

УДК 531.36;62–50

© 2002 г. О.И. Костюкова

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ВЫПУКЛАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

Исследуется зависимость решений терминальной задачи оптимального управления от параметра, входящего в вектор начального состояния. Основное внимание уделяется изучению поведения решения в окрестности нерегулярной точки. На базе полученных результатов предлагается метод, позволяющий строить решения задачи при всех значениях параметра.

Часто на практике важно знать не только решение задачи оптимального управления при фиксированных значениях параметров, но также зависимость решения от параметров, что позволяет оценить изменения в решении, вызванные колебаниями параметров. Кроме того, знание зависимости решений задач оптимального управления от параметров лежит в основе методов построения управлений типа обратной связи [1, 2] и также методов стабилизации и оценивания с помощью стратегии "скользящего" горизонта [3–5].

Численные решения таких проблем, как правило, осуществляются методом продолжения решения по параметру [6–9]. Наибольшие трудности при реализации этого метода возникают в случае, когда "текущее" значение параметра является нерегулярной точкой. Поэтому в большинстве работ по анализу чувствительности и исследованию зависимости решений от параметров делается предположение о том, что все значения параметров регулярны либо степень нерегулярности равна единице. В данной работе таких предположений нет.

1. Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных функций рассмотрим семейство терминальных задач оптимального управления линейной системой, начальные состояния которых зависят от параметра $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$

$$\text{OC}(\tau): \begin{cases} f_0(x(t^*)) \rightarrow \min \\ \dot{x} = Ax + bu, x(0) = z(\tau) \\ f(x(t^*)) \leq 0, |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t^*] \end{cases} \quad (1.1)$$

$$A \in R^{n \times n}, \quad b \in R^n, \quad \text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n; \quad f(x) = (f_i(x), i = 1, 2, \dots, m)$$

Здесь $x = x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u = u(t) \in R$ – управляющее воздействие, $f_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) – непрерывно дифференцируемые выпуклые функции, имеющие ограниченные непрерывные производные $\partial^2 f_i(x) / \partial x_s \partial x_j$ ($s = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, m$); $z(\tau), \tau \in [\tau_*, \tau^*]$ – заданная кусочно-гладкая n -вектор-функция.

Требуется исследовать зависимость значения критерия качества и решений задачи $\text{OC}(\tau)$ от параметра τ и описать правила построения решений при возмущении параметра.

В дальнейшем будем считать, что при любом $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ в задаче $\text{OC}(\tau)$ выполняется условие Слейтера: найдется такое управление $|\bar{u}_\tau(t)| \leq 1, t \in T$, что на соответствующей ему траектории $\bar{x}_\tau(t), t \in T$, выполняются неравенства $f(\bar{x}_\tau(t^*)) < 0$.

Обозначим через $X(\tau)$ множество достижимости в задаче ОС(τ) и через X_0 – множество решений задачи

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f(x) \leq 0, \quad \|x\| \leq C_0$$

где $C_0 > 0$ – достаточно большое число. Будем считать, что при любом $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ имеет место соотношение $X_0 \cap X(\tau) = \emptyset$.

2. Структура решения. Определяющие элементы. Рассмотрим задачу ОС(τ) при фиксированном τ . Обозначим через $u_\tau(\cdot) = (u_\tau(t), t \in T)$, $x_\tau(\cdot) = (x_\tau(t), t \in T)$ оптимальное управление и соответствующую ему траекторию, через $\psi(t, y, x)$, $t \in T$, $y \in R^m$, $x \in R^n$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = -\frac{\partial f_0(x)}{\partial x} - \frac{\partial f(x)}{\partial x} y \quad (2.1)$$

Согласно принципу максимума [10], для оптимальности управления $u_\tau(\cdot)$ в задаче ОС(τ) необходимо и достаточно существование такого вектора $y \in R^m$, что

$$y \geq 0, \quad y'f(x_\tau(t^*)) = 0 \quad (2.2)$$

$$\psi'(t, y, x_\tau(t^*))bu_\tau(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi'(t, y, x_\tau(t^*))bu, \quad t \in T$$

Обозначим через $Y(\tau) \subset R^m$ множество всех векторов y , обладающих свойствами (2.1), (2.2). Рассмотрим точечно-множественное отображение

$$\tau \rightarrow Y(\tau), \quad \tau \in [\tau_*, \tau^*] \quad (2.3)$$

Основываясь на известных результатах [11, 12], можно показать, что при сделанных выше предположениях отображение (2.3) обладает следующими свойствами:

- 1) при любом $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ множество $Y(\tau) \neq \emptyset$ и ограничено;
- 2) отображение (2.3) полунепрерывно сверху;
- 3) для любой сходящейся последовательности

$$\{\tau_k\}_{k \rightarrow \infty}, \quad \tau_k \in [\tau_*, \tau^*], \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \tau_0 + 0$$

предел y^* каждой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{y_k\}_{k \rightarrow \infty}$, $y_k \in Y(\tau_k)$ является решением задачи

$$\psi'(0, y, x_{\tau_0}(t^*))\dot{z}(\tau_0 + 0) \rightarrow \min, \quad y \in Y(\tau_0) \quad (2.4)$$

Пусть y – произвольный вектор из $Y(\tau)$. Обозначим

$$M = \{1, \dots, m\}, \quad M_a(\tau) = \{i \in M : f_i(x_\tau(t^*)) = 0\}$$

$$\{t_j(\tau), j = 1, 2, \dots, p(\tau)\} = \{t \in T : \psi'(t, y, x_\tau(t^*))b = 0\} \quad (2.5)$$

$$t_j(\tau) < t_{j+1}(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, p(\tau) - 1$$

Считаем, что $p(\tau) = 0$ при $\{t \in T : \psi'(t, y, x_\tau(t^*))b = 0\} = \emptyset$.

Пусть $q_j (j = 1, 2, \dots, p(\tau))$ – такие числа, что

$$W^{(q)}(t_j(\tau)) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, q_j - 1; \quad W^{(q_j)}(t_j(\tau)) \neq 0 \quad (2.6)$$

где $W^{(q)}(t) = \partial^q \psi'(t, y, x_\tau(t^*))b / \partial t^q (q = 1, 2, \dots)$. Сформируем матрицу

$$\Phi(\tau, y) = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f_i(x_\tau(t^*))}{\partial x} a^{(q)}(t_j(\tau)), q = 0, 1, \dots, q_j - 1; j = 1, 2, \dots, p(\tau) \\ i \in M_a(\tau) \end{array} \right\|$$

$$(a(t) = F(t)b, a^{(q)}(t) = d^q a(t) / dt^q, \quad \dot{F}(t) = -F(t)A, F(t^*) = E)$$

Здесь и далее считается, что множества индексов, записанные в виде $j = 1, 2, \dots, p$ либо $\{1, 2, \dots, p\}$, пусты при $p = 0$, а

$$\text{rank} \left\| \begin{matrix} a_{ij}, j = 1, 2, \dots, p \\ i \in P \end{matrix} \right\| = 0 \text{ при } p = 0 \text{ либо } P = \emptyset.$$

