

УДК 531.36

© 2002 г.

В.И. Каленова, В.М. Морозов

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ ЧАПЛЫГИНА

Установлена теорема об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина, обладающих циклическими координатами, под действием потенциальных и диссипативных сил, обобщающая теорему, доказанную ранее [1]. Предлагаемая теорема позволяет получать строгие достаточные условия устойчивости стационарных движений неголономных систем в случаях, более общих, чем рассматривавшиеся ранее. В качестве примера рассматривается задача об устойчивости стационарных движений одноколесного экипажа.

Обзор результатов по теории устойчивости установившихся движений неголономных систем см. в [2, 3].

1. Стационарные движения. Рассмотрим неголономную механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$. Скорости $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ стеснены $n - l$ ($l < n$) стационарными неголономными связями

$$\dot{q}_\chi = \sum_{r=1}^l b_{\chi r}(q) \dot{q}_r, \quad \chi = l+1, \dots, n \quad (1.1)$$

Предположим, что на систему действуют потенциальные силы, производные от силовой функции U , и диссипативные силы, производные от функции Релея F . Будем считать, что кинетическая энергия T , силовая функция U , функция F и коэффициенты связей $b_{\chi r}$ не зависят от q_χ .

Уравнения движения системы в форме Чаплыгина, как известно, имеют вид [1–4]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \theta}{\partial q_r} - \sum_{\chi=l+1}^n \sum_{s,p=1}^l \theta_{\chi p} v_{\chi rs} \dot{q}_s \dot{q}_p = \frac{\partial U}{\partial q_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_r}, \quad r = 1, \dots, l \quad (1.2)$$

Здесь θ , θ_χ , Φ – результаты исключения величин $\dot{q}_\chi$ при помощи (1.1) из выражений для T , $\partial T / \partial \dot{q}_\chi$, F , т.е.

$$2\theta = \sum_{r,s=1}^l a_{rs}(q) \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad \theta_\chi = \sum_{s=1}^l \theta_{\chi s} \dot{q}_s, \quad 2\Phi = \sum_{r,s=1}^l f_{rs}(q) \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad v_{\chi rs} = \frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_r}$$

Уравнения (1.2) представляют собой замкнутую относительно переменных $q_1, \dots, q_l$ систему, которую можно рассматривать независимо от уравнений неголономных связей (1.1).

Будем полагать, что среди координат $q_1, \dots, q_l$ содержатся циклические в смысле определения [1, 2] координаты q_α ($\alpha = k+1, \dots, l$), т.е.

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \sum_{\chi=l+1}^n \sum_{s,p=1}^l \theta_{\chi p} v_{\chi rs} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} = 0; \quad p, s, r = 1, \dots, l$$

Остальные координаты q_i ($i = 1, \dots, k$) – позиционные.

В рамках принятого определения циклических координат могут существовать стационарные движения, при которых постоянны позиционные координаты и циклические скорости

$$q_i(t) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad \dot{q}_\alpha(t) = \dot{q}_{\alpha 0} = \omega_\alpha, \quad \alpha = k+1, \dots, l \quad (1.3)$$

Для существования стационарных движений (1.3) необходимо, чтобы отсутствовала диссипация по циклическим скоростям, т.е.

$$\partial \Phi / \partial \dot{q}_\alpha = 0, \quad \alpha = k+1, \dots, l$$

В этом случае l постоянных величин q_{i0} , ω_α удовлетворяют l уравнениям

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 + \sum_{\alpha, \beta=k+1}^l \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_i} + \sum_{\chi=l+1}^n \theta_{\chi\beta} v_{\chi i \alpha} \right)_0 \omega_\alpha \omega_\beta = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.4)$$

$$\sum_{\alpha, \beta=k+1}^l \left(\sum_{\chi=l+1}^n \theta_{\chi\alpha} v_{\chi \gamma \beta} \right)_0 \omega_\alpha \omega_\beta = 0, \quad \gamma = k+1, \dots, l \quad (1.5)$$

Нулевой индекс означает, что выражение вычислено для стационарного движения.

