R^{2m(N+1)+rN}$ , компоненты которого равны компонентам  $\Delta x(k)$ ,  $\varepsilon \Delta \psi(k)$ ,  $\varepsilon \Delta u(l)$ ,  $m = \dim X$ ,  $r = \dim U$ . Тогда систему (3.5) можно записать в виде уравнения (3.1), где  $A$  — линейный оператор, определяемый однородной линейной системой (3.6) и действующий в  $R^{2m(N+1)+rN}$ , а вид  $F$  очевиден из сравнения систем (3.5), (3.6) и определяется функциями в квадратных скобках из (3.5). Из однозначной разрешимости системы (3.6) следует обратимость оператора  $A$ .

Используя теорему о конечных приращениях, можно установить, что для каждой функции  $f(\Delta x(l), \Delta u(l), \Delta \psi(l+1), l, \varepsilon)$ , стоящей в квадратных скобках в (3.5), для любого сколь угодно малого  $\mu > 0$  при достаточно малых  $\varepsilon$ ,  $\|x_i\|$ ,  $\|u_i\|$ ,  $\|\psi_i\|$  ( $i = 1, 2$ ) выполняется неравенство

$$\|f(x_1, u_1, \psi_1, l, \varepsilon) - f(x_2, u_2, \psi_2, l, \varepsilon)\| \leq \mu (\|x_1 - x_2\| + \varepsilon \|u_1 - u_2\| + \varepsilon \|\psi_1 - \psi_2\|)$$

В силу уравнений для определения функций  $\tilde{x}_n$ ,  $\tilde{u}_{n-1}$ ,  $\tilde{\psi}_{n-1}$  имеем

$$\|f(0, 0, 0, l, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1})$$

Значит, выполняются условия 1–3 леммы 1 для системы (3.5), записанной в виде уравнения (3.1). Из этой леммы следует

**Лемма 2.** При условиях 1°, 2° и достаточно малых  $\varepsilon > 0$  задача (1.2), (1.3), (2.8)–(2.10) имеет единственное решение в окрестности  $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_{n-1}, \tilde{\psi}_{n-1})$  и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|x(k) - \tilde{x}_n(k)\| &= \|\Delta x(k)\| \leq c \varepsilon^{n+1} \\ \|u(l) - \tilde{u}_{n-1}(l)\| &= \|\Delta u(l)\| \leq c \varepsilon^n, \quad \|\psi(k) - \tilde{\psi}_{n-1}(k)\| = \|\Delta \psi(k)\| \leq c \varepsilon^n \end{aligned} \quad (3.7)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $k$ ,  $l$ ,  $\varepsilon$ .

Таким образом, можно построить асимптотику решения задачи (1.2), (1.3), (2.8)–(2.10) по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , причем остаточные члены асимптотики  $\Delta x$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta \psi$  удовлетворяют неравенствам (3.7).

Введем обозначения

$$\|x\| = \max_{0 \leq k \leq N} \|x(k)\|, \quad \|u\| = \max_{0 \leq l \leq N-1} \|u(l)\|$$

Пусть  $u^*$  — некоторое фиксированное управление, а  $x^*$  — соответствующая ему траектория, т.е. решение задачи (1.2), (1.3) при  $u = u^*$ .

**Лемма 3.** Для любого  $r > 0$  существуют постоянные  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $c > 0$ , такие, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\|u^* - u\| \leq r$  справедлива оценка

$$\|x^* - x\| \leq c\varepsilon \|u^* - u\|$$

где  $x$  – траектория, соответствующая управлению  $u$ .

Доказательство этой леммы следует из вида уравнения (1.2), непрерывной дифференцируемости функций  $f_l$ ,  $g_l$  и теоремы о конечных приращениях.

Теперь при условиях 1°, 2° и достаточно малых  $\varepsilon \neq 0$  установим однозначную разрешимость задачи  $P_\varepsilon$  в некоторой окрестности управления  $u_0$ .