Среди векторов $y \in Y(\tau)$ найдется такой, что

$$\text{rank } \Phi(\tau, y) = |M_a(\tau)| \quad (2.7)$$

Действительно, предположим, что для данного вектора $y \in Y(\tau)$ справедливо соотношение $\text{rank } \Phi(\tau, y) = k < |M_a(\tau)|$. Тогда существует такой вектор $\Delta y \in R^m$, $\Delta y \neq 0$, что

$$\left(\sum_{i \in M_a(\tau)} \frac{\partial f'_i(x_\tau(t^*))}{\partial x} \Delta y_i + \frac{\partial f'_0(x_\tau(t^*))}{\partial x} \right) a^{(q)}(t_j(\tau)) = 0$$

$$q = 0, 1, \dots, q_j - 1; j = 1, 2, \dots, p(\tau)$$

$$\Delta y_i = 0, i \in M \setminus M_a(\tau) \quad (2.8)$$

Из (2.8) заключаем, что $y + \sigma \Delta y \in Y(\tau)$ при всех достаточно малых $\sigma > 0$. Обозначим через σ_0 максимальное $\sigma > 0$, при котором $y + \sigma \Delta y \in Y(\tau)$. В силу ограниченности и замкнутости множества $Y(\tau)$ имеем $\sigma_0 < \infty$. Положим $\bar{y} = y + \sigma_0 \Delta y$. По построению $\bar{y} \in Y(\tau)$. Обозначим через $\bar{t}_j(\tau), \bar{q}_j (j = 1, 2, \dots, \bar{p}(\tau))$ моменты (2.5) и числа (2.6), соответствующие вектору $\bar{y}$. По построению, $\text{rank } \Phi(\tau, \bar{y}) > \text{rank } \Phi(\tau, y)$. Следовательно, не более чем через $|M_a(\tau)| - k$ шагов будет найден вектор $\tilde{y} \in Y(\tau)$, для которого выполнено равенство (2.7).

В дальнейшем будем обозначать через $y(\tau)$ векторы из множества $Y(\tau)$, которые обладают свойством (2.7). Выше показано, что множество таких векторов не пусто.

Пусть $y(\tau) \in Y(\tau)$. Обозначим через $t_j(\tau), q_j (j = 1, 2, \dots, p(\tau))$ моменты (2.5) и числа (2.6), соответствующие вектору $y(\tau)$. Положим

$$M_0(\tau) = \{i \in M_a(\tau) : y_i(\tau) = 0\}$$

$$L(\tau) = \{j \in \{1, \dots, p(\tau)\} : q_j > 1\}, \quad k(\tau) = u_\tau(+0)$$

$$l_*(\tau) = 1 \text{ при } t_1(\tau) = 0, \quad l_*(\tau) = 0 \text{ при } t_1(\tau) > 0 \text{ либо } p(\tau) = 0$$

$$l^*(\tau) = 1 \text{ при } t_{p(\tau)}(\tau) = t^*, \quad l^*(\tau) = 0 \text{ при } t_{p(\tau)}(\tau) < t^* \text{ либо } p(\tau) = 0$$

Совокупности параметров

$$S(\tau) = \{p(\tau), k(\tau), M_a(\tau), l_*(\tau), l^*(\tau), M_0(\tau), L(\tau)\}$$

$$Q(\tau) = \{t_j(\tau), j = 1, 2, \dots, p(\tau); y(\tau)\}$$

назовем структурой и определяющими элементами (соответствующими вектору $y(\tau)$) решения.

Будем говорить, что решение $u_\tau(\cdot)$ – невырожденное (значение параметра τ – регулярная точка), если

$$\beta(\tau) = |M_0(\tau)| + l_*(\tau) + l^*(\tau) + |L(\tau)| = 0$$

Далее будет показано, что понятие невырожденности решения характеризует устойчивость структуры решения к малым вариациям параметра τ .

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $y(\tau) \in Y(\tau)$. Если $\beta(\tau) = 0$, то $|Y(\tau)| = 1$.

Доказательство. Обозначим через $t_j(\tau)$, q_j ($j = 1, 2, \dots, p(\tau)$) моменты (2.5) и числа (2.6), соответствующие вектору $y = y(\tau)$. Отметим, что, согласно договоренности, для $y(\tau)$ выполняется условие (2.7).

Предположим вначале, что $p(\tau) = 0$. Тогда из условия (2.7) получаем $|M_a(\tau)| = 0$. Из второго условия соотношений принципа максимума (2.2) следует, что $Y(\tau) = y(\tau) = 0$. Для случая $p(\tau) = 0$ лемма доказана.

Предположим теперь, что $p(\tau) \geq 1$. Из равенства $\beta(\tau) = 0$ следует, что

$$q_j = 1, j = 1, 2, \dots, p(\tau), l_*(\tau) = l^*(\tau) = 0 \quad (2.9)$$

и тогда условие (2.7) принимает вид

$$\text{rang} \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f'_i(x_\tau(t^*))}{\partial x} a(t_j(\tau)), j = 1, 2, \dots, p(\tau) \\ i \in M_a(\tau) \end{array} \right\| = |M_a(\tau)| \quad (2.10)$$

Из соотношений (2.9) следует, что все моменты $t_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \dots, p(\tau)$) являются точками переключения управления $u_\tau(\cdot)$. Учитывая это и соотношения (2.2), заключаем, что для любого вектора $y \in Y(\tau)$ должны выполняться равенства

$$\left(\sum_{i \in M_a(\tau)} \frac{\partial f'_i(x_\tau(t^*))}{\partial x} y_i + \frac{\partial f'_0(x_\tau(t^*))}{\partial x} \right) a(t_j(\tau)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p(\tau); \quad y_i = 0, i \in M \setminus M_a(\tau).$$

В силу условия (2.10) последняя система не может иметь более одного решения, т.е. $|Y(\tau)| \leq 1$. Поскольку $Y(\tau) \neq \emptyset$, то $|Y(\tau)| = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. Свойство невырожденности (вырожденности) управления $u_\tau(\cdot)$ не зависит от выбора вектора $y(\tau) \in Y(\tau)$.

Доказательство. Если для вектора $y(\tau) \in Y(\tau)$ имеем $\beta(\tau) = 0$, то, согласно определению, управление $u_\tau(\cdot)$ является невырожденным и, кроме того, согласно лемме 1, $y(\tau) = Y(\tau)$. Очевидно, что в этом случае нет другого вектора $\bar{y}(\tau) \in Y(\tau)$, для которого имело бы место неравенство $\bar{\beta}(\tau) \neq 0$.

Предположим теперь, что $\beta(\tau) \neq 0$. Согласно определению, управление $u_\tau(\cdot)$ – вырожденное. Допустим, что существует вектор $\bar{y}(\tau) \in Y(\tau)$, удовлетворяющий условию (2.7), для которого $\bar{\beta}(\tau) = 0$. Но тогда, согласно лемме 1, $|Y(\tau)| = 1$, что противоречит предположению $y(\tau) \in Y(\tau)$, $\bar{y}(\tau) \in Y(\tau)$, $\bar{y}(\tau) \neq y(\tau)$. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы 2.

Из леммы 2 следует корректность определения невырожденного управления и регулярной точки.