Отмечалось [2, 3], что система (1.4), (1.5), вообще говоря, имеет лишь тривиальные решения

$$\omega_\alpha = 0, \quad q_i(t) = q_{i0} \quad (q_{i0} : \partial U / \partial q_i = 0)$$

отвечающие положениям равновесия системы. Однако в ряде случаев среди уравнений (1.4), (1.5) может оказаться только l_1 ($l_1 < l$) независимых, и в результате система (1.4), (1.5) может иметь нетривиальные относительно $\dot{q}_\alpha$ решения. Тогда рассматриваемая механическая система может иметь семейство установившихся решений вида (1.3) размерности $l - l_1$.

Если выполнено условие

$$\sum_{\chi=l+1}^n (\theta_{\chi\alpha} v_{\chi\gamma\beta})_0 = - \sum_{\chi=l+1}^n (\theta_{\chi\beta} v_{\chi\gamma\alpha})_0, \quad \gamma = k+1, \dots, l \quad (1.6)$$

то условие (1.5) удовлетворяется при любых ω_α . Тогда в системе существует многообразие установившихся движений, размерность которого не меньше числа циклических координат $l - k$. Условие (1.6), в частности, выполняется, если

$$\sum_{\chi=l+1}^n (\theta_{\chi\alpha} v_{\chi\gamma\beta})_0 = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = k+1, \dots, l \quad (1.7)$$

Очевидно, что для выполнения условия (1.7) достаточно, чтобы [1-3]

$$\sum_{\chi=l+1}^n \theta_{\chi\alpha} v_{\chi\gamma\beta} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = k+1, \dots, l \quad (1.8)$$

Заметим, что условия (1.8) выполняются тождественно по позиционным координатам, а условия (1.7) — лишь на стационарном движении.

Именно последняя ситуация (выполнение условий (1.8)) имеет место в известных задачах об установившихся движениях тяжелого твердого тела (диска, тора и т.д.) на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. В приведенном ниже примере условия (1.8) не выполнены, однако удовлетворяются условия (1.7).

2. Исследование устойчивости. Рассмотрим производную точку многообразия стационарных движений (1.4), (1.5) и поставим вопрос об устойчивости решения (1.3) по отношению к возмущениям переменных q_i , $\dot{q}_i$, $\dot{q}_\alpha$.

Введем отклонения

$$x_i = q_i - q_{i0}, \quad y_\alpha = \dot{q}_\alpha - \omega_\alpha, \quad i = 1, \dots, k; \quad \alpha = k+1, \dots, l$$

и запишем уравнения возмущенного движения в матричной форме, выделив линейные члены

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + C\dot{y} &= W_1x + D_1\dot{x} + P_1y + X(x, \dot{x}, y) \\ C^T\ddot{x} + B\dot{y} &= W_2x + D_2\dot{x} + P_2y + Y(x, \dot{x}, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $x (k \times 1)$, $y (s \times 1)$; $s = l - k$. Формулы для элементов матриц $A, B, \dots$ аналогичны соответствующим формулам работы [2]; X, Y – вектор-функции, содержащие члены порядка выше первого по введенным переменным.

При выполнении условия (1.8) $W_2 = 0, P_2 = 0$. При выполнении условий (1.6) или (1.7) только $P_2 = 0$.

Очевидно, что если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы (2.1) лежат в левой полуплоскости, то тривиальное решение системы (2.1) асимптотически устойчиво, а если хотя бы один корень лежит в правой полуплоскости, то неустойчиво.

Если $W_2 = 0, P_2 = 0$, система (2.1) имеет s нулевых корней и s линейных интегралов. Было показано [1, 2], что эта ситуация соответствует особенному критическому по Ляпунову случаю нескольких нулевых корней. При указанных условиях при помощи теоремы Ляпунова – Малкина [5, 6] была установлена [1] теорема об устойчивости установившегося движения (1.3).

Покажем, что при определенных условиях имеет место аналогичная теорема и для систем Чаплыгина более общего вида, обладающих s -мерным многообразием стационарных движений. В этом случае линеаризованная система также имеет s нулевых корней и s линейных интегралов (один векторный интеграл размерности s), но при этом $W_2 \neq 0, P_2 \neq 0$.

