

УДК 531.36

© 2002 г. Т.В. Руденко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА С ЖИДКОСТЬЮ В ПОЛОСТИ

Рассматривается движение по абсолютно шероховатой плоскости симметричного твердого тела со сферическим основанием, несущего ротор и имеющего полость в форме эллипсоида вращения, целиком заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Показано, что рассматриваемая система допускает интегралы энергии, Желле, постоянства интенсивности вихря и геометрический. Построением функции Ляпунова в виде линейной связки первых интегралов [1] получены достаточные условия устойчивости вращения гиростата вокруг вертикально расположенной оси симметрии. Найдены условия неустойчивости вращения гиростата. Показано, что ротор может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на систему. Показано, что гиростат может совершать движения типа регулярной прецессии. Получены достаточные условия устойчивости этих движений.

Известны условия устойчивости регулярной прецессии симметричного твердого тела с неподвижной точкой, имеющего эллипсоидальную полость, целиком заполненную идеальной жидкостью [2]. Была исследована устойчивость вращений на гладкой горизонтальной плоскости и плоскости с трением скольжения симметричного твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, целиком заполненную идеальной несжимаемой жидкостью [3, 4]. Для случая абсолютно шероховатой плоскости найдено необходимое условие устойчивости вращений гиростата [3] и исследованы колебания около его положения равновесия [5].

1. Уравнения движения. Первые интегралы. Рассмотрим движение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости симметричного гиростата [6] – тяжелого симметричного твердого тела со сферическим основанием, с которым неизменно связана ось вращающегося симметричного ротора. В теле имеется полость в форме эллипсоида вращения, целиком заполненная однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Предположим, что ось симметрии тела является также осью ротора и полости.

Пусть $O'xyz$ – неподвижная правая система координат с началом O' и осями x и y в опорной плоскости, ось z направлена вертикально вверх. Введем жестко связанную с гиростатом систему координат $G\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в центре масс G гиростата и осями, направленными по его главным центральным осям инерции, причем ось ξ_3 направлена вверх по оси динамической симметрии.

Будем считать, что геометрический центр C сферического основания корпуса находится на оси ξ_3 , его координату по этой оси обозначим через l , радиус сферического основания – через ρ .

Положение гиростата в системе $O'xyz$ определяется координатами x_G, y_G центра масс, углами Эйлера ϑ, ψ, ϕ корпуса и углом δ поворота ротора относительно корпуса.

Угол нутации ϑ – угол между осью ξ_3 и вертикалью. Будем считать, что углы ϑ, ψ, φ изменяются в пределах

$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Обозначим через γ единичный вектор вертикали. Координаты радиуса-вектора r точки O контакта корпуса с опорной плоскостью имеют вид [7]

$$r_1 = -\rho\gamma_1, \quad r_2 = -\rho\gamma_2, \quad r_3 = l - \rho\gamma_3 \quad (1.1)$$

Пусть ω_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции на оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 вектора ω мгновенной угловой скорости тела. Предположим, что обобщенные силы, действующие на ротор, равны нулю. Из уравнения движения ротора следует первый интеграл

$$\dot{\delta} + \omega_3 = \Omega_* = \text{const} \quad (1.2)$$

выражающий постоянство проекции на ось вращения ротора его мгновенной абсолютной угловой скорости [8].

Уравнение поверхности полости в осях ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеет вид

$$\xi_1^2/a_1^2 + \xi_2^2/a_2^2 + (\xi_3 - \xi_3^0)^2/a_3^2 = 1 \quad (1.3)$$

где $a_1 = a_2, a_3$ – полуоси полости, ξ_3^0 – координата ее геометрического центра по оси ξ_3 .

Уравнения Гельмгольца однородного вихревого движения жидкости в полости в проекциях на оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют вид

$$\dot{\Omega}_1 = 2a_1^2 \left(\frac{\omega_3\Omega_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{\omega_2\Omega_3}{a_3^2 + a_1^2} \right) - 2 \frac{a_1^2(a_3^2 - a_2^2)}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1^2 + a_3^2)} \Omega_2\Omega_3 \quad (123) \quad (1.4)$$

где символ (123) означает, что два невыписанных соотношения получаются из выписанного круговой перестановкой индексов 1, 2, 3; Ω_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции на оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 вектора $(\text{rot } v_*)/2$; v_* – вектор абсолютной скорости частиц жидкости.

Уравнения движения гиростата, отнесенные к осям ξ_1, ξ_2, ξ_3 , имеют вид

$$m(\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) = -mg\gamma_1 + R_1 \quad (123) \quad (1.5)$$

$$A_{*1}\dot{\omega}_1 + A_1'\dot{\Omega}_1 + (A_{*3}\omega_3 + J\Omega_* + A_3'\Omega_3)\omega_2 - (A_{*2}\omega_2 + A_2'\Omega_2)\omega_3 = M_1 \quad (123) \quad (1.6)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 \quad (123) \quad (1.7)$$

$$v_1 = r_2\omega_3 - r_3\omega_2 \quad (123) \quad (1.8)$$

Уравнения (1.5) и (1.6) выражают соответственно законы изменения количества и момента количеств движения гиростата, а уравнения (1.7) и (1.8) – соответственно уравнения Пуассона и связи, выражающее условие качения корпуса по плоскости без проскальзывания. Здесь m – масса гиростата, причем $m = m_1 + m_2$, где m_1 – масса системы тело–ротор и m_2 – масса жидкости; v_i, R_i, M_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции на оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 векторов скорости центра масс гиростата, реакции опорной плоскости и момента силы реакции относительно точки G соответственно; $A_{*i} = A_i + A_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) – моменты инерции преобразованного тела [9], причем $A_1, A_2 = A_1$ – моменты инерции системы тело–ротор относительно осей ξ_1, ξ_2 ; A_3 и J – моменты инерции тела и ротора относительно оси ξ_3 . Моменты инерции A_i^* эквивалентного твердого тела [9]