3. Свойства решений в окрестности регулярной точки. Пусть при некотором значении параметра $\tau_0 \in [\tau_*, \tau^*]$ известно оптимальное управление $u_{\tau_0}(\cdot)$ задачи ОС(τ_0) и некоторый вектор $y(\tau_0) \in Y(\tau_0)$. Обозначим через $S(\tau_0)$, $Q(\tau_0)$ структуры и определяющие элементы, соответствующие вектору $y(\tau_0)$ через $T^+(\tau_0)$ – достаточно малую правостороннюю окрестность точки τ_0 . Исследуем свойства решений задач ОС(τ) при $\tau \in T^+(\tau_0)$.

Предположим, что τ_0 – регулярная точка. В этом случае, согласно лемме 1, множество $Y(\tau_0)$ состоит из одного элемента, и в силу свойства 2 отображения (2.3) имеем

$y(\tau_0 + 0) = y(\tau_0)$. Учитывая это, по аналогии с указанным ранее [11] можно показать, что для $\tau \in T^+(\tau_0)$ параметры $S(\tau)$, $Q(\tau)$ однозначно находятся из соотношений

$$\begin{aligned} S(\tau) &= S, f(\mu(\tau, k, t_j(\tau), j = 1, 2, \dots, p)) = 0, i \in M_* \\ y_i(\tau) &= 0, i \in M \setminus M_* \\ c'(\mu(\tau, k, t_j(\tau), j = 1, \dots, p), y(\tau)) a(t_j(\tau)) &= 0, j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\mu(\tau, k, t_j, j = 1, 2, \dots, p) = F(0)z(\tau) + \sum_{j=0}^p k(-1)^j \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(t)dt, \quad t_0 = 0, \quad t_{p+1} = t^*$$

$$c'(x, y) = \partial f'_0(x) / \partial x + y' \partial f'(x) / \partial x$$

$$p = p(\tau_0), \quad k = k(\tau_0), \quad S = S(\tau_0), \quad M_* = M_a(\tau_0)$$

и начальных условий

$$t_j(\tau_0 + 0) = t_j(\tau_0), \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad y(\tau_0 + 0) = y(\tau_0) \quad (3.2)$$

Оптимальное управление $u_\tau(\cdot)$ в задаче ОС(τ) при $\tau \in T^+(\tau_0)$ имеет вид

$$u_\tau(t) = (-1)^j k, \quad t \in [t_j(\tau), t_{j+1}(\tau)], \quad j = 0, 1, \dots, p \quad (3.3)$$

$$t_0(\tau) \equiv 0, \quad t_{p+1}(\tau) \equiv t^*$$

Таким образом, если τ_0 – регулярная точка, то в ее окрестности решения задач ОС(τ) однозначно определяются соотношениями (3.1) – (3.3).

4. Построение решений в окрестности нерегулярной точки. Предположим теперь, что τ_0 не является регулярной точкой, и исследуем свойства решений задач ОС(τ) при $\tau \in T^+(\tau_0)$. Отметим, что теперь множество $Y(\tau_0)$ может состоять более чем из одного вектора, в силу чего в общем случае $y(\tau_0 + 0) \neq y(\tau_0)$. Кроме того, при $\tau = \tau_0$ происходит смена структуры решения: $S(\tau_0 + 0) \neq S(\tau_0)$.

Значит, для построения решений задач ОС(τ) при $\tau \in T^+(\tau_0)$ нужно прежде всего определить вектор $y(\tau_0 + 0)$ и параметры $S(\tau_0 + 0)$, $Q(\tau_0 + 0)$.

Построение вектора $y(\tau_0 + 0)$. Из свойства 3 отображения (2.3) следует, что вектор $y(\tau_0 + 0)$ является решением задачи (2.4), которая в подробной записи имеет вид

$$\begin{aligned} -(h'_0 + y'h)F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0) &\rightarrow \min_y \\ -(h'_0 + y'h)a(t) &\geq 0, \quad t \in T^*(\tau_0); \quad -(h'_0 + y'h)a(t) \leq 0, \quad t \in T_*(\tau_0) \\ y_i &\geq 0, \quad i \in M_a; \quad y_i = 0, \quad i \in M \setminus M_a \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$M_a = M_a(\tau_0), \quad h_i = \partial f_i(x_{\tau_0}(t^*)) / \partial x, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad h = \begin{pmatrix} h'_i \\ i = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix}$$

$T^*(\tau)$, $T_*(\tau)$ – замыкания множеств $\{t \in T : u_\tau(t) = 1\}$, $\{t \in T : u_\tau(t) = -1\}$ соответственно.

Обозначим

$$\{l_j, j = 1, 2, \dots, r\} = \{t \in (0, t^*) : u_{\tau_0}(t-0) \neq u_{\tau_0}(t+0)\}$$

$$m_* = \text{rank} \begin{pmatrix} h'_i a(l_j), \quad j = 1, 2, \dots, r \\ i \in M_a \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

(Считаем, что $r = 0$, если у $u_{\tau_0}(\cdot)$ нет точек разрыва.)

Будем считать, что имеет место

Предположение 1 (аналог условия Слейтера для задачи (4.1)). Выполняется одно из условий: а) $m_* = |M_a|$ либо б) $m_* < |M_a|$ и не существует такого $\bar{t} \in T$, что

$$(h'_0 + y'h)a(\bar{t}) = (h'_0 + y'h)\dot{a}(\bar{t}) = 0, \quad \forall y \in Y(\tau_0)$$

Из свойства 1 множества $Y(\tau_0)$ следует, что задача (4.1) имеет решение. Пусть y^* – решение задачи (4.1). Обозначим

$$\begin{aligned} \{t_j^*, j = 1, 2, \dots, p^*\} &= \{t \in T : (h'_0 + y^*h)a(t) = 0\} \\ t_j^* &< t_{j+1}^*, \quad j = 1, 2, \dots, p^* - 1 \\ J^* &= \{1, 2, \dots, p^*\}, \quad J_R^* = \{j \in J^* : t_j^* \in \{l_i, i = 1, 2, \dots, r\}\} \\ M_a^* &= \{i \in M_a : y_i^* > 0\}, \quad M_a^0 = M_a \setminus M_a^* \\ \alpha_j &= -u_{\tau_0}(t_j^* + 0) \quad \text{при } t_j^* \neq t^*; \quad \alpha_j = u_{\tau_0}(t_j^* - 0) \quad \text{при } t_j^* = t^*; \quad j \in J^* \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из предположения 1 и критерия оптимальности плана y^* в задаче (4.1) следует, что существуют такие числа $\rho_j, j \in J^*$, что выполняются соотношения

$$\rho_j \geq 0, \quad j \in J^* \setminus J_R^*; \quad \gamma_i = 0, \quad i \in M_a^*; \quad \gamma_i \leq 0, \quad i \in M_a^0 \quad (4.4)$$

где

$$\gamma_i = h'_i \left(\sum_{j \in J^*} \rho_j \alpha_j a(t_j^*) + F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0) \right), \quad i \in M_a$$

Будем считать, что на решении y^* задачи (4.1) выполняется

Предположение 2. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (h'_0 + y^*h)\ddot{a}(t_j^*) &\neq 0 \quad \text{при } t_j^* \in (0, t^*), \quad j \in J^* \setminus J_R^* \\ (h'_0 + y^*h)\dot{a}(t_j^*) &\neq 0 \quad \text{при } t_j^* = 0 \vee t^* \quad \text{либо } j \in J_R^* \end{aligned}$$

$$k_* = \text{rank} \left\| \begin{matrix} h'_i a(t_j^*), & j \in J^* \\ i \in M_a^* \end{matrix} \right\| = \min\{|M_a^*|, |J^*|\}$$

Построение структуры $S(\tau_0 + 0)$ и определяющих элементов $Q(\tau_0 + 0)$. Возможны следующие случаи: $k_* = |M_a^*| < |J^*|$ (случай А) и $k_* = |J^*| \leq |M_a^*|$ (случай Б).