Найдем условия, при которых существует такой векторный линейный интеграл в линеаризованной системе (2.1). Введем матрицы $L (s \times k)$ и $M (s \times s)$. Тогда нетрудно видеть, что при условии существования нетривиального решения L, M системы матричных уравнений

$$LW_1 + MW_2 = 0, \quad LP_1 + MP_2 = 0 \quad (2.2)$$

в линеаризованной системе (2.1) существует векторный линейный интеграл размерности $s \times 1$ вида

$$z = (LA + MC^T)\dot{x} + (LC + MB)y - (LD_1 + MD_2)x = \text{const} \quad (2.3)$$

Система (2.2) имеет ненулевое решение, если

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} W_1 & P_1 \\ W_2 & P_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Это условие выполняется, в частности, при $W_2 = 0, P_2 = 0$ (см. [1, 2]).

Пусть $\det W_1 \neq 0$. Тогда из системы (2.2) следует $L = -MW_2W_1^{-1}$, $MP_0 = 0$, где $P_0 = P_2 - W_2W_1^{-1}P_1$. Матрица $M \neq 0$, если $\det P_0 = 0$ ($0 \leq \text{rank } P_0 \leq s$).

Для того чтобы при помощи интеграла (2.3) можно было исключить переменную y , необходимо, чтобы $\text{rank } G = s$, где

$$G = LC + MB = MB_0, \quad B_0 = B - W_2W_1^{-1}C$$

причем $\text{rank } G \leq \min \{\text{rank } M, \text{rank } B_0\}$. Так как $\text{rank } M \leq s$, матрица M должна быть невырожденной, и из соотношения $MP_0 = 0$ следует $P_0 = 0$, т.е.

$$P_2 = W_2W_1^{-1}P_1 \quad (2.5)$$

Тогда $\text{rank } G = \text{rank } B_0 = s$ и условием возможности исключения переменной y из интеграла (2.3) является выполнение неравенства

$$\det B_0 = \det (B - W_2 W_1^{-1} C) \neq 0 \quad (2.6)$$

В качестве матрицы M можно взять единичную и $L = -W_2 W_1^{-1}$, $G = B_0$.

Введя замену переменных

$$y = B_0^{-1}(z + D_0 x - C_0^T \dot{x}) \quad (2.7)$$

систему уравнений (2.1) можно привести к виду

$$A_0 \ddot{x} + D_0 \dot{x} + W_0 x - P_1 B_0^{-1} z = X_0(x, \dot{x}, z), \quad \dot{z} = Z_0(x, \dot{x}, z) \quad (2.8)$$

где

$$A_0 = A - C B_0^{-1} C_0^T, \quad D_0 = -D_1 + P_1 B_0^{-1} C_0^T + C B_0^{-1} D_3$$

$$W_0 = -W_1 - P_1 B_0^{-1} D_3, \quad C_0^T = C^T - W_2 W_1^{-1} A, \quad D_3 = D_2 - W_2 W_1^{-1} D_1$$

Функции $X_0(x, \dot{x}, z)$, $Y_0(x, \dot{x}, z)$ образованы из функций $X(x, \dot{x}, z)$, $Y(x, \dot{x}, z)$ с учетом замены переменных (2.7).

Очевидно, что характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе (2.8), всегда имеет s нулевых корней, а остальные корни удовлетворяют уравнению

$$\det(A_0 \lambda^2 + D_0 \lambda + W_0) = 0 \quad (2.9)$$

Если среди корней уравнения (2.9) есть корни с положительной действительной частью, то установившееся движение (1.3) неустойчиво согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Так как при указанных условиях число нулевых корней совпадает с размерностью многообразия установившихся движений (1.3) (так же, как и в рассмотренном ранее случае [1]), то, если все корни уравнения (2.9) имеют отрицательные действительные части, имеет место особый критический случай нескольких нулевых корней и справедлива теорема Ляпунова – Малкина.