Обозначим через  $x^*$ ,  $\psi$ ,  $u^*$  решение задачи (1.2), (1.3), (2.8)–(2.10), которое существует в силу леммы 2.

**Лемма 4.** При условиях 1°, 2° и достаточно малых  $\varepsilon > 0$  функция  $u^*(l)$  является локально оптимальным управлением для задачи  $P_\varepsilon$ .

*Доказательство.* Наряду с траекторией  $x^*$ , соответствующей управлению  $u^*$ , рассмотрим траекторию  $x$  (решение задачи (1.2), (1.3)), соответствующую управлению  $u$  из некоторой окрестности  $u^*$ . Из соотношения (1.2) с учетом леммы 3 получаем соотношение

$$\begin{aligned} x(l+1) - x^*(l+1) &= (f_l + \varepsilon g_l)_x^* (x(l) - x^*(l)) + \varepsilon (g_l)_u^* (u(l) - u^*(l)) + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon (g_l)_{u^2}^* (u(l) - u^*(l))^2 + O\left(\varepsilon^2 \|u - u^*\|^2\right) + O\left(\varepsilon \|u - u^*\|^3\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Звездочка сверху, справа от скобки, означает, что значения производной вычисляются при  $x = x^*$ ,  $u = u^*$ .

Далее из соотношения (1.1) с учетом леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} J(u) - J(u^*) &= \sum_k (F_k)_x^* (x(k) - x^*(k)) + \varepsilon \sum_l \left( (G_l)_x^* (x(l) - x^*(l)) + \right. \\ &+ \left. (G_l)_u^* (u(l) - u^*(l)) + \frac{1}{2} (G_l)_{u^2}^* (u(l) - u^*(l))^2 \right) + O\left(\varepsilon^2 \|u - u^*\|^2\right) + O\left(\varepsilon \|u - u^*\|^3\right) \end{aligned}$$

Используя выражения для  $(F_N)_x^*$ ,  $(F_l + \varepsilon G_l)_x^*$ ,  $(G_l)_u^*$ , полученные соответственно из соотношений (2.9), (2.8), (2.10), а также выражение (3.8), после преобразований приходим к соотношению

$$J(u) - J(u^*) = \frac{1}{2} \varepsilon \sum_l \left( (G_l)_{u^2}^* - \psi(l+1)(g_l)_{u^2}^* \right) (u(l) - u^*(l))^2 + O\left(\varepsilon^2 \|u - u^*\|^2\right) + O\left(\varepsilon \|u - u^*\|^3\right)$$

Отсюда в силу оценок (3.7) получаем

$$J(u) - J(u^*) = \frac{1}{2} \varepsilon \sum_l R_l (u(l) - u^*(l))^2 + O\left(\varepsilon^2 \|u - u^*\|^2\right) + O\left(\varepsilon \|u - u^*\|^3\right) \quad (3.9)$$

Поэтому при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  управление  $u^*$  является локально оптимальным для задачи  $P_\varepsilon$ .

**Теорема 3.** При условиях 1°, 2° и достаточно малых  $\varepsilon > 0$  задача  $P_\varepsilon$  однозначно разрешима в окрестности управления  $u_0$  и для ее решения  $u^*$ ,  $x^*$  имеют место оценки

$$u^*(l) - \tilde{u}_{n-1}(l) = O(\varepsilon^n), \quad x^*(k) - \tilde{x}_n(k) = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (3.10)$$

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1}) - J_\varepsilon(u^*) = O(\varepsilon^{2n+1}) \quad (3.11)$$

**Доказательство.** Утверждение о разрешимости вытекает из лемм 2, 4. Оценки (3.10) следуют из (3.7). Оценка (3.11) получается из (3.9) при  $u = \tilde{u}_{n-1}$  с учетом оценок (3.7).

Соотношение (3.11) означает, что порядок (или степень) субоптимальности управления  $\tilde{u}_{n-1}$  в задаче  $P_\varepsilon$  равен  $2n + 1$  (определение см., например, в [14]).