Рассмотрим случай А. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \text{diag}(d(t_j^*), \quad j \in J^*), \quad d(t) = \left| \frac{\partial \psi'(t, y^*, x_{\tau_0}(t^*))b}{\partial t} \right| \\ D &= D(x_{\tau_0}(t^*), y^*), \quad D(x, y) = \frac{\partial^2 f_0(x)}{\partial x^2} + \sum_{s=1}^m y_s \frac{\partial^2 f_s(x)}{\partial x^2} \\ B &= (B_{(j)} = 2\alpha_j a(t_j^*), \quad j \in J^*), \quad s = (s_j, j \in J^*) \end{aligned}$$

и рассмотрим задачу квадратичного программирования

$$\begin{aligned} I(s) &= [(F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0) + Bs)'D(F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0) + Bs) + s'\tilde{D}s]/2 \rightarrow \min_s \\ h'_i(Bs + F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0)) &= 0, \quad i \in M_a^* \\ h'_i(Bs + F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0)) &\leq 0, \quad i \in M_a^0; \quad s_j \geq 0, \quad j \in J^* \setminus J_R^* \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из соотношений (4.4) видно, что в задаче (4.5) существует допустимый план. Очевидно, что функция $I(s)$ ограничена снизу. Следовательно, задача (4.5) имеет решение.

Пусть $s^* = (s_j^*, j \in J^*)$ – решение задачи (4.5). Обозначим

$$J_{(*)} = J_R^* \cup \{j \in J^* \setminus J_R^* : s_j^* \neq 0\}, \quad J_{(0)} = \{j \in J_{(*)} : d(t_j^*) = 0\} \quad (4.6)$$

$$M_{a*}^0 = \{i \in M_a^0 : h'_i(Bs^* + F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0)) = 0\}, \quad \bar{M} = M_a^* \cup M_{a*}^0$$

Согласно критерию оптимальности, найдутся такие числа $\xi_i, i \in \bar{M}$, $\xi_i \geq 0$, $i \in M_{a*}^0$, что для компонент вектора

$$\Delta = (\Delta_j, j \in J^*) = B'(D(F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0) + Bs^*) + \sum_{i \in \bar{M}} \xi_i h_i) + \tilde{D}s^*$$

выполняются соотношения

$$\Delta_j = 0, \quad j \in J_{(*)}; \quad \Delta_j \geq 0, \quad j \in J^* \setminus J_{(*)}$$

Предположим, что выполняются следующие условия, которые в совокупности с предположением 2 гарантируют единственность решений y^*, s^* задач (4.1) и (4.5) соответственно.

Предположение 3. В случае А имеют место соотношения

$$\Delta_j > 0, \quad j \in J^* \setminus J_{(*)}; \quad \xi_i > 0, \quad i \in M_{a*}^0; \quad \det P_{(*)} \neq 0$$

где

$$P_{(*)} = \begin{bmatrix} \bar{H}B_{(*)} & 0 \\ R_{(*)} & B'_{(*)}\bar{H}' \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} h'_i \\ i \in \bar{M} \end{bmatrix}$$

$$B_{(*)} = (B_{(j)}, j \in J_{(*)}), \quad R_{(*)} = B'_{(*)}DB_{(*)} + \text{diag}(d(t_j^*), j \in J_{(*)})$$

Положим

$$\bar{p} = |J_{(*)}| + |J_{(0)}|, \quad \bar{k} = -u_{\tau_0}(+0) \text{ при } \bar{t}_1 = 0, \quad \bar{k} = u_{\tau_0}(+0) \text{ при } \bar{t}_1 \neq 0$$

$$\{\bar{t}_j, j = 1, 2, \dots, \bar{p}\} = \{t_j^*, j \in J_{(*)}; \quad t_j^*, j \in J_{(0)}\} \quad (4.7)$$

$$\bar{t}_j \leq \bar{t}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{p} - 1$$

Теорема 1. Пусть τ_0 – нерегулярная точка и для задач (4.1), (4.5) выполняются предположения 1–3. Тогда

1) при $\tau = \tau_0 + 0$ структура и определяющие элементы решения имеют вид

$$S(\tau_0 + 0) = \{p(\tau_0 + 0) = \bar{p}, \quad k(\tau_0 + 0) = \bar{k}, \quad M_a(\tau_0 + 0) = \bar{M}\} \\ l_*(\tau_0 + 0) = l^*(\tau_0 + 0) = 0, \quad M_0(\tau_0 + 0) = L(\tau_0 + 0) = \emptyset \quad (4.8)$$

$$Q(\tau_0 + 0) = \{t_j(\tau_0 + 0) = \bar{t}_j, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{p}; \quad y(\tau_0 + 0) = y^*\}$$

2) при $\tau \in T^+(\tau_0) \setminus \tau_0$ задачи ОС(τ) имеют невырожденные решения, структура и определяющие элементы которых однозначно находятся из соотношений (3.1), где $p = \bar{p}$, $k = \bar{k}$, $M_* = \bar{M}$, $S = S(\tau_0 + 0)$, и начальных условий $Q(\tau_0 + 0)$. Оптимальное управление $u_\tau(\cdot)$ при $\tau \in T^+(\tau_0) \setminus \tau_0$ строится по правилам (3.3).

Схема доказательства теоремы 1 аналогична доказательству теоремы из [11].

Рассмотрим случай Б. Отметим, что в этом случае задача (4.5) имеет единственный допустимый план $s^* = (s_j^* = \rho_j / 2, j \in J^*)$. Следовательно, он является единственным оптимальным планом задачи (4.5). Положим

$$J_{(*)} = J^*, J_{(0)} = \{j \in J_{(*)} : d(t_j^*) = 0\}, \bar{M} = M_a^* \quad (4.9)$$

Тогда условия, гарантирующие единственность решения y^* задачи (4.1), принимают следующий вид

Предположение 3'. В случае Б имеют место соотношения

$$\gamma_i < 0, i \in M_a^0; \rho_j > 0, j \in J_{(*)} \setminus J_R^*$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} h'_i a(t_j^*), j \in J_{(*)}; h'_i \dot{a}(t_j^*), j \in J_{(0)} \\ i \in \bar{M} \end{pmatrix} = |\bar{M}|$$

Определим параметры $\bar{p}, \bar{k}, \bar{t}_j (j = 1, 2, \dots, \bar{p})$ по правилам (4.7). Для случая Б справедлива теорема 1, если предположение 3 заменить на предположение 3'.