Таким образом, имеет место утверждение, аналогичное теореме, сформулированной ранее [1].

Теорема. Установившееся движение (1.3) неголономной системы Чаплыгина, имеющей многообразие установившихся движений размерности, равной числу циклических координат, устойчиво (неустойчиво), если все корни уравнения (2.9) имеют отрицательные действительные части (по крайней мере один корень с положительной действительной частью). В случае устойчивости всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t \rightarrow \infty$ к одному из возможных установившихся движений, принадлежащих указанному многообразию.

3. Стационарные движения моноцикла. Рассмотрим механическую систему, представляющую собой модель одноколесного управляемого экипажа, движущегося по неподвижной горизонтальной плоскости [7, 8]. Система состоит из однородного кругового диска массы m_1 и радиуса b , катящегося по плоскости без проскальзывания, твердого тела M_2 , прикрепленного к центру диска O_1 цилиндрическим шарниром и движущегося в плоскости диска; ось тела $O_1 \eta'$ лежит в плоскости диска и является главной осью инерции тела M_2 для точки O_1 . Пусть O_2 – центр масс тела O_2 лежит на оси $O_2 \eta'$ ($O_1 O_2 = d$). На этой же оси установлен однородный симметричный маховик, центр масс которого совпадает с точкой O_2 . Обозначим через m_2 массу тела M_2 вместе с маховиком.

Отметим, что более простая модель моноцикла, состоящая из диска, невесомого стержня и вращающегося вокруг него шара, рассматривалась ранее [9].

Для описания движения системы введем неподвижную систему координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке опорной плоскости (ось Z направлена вертикально вверх) и полусвязанную систему координат $O_1 \xi \eta \zeta$ с началом в центре масс диска O_1 : ось ζ перпендикулярна плоскости диска, ось η направлена по прямой наибольшего

ската плоскости колеса (вверх). Положение системы определим обобщенными координатами $X, Y, \theta, \psi, \varphi, \varphi_1, \alpha$, где X, Y – горизонтальные координаты центра масс диска, θ, ψ, φ – углы Эйлера, определяющие положение диска, φ_1 – угол между осями $O_1\eta$ и $O_1\eta'$, характеризующий положение оси $O_1\eta'$ тела M_2 , третья координата центра масс диска $Z = b \cos \theta$, α – угол поворота маховика (ротора) по отношению к телу M_2 . Векторы $\dot{\alpha}, \dot{\varphi}$ направлены по осям $O_1\eta'$ и $O_1\zeta$ соответственно.

Уравнения неголономных связей выражают условия отсутствия скольжения (скорость точки P диска, в которой диск соприкасается с плоскостью, равна нулю) и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{X} + b[\dot{\theta} \sin \psi \cos \theta + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) \cos \psi] &= 0 \\ \dot{Y} + b[-\dot{\theta} \cos \psi \cos \theta + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) \sin \psi] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выражения для кинетической энергии экипажа и силовой функции в обобщенных координатах приведены ранее [7].

Будем полагать, что на систему действуют диссипативные силы, производимые от функции Релея $F = h_1 \dot{\varphi}_1^2 / 2$ ($h_1 = \text{const} > 0$), которые моделируют силы вязкого трения в оси колеса.

Кинетическая энергия и силовая функция системы, а также коэффициенты неголономных связей (3.1) не зависят от координат X и Y , поэтому рассматриваемая система представляет собой систему Чаплыгина и ее уравнения движения, составленные в форме уравнений Чаплыгина, можно исследовать независимо от уравнений связей (3.1). Координаты φ, ψ, α являются циклическими в смысле определения [2].

Уравнения движения допускают частные решения

$$\varphi_1 = \varphi_{10}, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \Omega, \quad \dot{\alpha} = \Omega_r, \quad (3.2)$$

описывающие стационарные движения системы.