**Замечания.** 3°. Если обозначить через  $\tilde{x}$  решение задачи (1.2), (1.3), соответствующее управлению  $\tilde{u}_{n-1}$ , то в силу леммы 3 и оценки (3.10) будем иметь

$$x^*(k) - \tilde{x}(k) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \tilde{x}(k) - \tilde{x}_n(k) = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (3.12)$$

4°. Для приближенного решения задачи оптимального управления дискретной слабоуправляемой системой получены оценки (3.10), (3.11) того же вида, что и ранее [9] для непрерывных слабоуправляемых систем.

5°. Если в функционал (1.1) вместо  $u$  подставить  $\tilde{u}_{n-1}$ , а вместо  $x$  подставить  $\tilde{x}_n$ , то полученное значение функционала в силу оценок (3.10) будет отличаться от оптимального на  $O(\varepsilon^{n+1})$ , в то время как в (3.11) оценка для разности значений функционала имеет порядок  $\varepsilon^{2n+1}$ .

Иллюстрацией утверждения теоремы 3.1 и последнего замечания является следующий пример.

**Пример.** Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = x(2) + \varepsilon(u^2(0) + u^2(1))$$

на траекториях системы

$$x(0) = 1, \quad x(1) = (x(0))^2 + \varepsilon u(0), \quad x(2) = (x(1))^2 + \varepsilon u(1) \quad (3.13)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

Используя равенства (3.13), получаем, что задача минимизации функционала  $J_\varepsilon(u)$  – есть задача минимизации функции двух переменных:  $u(0)$ ,  $u(1)$ . Решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u^*(0) &= -\frac{1}{1+\varepsilon}, \quad u^*(1) = -\frac{1}{2} \\ x^*(0) &= 1, \quad x^*(1) = \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad x^*(2) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ J_\varepsilon(u^*) &= \frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Решение задачи

$$P_0: x(1) = (x(0))^2, \quad x(2) = (x(1))^2, \quad x(0) = 1$$

имеет вид

$$x_0(0) = 1, \quad x_0(1) = 1, \quad x_0(2) = 1$$

Решение задачи

$$P_1: J_1(u_0) = x_1(2) + u_0^2(0) + u_0^2(1) \rightarrow \min_{u_0}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 2x_1(0) + u_0(0), \quad x_1(2) = 2x_1(1) + u_0(1)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} u_0(0) &= -1, \quad u_0(1) = -\frac{1}{2} \\ x_1(0) &= 0, \quad x_1(1) = -1, \quad x_1(2) = -\frac{5}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тогда (см. (2.5))

$$\tilde{x}_1(0) = 1, \quad \tilde{x}_1(1) = 1 - \varepsilon, \quad \tilde{x}_1(2) = 1 - \frac{5}{2}\varepsilon \quad (3.16)$$

Решение  $\tilde{x}$  системы (3.13) при  $u = u_0$

$$\tilde{x}(0) = 1, \quad \tilde{x}(1) = (\tilde{x}(0))^2 + \varepsilon u_0(0), \quad \tilde{x}(2) = (\tilde{x}(1))^2 + \varepsilon u_0(1)$$

имеет вид

$$\tilde{x}(0) = 1, \quad \tilde{x}(1) = 1 - \varepsilon, \quad \tilde{x}(2) = 1 - \frac{5}{2}\varepsilon + \varepsilon^2 \quad (3.17)$$

Отсюда получаем

$$J_\varepsilon(u_0) = \tilde{x}(2) + \varepsilon \left( (u_0(0))^2 + (u_0(1))^2 \right) = 1 - \frac{5}{4}\varepsilon + \varepsilon^2 \quad (3.18)$$

Из соотношений (3.14)–(3.18) следуют оценки (3.10)–(3.12) при  $n = 1$ .