Таким образом, при выполнении предположений 1–3(3') теорема 1 позволяет однозначно определить решения задач ОС(τ) в правосторонней окрестности $T^+(\tau_0)$ нерегулярной точки τ_0 по решению задач ОС(τ_0). Аналогичным образом исследуются свойства решений задач ОС(τ) в левосторонней окрестности $T^-(\tau_0)$ точки τ_0 .

5. Зависимость критерия качества от параметра. Экстремальное свойство структуры $S(\tau_0 + 0)$. Выше приведены правила построения вектора $y(\tau_0 + 0)$ и структуры $S(\tau_0 + 0)$: вектор $y(\tau_0 + 0)$ определялся по решению задачи (4.1), а структура $S(\tau_0 + 0)$ – по решению задачи (4.5). Описанным выше правилам можно дать другую интерпретацию, связанную со свойствами функции

$$f_*(\tau) = f_0(x_\tau(t^*)), \tau \in [\tau_*, \tau^*] \quad (5.1)$$

Рассмотрим эту интерпретацию. Известно, что при сделанных выше предположениях относительно функций $f_i(x), x \in R^n (i = 0, 1, \dots, m); z(\tau), \tau \in [\tau_*, \tau^*]$, функция (5.1) будет непрерывной. Исследуем производные функции (5.1).

Пусть $\tau_0 \in [\tau_*, \tau^*]$. Можно показать, что

$$df_*(\tau_0 + 0) / d\tau = (h'_0 + y'(\tau_0 + 0)h)F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0) \quad (5.2)$$

Видно, что при известном решении $u_{\tau_0}(\cdot)$ задачи ОС(τ_0) и заданном векторе $\dot{z}(\tau_0 + 0)$ первая производная функции (5.1) при $\tau = \tau_0 + 0$ зависит только от выбора вектора $y(\tau_0 + 0)$ и не зависит от выбора структуры $S(\tau_0 + 0)$. Сравнивая соотношения (4.1) и (5.2), заключаем, что вектор $y(\tau_0 + 0) \in Y(\tau_0)$ выбирается из условия максимизации первой производной функции (5.1) в точке $\tau = \tau_0 + 0$.

Пусть вектор $y(\tau_0 + 0) = y^*$ определен. Введем обозначения (4.2), (4.3). Обозначим через $J_{(i)}, M_{(i)} (i = 1, 2, \dots, \varepsilon)$ всевозможные пары подмножеств из $J^* \setminus J_R^*$ и M_a^0 . Положим

$$J_{(*)}^{(i)} = J_R^* \cup J_{(i)}, J_{(0)}^{(i)} = \{j \in J_{(*)}^{(i)} : d(t_j^*) = 0\}, \bar{M}^{(i)} = M_a^* \cup M_{(i)}$$

и построим параметры $p^{(i)}, k^{(i)}, Q^{(i)} = \{t_j^{(i)}, j = 1, 2, \dots, p^{(i)}; y^*\}$ по правилам (4.7), заменяя $J_{(*)}, J_{(0)}, \bar{M}$ на $J_{(*)}^{(i)}, J_{(0)}^{(i)}, \bar{M}^{(i)}$. Далее обозначим через E множество таких индексов $i \in \{1, \dots, \varepsilon\}$, для которых существуют непрерывные функции $t_j^{(i)}(\tau) (j = 1, 2, \dots, p^{(i)}), y^{(i)}(\tau), \tau \in T^+(\tau_0)$, удовлетворяющие соотношениям (3.1), где $p = p^{(i)}, k = k^{(i)}$,

$M_* = \overline{M}^{(i)}$, начальным условиям $\{t_j^{(i)}(\tau_0 + 0), j = 1, 2, \dots, p^{(i)}; y^{(i)}(\tau_0 + 0)\} = Q^{(i)}$ и неравенствам

$$t_j^{(i)}(\tau) \leq t_{j+1}^{(i)}(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, p^{(i)} - 1; \quad t_1^{(i)}(\tau) \geq 0, \quad t_{p^{(i)}}^{(i)} \leq t^* \quad (5.3)$$

$$f_l(\mu(\tau, k^{(i)}, t_j^{(i)}(\tau), j = 1, 2, \dots, p^{(i)})) \leq 0, \quad l \in M \setminus \overline{M}^{(i)}, \quad \tau \in T^+(\tau_0)$$

Очевидно, что первые три элемента

$$S^*(\tau_0 + 0) = \{p(\tau_0 + 0), k(\tau_0 + 0), M_a(\tau_0 + 0)\}$$

искомой структуры $S(\tau_0 + 0)$ принадлежат множеству параметров

$$S^{*(i)} = \{p^{(i)}, k^{(i)}, \overline{M}^{(i)}\}, \quad i \in E$$

Отметим, что по существу именно параметры

$$S^*(\tau) = \{p(\tau), k(\tau), M_a(\tau)\}$$

и определяют структуру $S(\tau)$, если не существует такого отрезка $[\bar{\tau}, \bar{\tau}] \subset [\tau_*, \tau^*]$, $\bar{\tau} < \bar{\tau}$ где $\beta(\tau) > 0$, $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau}]$.

Для $i \in E$, $\tau \in T^+(\tau_0)$ построим управления $u_\tau^{(i)}(\cdot)$:

$$u_\tau^{(i)}(t) = (-1)^j k^{(i)}, \quad t \in [t_j^{(i)}(\tau), t_{j+1}^{(i)}(\tau)[, \quad j = 0, 1, \dots, p^{(i)} \quad (5.4)$$

$$t_0^{(i)}(\tau) = 0, \quad t_{p^{(i)}+1}^{(i)}(\tau) = t^*$$

Из соотношений (3.1) и (5.3) следует, что управления $u_\tau^{(i)}(\cdot)$, $i \in E$, допустимы в задаче ОС(τ) при $\tau \in T^+(\tau_0)$.

Пусть $x_\tau^{(i)}(\cdot)$ – траектория, соответствующая управлению $u_\tau^{(i)}(\cdot)$ и начальному состоянию $z(\tau)$. Рассмотрим функции

$$f_*^{(i)}(\tau) = f_0(x_\tau^{(i)}(t^*)), \quad \tau \in T^*(\tau_0), \quad i \in E$$

Очевидно, что

$$f_*^{(i)}(\tau_0 + 0) = f_*(\tau_0 + 0) = f_0(x_{\tau_0}(t^*)) = \text{const}$$

$$df_*^{(i)}(\tau_0 + 0)/d\tau = df_*(\tau_0 + 0)/d\tau = (h'_0 + y^* h)F(0)\dot{z}(\tau_0 + 0) = \text{const}, \quad i \in E$$

Подсчитаем $d^2 f_*^{(i)}(\tau)/d\tau^2$. Для этого введем векторы $s^{(i)} = (s_j^{(i)}, j \in J^*)$:

$$\begin{aligned} s_j^{(i)} &= t_{q(j)+1}^{(i)}(\tau_0) - t_{q(j)}^{(i)}(\tau_0), \quad j \in J_{(0)}^{(i)} \\ s_j^{(i)} &= t_{q(j)}^{(i)}(\tau_0), \quad j \in J_{(*)}^{(i)} \setminus (J_{(0)}^{(i)} \cup J_{(k)}^{(i)}) \\ s_j^{(i)} &= -t_{q(j)}^{(i)}(\tau_0), \quad j \in J_{(k)}^{(i)} = \{j \in J_{(*)}^{(i)} : t_j^* = t^*\}; \quad s_j^{(i)} = 0, \quad j \in J^* \setminus J_{(*)}^{(i)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $q(j)$ – такой индекс из $\{1, \dots, p^{(i)}\}$, что

$$t_{q(j)-1}^{(i)} \neq t_{q(j)}^{(i)} = t_j^*, \quad j \in J_{(*)}^{(i)}$$

Можно показать, что

$$d^2 f_*^{(i)}(\tau_0 + 0)/d\tau^2 = 2I(s^{(i)}) \quad (5.6)$$

Из соотношений (3.1), (5.3) следует, что компоненты вектора $s^{(i)}$ (5.5) удовлетворяют ограничениям задачи (4.5).