Условия существования стационарного движения (3.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \{I_2 \sin \theta_0 \omega \Omega + [I_2 \sin^2 \theta_0 + (B_2 - A_2) \cos^2 \theta_0 \cos \varphi_{10}] \Omega^2 + \\ + I \Omega \Omega_r \cos \theta_0 - m_2 d g \cos \theta_0\} \sin \varphi_{10} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} C_0 \Omega \omega \cos \theta_0 + [(m_1 + m_2) a + m_2 d \cos \varphi_{10}] g \sin \theta_0 - I \Omega_r \Omega \sin \theta_0 \cos \varphi_{10} + \\ + [C_0 + C_2 - A - B_2 \cos^2 \varphi_{10} - A_2 \sin^2 \varphi_{10} + I_2 \cos \varphi_{10}] \Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$I_2 \sin \varphi_{10} \Omega^2 = 0, \quad I_2 \sin \varphi_{10} \Omega \omega = 0 \quad (3.5)$$

Здесь

$$A_2 = A_1 + m_2 d^2, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 + m_2 d^2, \quad C_0 = C + (m_1 + m_2) b^2 + I_2 \cos \varphi_{10}, \quad I_2 = m_2 b d$$

$A = B, C$ – главные центральные моменты инерции диска относительно диаметра и оси, перпендикулярной плоскости диска, B_1, A_1, C_1 – главные центральные моменты инерции тела M_2 (вместе с закрепленным на нем ротором) относительно осей $O_2\eta', O_2\xi', O_2\zeta'$ (ось $O_2\zeta'$ перпендикулярна плоскости диска, ось $O_2\xi'$ лежит в плоскости диска); I – момент инерции ротора относительно оси вращения.

Уравнения (3.5) соответствуют группе условий (1.5). Из соотношений (3.3)–(3.5) следует, что необходимым условием существования стационарных движений является условие $\sin \varphi_{10} = 0$, которое и обеспечивает выполнение условия (1.7) и тем самым условия (1.5) при любых значениях циклических скоростей. Важно отметить, что в рассматриваемой задаче условие (1.8) не выполняется.

Таким образом, в данной задаче существует многообразие стационарных движений размерности $s = 3$, при этом параметры $\theta_0, \omega, \Omega, \Omega_r$ связаны одним соотношением (3.4), в котором $\sin \varphi_{10} = 0$.

Условие $\sin \varphi_{10} = 0$ показывает, что в любом стационарном движении ось тела M_2 (ось корпуса) должна совпадать с прямой наибольшего ската колеса. При этом центр масс O_2 тела M_2 лежит выше центра колеса O_1 , если $\varphi_{10} = 0$ ($\varepsilon = 1$), и ниже, если $\varphi_{10} = \pi$ ($\varepsilon = -1$).

Среди стационарных движений отметим следующие.

1°. $\theta_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \omega \neq 0$, $\dot{\psi} = \Omega = 0$, $\dot{\alpha} = \Omega_r$ – прямолинейное качение вертикального диска, при котором центр масс диска O_1 движется с произвольной постоянной скоростью $|\omega a|$; точка O_2 по-прежнему лежит на вертикальном диаметре диска.

2°. $\theta_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \omega = 0$, $\dot{\psi} = \Omega \neq 0$, $\dot{\alpha} = \Omega_r$ – вращение диска с произвольной постоянной угловой скоростью Ω вокруг неподвижного вертикального диаметра (верчение); центр масс O_2 также находится на вертикальном диаметре.

В общем случае, когда

$$\theta_0 \neq 0, \quad |\theta_0| < \pi/2, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\psi} = \Omega \neq 0, \quad \dot{\alpha} = \Omega_r,$$

стационарное движение системы представляет собой движение диска с постоянным углом наклона к опорной плоскости; центр масс диска O_1 и точка соприкосновения с плоскостью P движутся по окружностям постоянных радиусов; центр масс тела M_2 находится на прямой наибольшего ската колеса.