Результатом подстановки в функционал  $J_\varepsilon(u)$  вместо  $u$  значения  $u_0$ , а вместо  $x$  значения  $\tilde{x}_1$  является величина  $1 - \frac{5}{4}\varepsilon$ , которая отличается от оптимального значения  $J_\varepsilon(u^*)$  (см. (3.14)) на  $O(\varepsilon^2)$ .

**Теорема 4.** При условиях 1°, 2° и достаточно малых  $\varepsilon > 0$  справедливы неравенства

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_i) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.19)$$

где

$$\tilde{u}_i(l) = \sum_{j=0}^i \varepsilon^j u_j(l)$$

При  $u_i \neq 0$  в (3.19) – знак строгого неравенства.

*Доказательство.* Если  $u_i(l) = 0$ , то неравенство (3.19) очевидно.

Рассмотрим случай, когда  $u_i \neq 0$ . Решение задачи (1.2), (1.3) при  $u(l) = \tilde{u}_s(l)$  ( $s = i-1, i$ ) разложим в ряд по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ . Тогда в силу алгоритма определения членов разложения (2.1) решение будет иметь вид

$$\sum_{j=0}^{s+1} \varepsilon^j x_j(k) + O(\varepsilon^{s+2})$$

(см. вторую из оценок (3.12))

Раскладывая  $J_\varepsilon(\tilde{u}_s)$  ( $s = i-1, i$ ) в ряд (2.2), с учетом теоремы 2 получаем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\tilde{u}_i) &= \sum_{j=0}^{2i} \varepsilon^j J_j + \varepsilon^{2i+1} \left( \hat{J}_{2i+1} + \tilde{J}_{i+1}(u_i) \right) + O(\varepsilon^{2i+2}) \\ J_\varepsilon(\tilde{u}_{i-1}) &= \sum_{j=0}^{2i} \varepsilon^j J_j + \varepsilon^{2i+1} \left( \hat{J}_{2i+1} + \tilde{J}_{i+1}(0) \right) + O(\varepsilon^{2i+2}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

где  $\hat{J}_{2i+1}$  зависит от  $u_j$  ( $j = 0, 1, \dots, i-1$ ),  $x_j$  ( $j = 0, 1, \dots, i$ ).

Так как  $u_i$  – решение линейно-квадратичной задачи  $P_{i+1}$ , заключающейся в минимизации функционала  $\tilde{J}_{i+1}(u_i)$ , то в силу единственности оптимального управления при  $u_i \neq 0$  имеем

$$\tilde{J}_{i+1}(u_i) < \tilde{J}_{i+1}(0)$$

Отсюда и из равенств (3.20) при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  следует неравенство (3.19).

Таким образом, установлено невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым новым приближением управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00968).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 1. С. 15–26.
3. *Любушин А.А.* Сходимость метода малого параметра для слабоуправляемых оптимальных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 569–573.
4. *Первозванский А.А., Гайцгори В.Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979. 342 с.
5. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
6. *Помазанов М.В.* Получение локально-оптимальных управлений слабоуправляемых систем из уравнения Беллмана // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 84–93.
7. *Belokopytov S.V., Dmitriev M.G.* Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions // Systems and Control Letters. 1986. V. 8. № 2. P. 129–135.
8. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. 1989. № 7. С. 71–82.
9. *Курина Г.А.* Высшие приближения метода малого параметра для слабоуправляемых систем // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 1. С. 28–32.
10. *Гаипов М.А.* Асимптотика решения нелинейной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление (формализм) I // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук. 1990. № 1. С. 9–16.
11. *Дмитриев М.Г., Белокопытов С.В., Гаипов М.А.* Асимптотика решения нелинейной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление (обоснование) II // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук. 1990. № 2. С. 10–18.
12. *Kurina G.A.* Asymptotic solution of optimal control problems for discrete weakly controllable systems // Proc. Intern. Workshop "New Computer Technologies in Control Systems". Pereslavl-Zallessky, Russia, 1996. P. 39–40.
13. *Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 351 с.
14. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.

Воронеж  
e-mail: kurina@kma.vsu.ru

Поступила в редакцию  
22.II.2001