Таким образом, при $i \in E$ каждому набору параметров $S^{*(i)}$ соответствует план $s^{(i)}$ задачи (4.5), причем удвоенное значение целевой функции $I(s)$ на этом плане равно значению в точке $\tau = \tau_0 + 0$ второй производной целевой функции задач ОС(τ), $\tau \in T^+(\tau_0)$, подсчитанной вдоль управлений $u_\tau^{(i)}(\cdot)$ (5.4), порожденных набором параметров $S^{*(i)}$.

По построению, параметрам $S^*(\tau_0 + 0) = S^{*(i_0)}$ соответствует вектор $s^* = s^{(i_0)}$, являющийся решением задачи (4.5). Следовательно,

$$d^2 f_*^{(i)}(\tau_0 + 0) / d\tau^2 |_{\tau=\tau_0+0} \geq d^2 f_*^{(i_0)}(\tau_0 + 0) / d\tau^2 |_{\tau=\tau_0+0}, \quad i \in E$$

Отсюда видно, что описанным выше правилам построения элементов $S^*(\tau_0 + 0)$ структуры $S(\tau_0 + 0)$ можно дать следующую экстремальную интерпретацию: элементы $S^*(\tau_0 + 0)$ структуры $S(\tau_0 + 0)$ принадлежат множеству параметров $S^{*(i)}$, $i \in E$, на которых достигается минимум в выражении

$$\min_{i \in E} d^2 f_*^{(i)}(\tau_0 + 0) / d\tau^2 \quad (5.7)$$

Очевидно, что если минимум в последнем выражении достигается на единственном $i_0 \in E$, то элементы $S^*(\tau_0 + 0)$ структуры $S(\tau_0 + 0)$ находятся однозначно.

Отметим, что условия, сформулированные в предположениях 1–3 (3') гарантируют, что

- 1) y^* – единственный вектор, на котором достигается максимум первой производной функции (5.1) при $y \in Y(\tau_0)$;
- 2) максимум в (5.7) достигается на единственном индексе $i_0 \in E$;
- 3) имеют место соотношения

$$l_*(\tau_0 + 0) = l^*(\tau_0 + 0) = 0; \quad L(\tau_0 + 0) = M_0(\tau_0 + 0) = \emptyset$$

Таким образом, при выполнении предположений 1–3 (3') вектор $y(\tau_0 + 0)$ и структура $S(\tau_0 + 0)$ строятся однозначно по описанным выше правилам.

Если условия предположений 1–3 (3') нарушаются, то описанные выше правила не гарантируют однозначного построения $y(\tau_0 + 0)$ и $S(\tau_0 + 0)$. Однако, отметим, что вероятность реализации таких ситуаций очень мала [13].

6. Метод продолжения решения по параметру. Используя схему стандартного метода продолжения по параметру [14, 15], специальный метод решения систем нелинейных уравнений в окрестности нерегулярной точки [16, 17], а также полученные выше правила построения новых структуры и определяющих элементов в нерегулярной точке, легко получить численную реализацию метода, позволяющего строить решения $u_\tau(\cdot)$ задач ОС(τ) для всех значений параметра $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$. Приведем общую схему этого метода.

Предположим, что в момент $\tau = \tau_*$ известно оптимальное управление (ОУ) $u_{\tau_*}(\cdot)$ задачи ОС(τ_*), его структура $S(\tau_*)$ и определяющие элементы $Q(\tau_*)$.

Если τ^* – регулярная точка, то полагаем

$$\tau_0 := \tau_*, \quad p := p(\tau_*), \quad k := k(\tau_*), \quad M_* := M_a(\tau_*)$$

$$\bar{t}_j := t_j(\tau_*) (j = 1, 2, \dots, p), \quad \bar{y} := y(\tau_*)$$

и переходим к операциям A^* . Если τ_* – нерегулярная точка, то, положив $\tau_0 := \tau_*$, переходим к операциям B^* .

Операции A^* . Пусть известны параметры: τ_0, p, k, M_* ; $\bar{t}_j (j = 1, 2, \dots, p), \bar{y}$.

Для $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ ОУ $u_\tau(\cdot)$ задачи ОС(τ) строятся по правилам (3.3), где моменты переключения $t_j(\tau) (j = 1, 2, \dots, p)$, а также вектор $y(\tau)$ однозначно находятся из соотношений (3.1) и начальных условий

$$t_j(\tau_0 + 0) = \bar{t}_j (j = 1, 2, \dots, p); y(\tau_0 + 0) = \bar{y}$$

Здесь $\tau_1 = \min\{\tau^*, \bar{\tau}_1\}$, где $\bar{\tau}_1$ – ближайшее к τ_0 справа нерегулярное значение параметра. Если $\tau_1 = \tau^*$, то алгоритм заканчивает свою работу. При $\tau_1 < \tau^*$ полагаем $\tau_0 := \tau_1$ и переходим к операциям B^* .

Операции B^* . Пусть для нерегулярной точки $\tau = \tau_0$ известны ОУ $u_{\tau_0}(\cdot)$ задачи ОС(τ_0), его структура $S(\tau_0)$ и определяющие элементы $Q(\tau_0) = \{t_j(\tau_0), j = 1, 2, \dots, p(\tau_0); y(\tau_0)\}$. Используя эту информацию, сформируем и решим задачу (4.1). Вектор $y(\tau_0)$ можно использовать в качестве начального плана.

Пусть выполняется предположение 1. В результате решения задачи (4.1) будут построены оптимальный план y^* и числа $\rho_j, j \in J^*$, удовлетворяющие соотношениям (4.4).

Заметим, что при $m_* = |M_a|$ вектор $y(\tau_0)$ является единственным и, следовательно, оптимальным планом задачи (4.1). Значит, в этом случае нет необходимости решать задачу (4.1).

Пусть на векторе y^* выполняется предположение 2. Сформируем и решим задачу (4.5). Числа $\rho_j/2, j \in J^*$ можно взять в качестве начального плана. Заметим, что в случае Б (см. разд. 5) нет необходимости решать задачу (4.5).

Обозначим через s^* оптимальный план задачи (4.5). Пусть предположение 3(3') выполняется. Положим $\bar{y} = y^*$, определим множество $\bar{M}$ по правилу (4.6), (4.9) и параметры $\bar{p}, \bar{k}, \bar{t}_j (j = 1, 2, \dots, \bar{p})$ по правилам (4.7). Используя эти параметры, переходим к операциям A^* , полагая $p = \bar{p}, k = \bar{k}, M_* = \bar{M}$.