Линеаризованные в окрестности стационарного движения (3.2) уравнения возмущенного движения имеют соответствующий (2.1) вид [7]

$$W_{11}\ddot{x} + W_{12}\dot{y} + V_{11}\dot{x} + K_{11}x + P_1y = 0, \quad W_{21}\ddot{x} + W_{22}\dot{y} + V_{21}\dot{x} + K_{21}x = 0 \quad (3.6)$$

Здесь

$$x = (x_1 x_2)^T, \quad y = (y_1 y_2 y_3)^T$$

$$x_1 = \varphi_1 - \varphi_{10}, \quad x_2 = \theta - \theta_0, \quad y_1 = \dot{\varphi} - \omega, \quad y_2 = \dot{\psi} - \Omega, \quad y_3 = \dot{\alpha} - \Omega_r,$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} W_{11} & W_{12} \\ (2 \times 2) & (2 \times 3) \\ W_{21} & W_{22} \\ (3 \times 2) & (3 \times 3) \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{ccccc} w_{11} & 0 & w_{13} & w_{14} & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 & 0 \\ w_{13} & 0 & w_{33} & w_{34} & 0 \\ w_{14} & 0 & w_{34} & w_{44} & w_{45} \\ 0 & 0 & 0 & w_{54} & w_{55} \end{array} \right\| \\ \left\| \begin{array}{c} V_{11} \\ (2 \times 2) \\ V_{21} \\ (3 \times 2) \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cc} h_1 & v_{12} \\ -v_{12} & 0 \\ 0 & v_{32} \\ 0 & v_{42} \\ 0 & v_{52} \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} K_{11} \\ (2 \times 2) \\ K_{21} \\ (3 \times 2) \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cc} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \\ k_{31} & 0 \\ k_{41} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad P_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{array} \right\| \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов матриц см. в [7].

Условия (2.5), (2.6) существования линейных интегралов выполнены, так как

$$P_2 = 0, \quad W_2 W_1^{-1} P_1 = 0$$

Заметим, что для произвольного установившегося движения (3.2) матрица $W_2 \neq 0$, однако для прямолинейного движения $W_2 = 0$, $P_2 = 0$. В последнем случае линейные интегралы (2.3) соответствуют непосредственно циклическим переменным, как и ранее [1].

В соответствии со сказанным в разд. 2 система (3.6) может быть приведена к линеаризованной системе, соответствующей (2.8). Характеристическое уравнение (2.9) в данном случае имеет вид

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

Выражения для коэффициентов a_i в зависимости от параметров системы нетрудно получить, но они не приводятся из-за громоздкости.

Ранее [7] были приведены лишь необходимые условия устойчивости рассматриваемых стационарных движений системы и указана возможность гироскопической стабилизации некоторых из них в отсутствие диссипации.

Согласно доказанной в разд. 2 теореме, стационарное движение (3.1) устойчиво, если выполняются известные условия Гурвица

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 > 0 \quad (3.7)$$

Для прямолинейного качения системы условия (3.7) упрощаются и принимают вид *достаточных* условий устойчивости

$$h_1 > 0, \quad \varepsilon = -1 \quad (\varphi_{10} = \pi), \quad \omega^2 > \omega_*^2, \quad \omega_*^2 = \frac{(A + B_2 - I)(mb - m_2d)}{C(C + mb^2 - m_2d)}, \quad m = m_1 + m_2$$

Эти условия означают, что центр масс тела M_2 (вместе с ротором) лежит ниже центра колеса, а скорость качения достаточно велика. Если $\varepsilon = 1$ ($\varphi_{10} = 0$) или $\varepsilon = -1$ ($\varphi_{10} = \pi$) и $\omega^2 < \omega_*^2$, то прямолинейное качение неустойчиво, так как в этих случаях коэффициенты характеристического уравнения a_3 и a_4 имеют разные знаки. В частности, при $\varphi_{10} = 0$ прямолинейное качение всегда неустойчиво, что отмечалось [9] для более простой модели моноцикла.

Пусть стационарное движение – верчение вокруг вертикали с постоянной скоростью Ω . Тогда $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ при $h_1 > 0$.