Замечания. 1°. Размерности задач (4.1), (4.5) зависят от степени нерегулярности точки τ_0 : чем больше $\beta(\tau_0)$, тем больше размерности задач (4.1), (4.5). Например, при $\beta(\tau_0) = 1$ одна из задач (4.1), (4.5) имеет единственный план (размерность 0), а другая задача имеет план и только одно допустимое направление движения из этого плана (размерность 1).

2°. Если τ – регулярная точка, то матрица Якоби уравнений (3.1) невырожденная. В этом случае для нахождения функций $t_j(\tau) (j = 1, 2, \dots, p)$, $y(\tau)$ из соотношений (3.1) можно использовать любой стандартный метод продолжения решений систем нелинейных уравнений [15]. В случае, когда τ – нерегулярная точка, матрица Якоби уравнений (3.1) может оказаться (при $L(\tau) \neq 0$) вырожденной. В этой ситуации стандартные методы работают плохо и для решения уравнений (3.1) в окрестности нерегулярной точки следует использовать специальные методы, например [16].

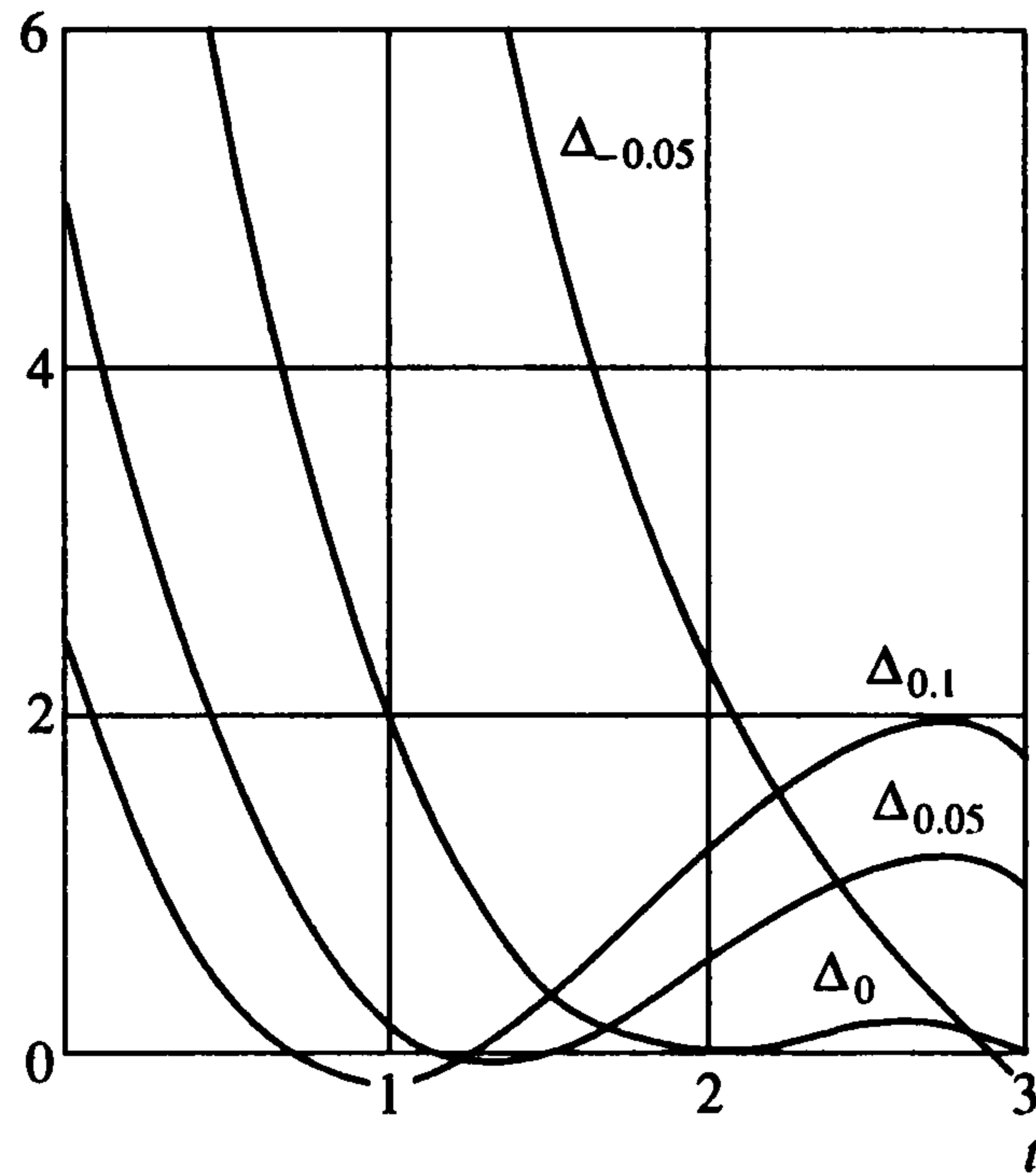
7. Пример. Проиллюстрируем применение предложенной выше схемы метода построения решений семейства задач ОС(τ), $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$, на простейшем примере. Рассмотрим семейство задач ОУ

$$\text{ОС}_*(\tau): \begin{cases} x'(3)x(3)/2 \rightarrow \min \\ \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z(\tau), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 3] \\ f_1(x(3)) := x_4(3) - 0.5 \leq 0 \\ f_2(x(3)) := -x_4(3) - 1.5 \leq 0 \end{cases}$$

где

$$x' = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad z'(\tau) = (-19.125 + 27\tau, 2.5 - 45.5\tau, 3.5 + 36\tau, -3 - 5\tau)$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \in [\tau_* = -0.1, \tau^* = 0.1]$$



Предположим, что при $\tau = \tau_*$ решение задачи $ОС_*(\tau_*)$ известно: ОУ имеет вид

$$u_\tau(t) = 1, \quad t \in [0, t_1(\tau)]; \quad u_\tau(t) = -1, \quad t \in [t_1(\tau), 3] \quad (7.1)$$

где $\tau = \tau_*$, $t_1(\tau_*) = 2.902$. Ему соответствуют структуры и определяющие элементы

$$S(\tau_*) = \{p(\tau_*) = 1, \quad k(\tau_*) = 1, \quad M_a(\tau_*) = \emptyset, \quad l_*(\tau_*) = l^*(\tau_*) = 0, \quad M_0(\tau_*) = L(\tau_*) = \emptyset\}$$

$$Q(\tau_*) = \{t_1(\tau_*) = 2.902; \quad y(\tau_*) = (y_1(\tau_*) = 0, \quad y_2(\tau_*) = 0)\}$$

Решение задачи $ОС_*(\tau_*)$ невырожденное, так как $\beta(\tau_*) = 0$. Согласно сказанному, в разд. 3 при $\tau \in T^+(\tau_*)$ задачи $ОС_*(\tau)$ имеют невырожденную структуру $S(\tau) = S(\tau_*)$ и ОУ вида (7.1), где момент $t_1(\tau)$ однозначно находится из соотношений (3.1), которые в данном примере имеют вид

$$\left(F(0)z(\tau) + \int_0^{t_1(\tau)} a(t)dt - \int_{t_1(\tau)}^3 a(t)dt \right)' a(t_1(\tau)) = 0 \quad (7.2)$$

Здесь

$$a(t) = \begin{pmatrix} (3-t)^3/6 \\ (3-t)^2/2 \\ (3-t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

По построению, $u_\tau(t) = \text{sign } \Delta_\tau(t)$, $t \in [0, 3]$, где

$$\Delta_\tau(t) = \psi'(t, y(\tau) = 0, x_\tau(3))b, \quad t \in [0, 3] \quad (7.3)$$

Для $\tau = -0.05$ на фигуре приведен график функции $\Delta_\tau(t)$, $t \in [0, 3]$.

Согласно разд. 6, ОУ задач $ОС_*(\tau)$ строятся по правилам (7.1), (7.2) для $\tau \in [\tau_*, \tau_1]$, где $\tau_1 > \tau_*$ – значение параметра, при котором происходит вырождение решения. В рассматриваемом примере вырождение происходит при $\tau = \tau_1 = 0$:

$$S(-0) = S(\tau_*), \quad Q(-0) = \{t_1(-0) = 3, \quad y(-0) = 0\}$$

$$S(0) = \{p(0) = 2, \quad k(0) = 1, \quad M_a(0) = \emptyset, \quad l_*(0) = 0, \quad l^*(0) = 1, \quad M_0(0) = \emptyset, \quad L(0) = \{1\}\}$$

$$Q(0) = \{t_1(0) = 2, \quad t_2(0) = 3; \quad y(0) = 0\}$$

Степень вырождения решения равна $\beta(0) = 2$. При $\tau = 0$ график функции $\Delta_\tau(t)$ приведен на фигуре; $u_\tau(t) = 1$.

Для построения новых структур $S(+0)$ и определяющих элементов $Q(+0)$ воспользуемся результатами разд. 4.

Так как при $\tau = 0$ нет активных терминальных ограничений (т.е. $M_a(0) = \emptyset$), то, очевидно, что $y(\tau) \equiv 0$ при $\tau \in T^+(0)$ и нет необходимости решать задачу (4.1) для нахождения $y(+0) = y^* = 0$.

Для построения новой структуры $S(+0)$ сформулируем задачу квадратичного программирования (4.5), которая в данном случае имеет вид

$$(-82, -10)s + 0.5s' \begin{vmatrix} 82/9, & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} s \rightarrow \min_{s=(s_1, s_2)}, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \leq 0$$

и решение

$$s^0 = (s_1^0 = 9, \quad s_2^0 = 0)$$

Предположения 1–3 выполняются, следовательно, согласно теореме 1, новые структуры $S(+0)$ и определяющие элементы $Q(+0)$ строятся по правилам (4.6) – (4.8) и имеют вид

$$S(+0) = \{p(+0) = 2, \quad k(+0) = 1, \quad M_a(+0) = \emptyset, \quad l_*(+0) = l^*(+0) = 0, \quad M_0(+0) = L(+0) = \emptyset\}$$

$$Q(+0) = \{t_1(+0) = 2, \quad t_2(+0) = 2; \quad y(+0) = 0\}$$

При $\tau \in T^+(0)$ ОУ строится по правилу

$$u_\tau(t) = 1, \quad t \in [0, t_1(\tau) \cup [t_2(\tau), 3]; \quad u_\tau(t) = -1, \quad t \in [t_1(\tau), t_2(\tau)] \quad (7.4)$$

Моменты $t_1(\tau), t_2(\tau)$ однозначно находятся из соотношений (3.1), где

$$p = p(+0) = 2, \quad k = k(+0) = 1, \quad M_* = M_a(+0) = \emptyset$$

и начальных условий $Q(+0)$. Для данного примера эти соотношения имеют вид

$$\left(F(0)z(\tau) + \int_0^{t_1(\tau)} a(t)dt - \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} a(t)dt + \int_{t_2(\tau)}^3 a(t)dt \right)' a(t_i(\tau)) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (7.5)$$

При изменении τ от $+0$ до $\tau^* = 0.1$ не происходит вырождение решения. Следовательно, при всех $\tau \in]0, \tau^*]$ решения задач ОС $_{\tau}(\tau)$ строятся по правилу (7.4), где моменты $t_1(\tau), t_2(\tau)$ однозначно определяются из соотношений (7.5).

По построению, $u_\tau(t) = \text{sign } \Delta_\tau(t), t \in [0, 3]$. Для $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$ графики функций $\Delta_\tau(t), t \in T$, (7.3) приведены на фигуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 3–19.
2. Белоусова Е.Р., Зарх М.А. Синтез оптимального управления в линейной задаче быстрого действия четвертого порядка // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 189–197.
3. De Nicolao G., Magni L., Scattolini R. Stability and robustness of nonlinear receding horizon control // Proc. Intern. Symp. on Nonlinear Model Predictive Control: Assessment and Future Directions. Ascona, 1998. P. 77–90.
4. Michalska H., Mayne D. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Cont. 1993. V. 38. № 11. P. 1623–1633.
5. Rao C.V., Rawlings J.B. Nonlinear moving horizon state estimation // Proc. Intern. Symp. on Nonlinear Model Predictive Control: Assessment and Future Directions. Ascona, 1998. P. 146–163.

6. *Hettich R.* Some recent results in parametric semi-infinite programming // *Optimization*. 1995. V. 32. № 4. P. 359–372.
7. *Jongen H.Th., Stein O.* On generic one-parametric semi-infinite optimization // *SIAM J. Optimiz.* 1997. V. 7. № 4. P. 1103–1137.
8. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Optimization problems with perturbations: a guided tour // *SIAM Rev.* 1998. V. 40. № 2. P. 228–264.
9. *Белоліпецкий А.А., Дашко А.Н.* Решение линейной задачи быстрогодействия с помощью продолжения по параметру // *Некоторые задачи теории управления*. М.: ВЦ АН СССР, 1991. С. 3–18.
10. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Theory. N.Y. etc.: Wiley, 1967. = *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
11. *Костюкова О.И.* Исследование решений семейства линейных задач оптимального управления, зависящих от параметра // *Дифференц. управления*. 1998. Т. 34. № 2. С. 197–203.
12. *Гальштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
13. *Golubitsky M., Schaeffer D.G.* Singularities and groups in bifurcation theory. V. 1. N.Y. "Spriger", 1985. 463 p.
14. *Rheinholdt W.G.* Solution fields of nonlinear equations and continuation methods // *SIAM J. Numer. Anal.* 1980. V. 17. № 2. P. 221–237.
15. *Allgower E.L., Georg K.* Numerical Continuation Methods: An Introduction. Berlin, etc.; Springer, 1990. 388 p.
16. *Kunkel P.* Quadratically convergent methods for the computation of unfolded singularities // *SIAM J. Numer. Anal.* 1988. V. 25. № 6. P. 1392–1408.
17. *Kunkel P.* Continuation and collocation for parameter-dependent boundary value problems // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1989. V. 10. № 1. P. 72–88.

Минск
e-mail: kostyukova@im.bas-net.by

Поступила в редакцию
11.I.2000