Приведем асимптотические (при $\Omega_r \rightarrow \infty$) формулы для коэффициентов a_2 , a_3 , a_4 в предположении, что скорость вращения ротора Ω_r достаточно велика:

$$a_2 = I^2\Omega_r^2 + \dots > 0, \quad a_3 = Ih_1\varepsilon\Omega\Omega_r + \dots, \quad a_4 = I^2\Omega^2\Omega_r^2 + \dots > 0$$

В этом случае достаточные условия устойчивости верчения (3.7) принимают вид $\varepsilon\Omega\Omega_r > 0$ при любых значениях геометрических и массовых параметров системы. Это означает, что при устойчивом верчении направления собственного вращения системы со скоростью Ω и вращения ротора со скоростью Ω_r должны быть согласованы с положением центра масс тела M_2 по отношению к центру диска ($\varepsilon = \pm 1$).

В случае, когда диск невесомый (точнее, масса диска много меньше массы тела M_2) и тело M_2 можно считать при расчетах материальной точкой, условия (3.7) можно представить в виде

$$(q - q_0)(q - q_1) > 0, \quad qf_1 > 0, \quad q(q - q_0)f_2 > 0, \quad q(q - q_2)f_3 > 0 \quad (3.8)$$

Здесь введены следующие безразмерные величины:

$$f_i = q^2 + G_iq + R_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad q = \varepsilon(I\Omega\Omega_r - m_2gd)/(m_2b^2\Omega^2)$$

$$q_0 = \delta^2, \quad q_1 = \gamma - (1 + \varepsilon\delta)^2, \quad q_2 = -\varepsilon\delta\gamma$$

$$G_1 = -\gamma + (1 + \varepsilon\delta), \quad R_1 = -(1 + \varepsilon\delta)\delta^2\gamma$$

$$G_2 = 2\varepsilon\delta\gamma + (1 + \varepsilon\delta), \quad R_2 = -\gamma\delta^2(1 + \varepsilon\delta - \gamma)$$

$$G_3 = (1 + \varepsilon\delta) - \gamma(1 - \varepsilon\delta), \quad R_3 = \varepsilon\delta\gamma[-\gamma + (1 + \varepsilon\delta)(2 + \varepsilon\delta)]$$

$$\delta = d/b, \quad \gamma = g/(b\Omega^2)$$

Пусть $\delta = 1$ ($d = b$), $\varepsilon = +1$, тогда условия устойчивости (3.8) выполнены в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &\text{если } I\Omega\Omega_r > 2m_2gb, && \text{при } \Omega^2 < g/b \\ &\text{если } I\Omega\Omega_r > m_2b(g + b\Omega^2), && \text{при } \Omega^2 > g/b \end{aligned} \quad (3.9)$$

Очевидно, что условия (3.9) могут выполняться, только если направления верчения и вращения ротора одинаковы.

Условия (3.9) можно представить в эквивалентном виде

$$D \equiv I^2\Omega_r^2 - 4m_2^2b^3g > 0, \quad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 \quad (3.10)$$

где

$$\Omega_1 = 2m_2bg / (I\Omega_r), \quad \Omega_2 = (I\Omega_r + \sqrt{D}) / (2m_2b^2)$$

Аналогичные условия устойчивости могут быть получены и для случая $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$.

Примечание. Условия (3.10) аналогичны условиям устойчивости стационарного движения гироскопа в кардановом подвесе, представляющего собой равномерные вращения вокруг вертикали внешнего кольца с угловой скоростью Ω и гироскопа с угловой скоростью Ω_r , [10, 11].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00391) и программы "Университеты России" (991736).

ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 801–807.
2. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983. 132 с.
3. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
4. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
5. Ляпунов А.М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 272–331.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н. Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда // Изв. РАН МТТ. 2001. № 4. С. 49–58.
8. Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н. Об устойчивости и стабилизации движения одноколесного экипажа (моноцикла) // Докл. науч. школы-конф. "Мобильные роботы и мехатронные системы". М.: Ин-т механики МГУ, 1999. С. 31–43.
9. Емельянова И.С. Об одной модели моноцикла, катящегося по плоскости без проскальзывания // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1969. № 5. С. 89–94.
10. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 173–178.
11. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. I, II // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 374–378; Вып. 4. 499–503.

Москва
e-mail: kalenova@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
2.IV.2001