и разности A'_i между соответствующими моментами инерции жидкости и эквивалентного твердого тела определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_1^* &= \frac{1}{5} m_2 \frac{(a_1^2 - a_3^2)^2}{a_1^2 + a_3^2} + m_2 (\xi_3^0)^2, \quad A_3^* = 0 \\ A'_1 &= \frac{4}{5} m_2 \frac{a_1^2 a_3^2}{a_1^2 + a_3^2}, \quad A'_3 = \frac{2}{5} m_2 a_1^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.6) совпадают с уравнениями движения твердого тела с моментами инерции A_{*i} ($i = 1, 2, 3$) и ротора, к которому присоединен вращающийся гироскоп с моментами инерции A'_i ($i = 1, 2, 3$), причем вращение гироскопа происходит согласно уравнениям (1.4) таким образом, что геометрия масс системы не меняется. Следовательно, эффект жидкости, совершающей однородное вихревое движение, тождествен эффекту некоторого эквивалентного тела и вращающегося гироскопа, присоединенных к системе тело-ротор [1].

Определив из соотношений (1.5), (1.8) величины R_i ($i = 1, 2, 3$), находим

$$\begin{aligned} M_1 &= m \left[-gl\gamma_2 - (r_2^2 + r_3^2) \dot{\omega}_1 + r_1 (r_2 \dot{\omega}_2 + r_3 \dot{\omega}_3) + lr_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + lr_3 \omega_2 \omega_3 \right] \\ M_2 &= m \left[gl\gamma_1 - (r_1^2 + r_3^2) \dot{\omega}_2 + r_2 (r_1 \dot{\omega}_1 + r_3 \dot{\omega}_3) - lr_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - lr_3 \omega_1 \omega_3 \right] \\ M_3 &= m \left[-(r_1^2 + r_2^2) \dot{\omega}_3 + r_3 (r_1 \dot{\omega}_1 + r_2 \dot{\omega}_2) + l(r_2 \omega_1 - r_1 \omega_2) \omega_3 \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнения (1.4), (1.6), (1.7) при учете соотношений (1.10) образуют полную систему девяти дифференциальных уравнений движения гиростата.

Заметим, что из третьего уравнения Гельмгольца (1.4) и равенств (1.9) немедленно следует соотношение

$$A'_3 \dot{\Omega}_3 = A'_1 (\Omega_1 \omega_2 - \Omega_2 \omega_1)$$

При учете этого равенства третье уравнение системы (1.6) запишем в виде

$$d(A_{*3} \omega_3 + J \Omega_*) / dt = M_3$$

Система уравнений движения гиростата и жидкости в его полости допускает ряд первых интегралов: интеграл энергии

$$\begin{aligned} U_0 &= \left[A_{*1} + m(r_2^2 + r_3^2) \right] \omega_1^2 + \left[A_{*1} + m(r_1^2 + r_3^2) \right] \omega_2^2 + \left[A_{*3} + m(r_1^2 + r_2^2) \right] \omega_3^2 - \\ &- 2mr_1 r_2 \omega_1 \omega_2 - 2mr_1 r_3 \omega_1 \omega_3 - 2mr_2 r_3 \omega_2 \omega_3 + \\ &+ A'_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + A'_3 \Omega_3^2 - 2mgl\gamma_3 = c_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.11)$$

обобщенный интеграл Желле

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{*1} (r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2) + r_3 (A_{*3} \omega_3 + J \Omega_*) + \\ &+ A'_1 (r_1 \Omega_1 + r_2 \Omega_2) + (r_3 - l) A'_3 \Omega_3 = c_1 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.12)$$

интеграл постоянства интенсивности вихря

$$U_2 = a_3^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + a_1^2 \Omega_3^2 = c_2 = \text{const} \quad (1.13)$$

и геометрический

$$U_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (1.14)$$

Соотношение (1.12) можно записать в виде

$$U_1 = (\mathbf{K}_*, \mathbf{r}) - \rho(\mathbf{K}', \boldsymbol{\gamma}) = c_1 = \text{const}$$

Этот интеграл выражает постоянство разности двух скалярных произведений. Слагаемое $(\mathbf{K}_*, \mathbf{r})$ есть скалярное произведение вектора $\mathbf{K}_*$ момента количеств движения системы преобразованное тело-ротатор для точки G на радиус-вектор точки контакта корпуса с опорной плоскостью. Выражение $\rho(\mathbf{K}', \boldsymbol{\gamma})$ – это умноженное на величину радиуса сферического основания скалярное произведение вектора $\mathbf{K}'$ момента количеств движения вращающегося гироскопа с моментами инерции A'_1, A'_3 [1] на единичный вектор вертикали.

Первоначально интеграл Желле был получен для одного твердого тела, совершающего качение по шероховатой плоскости [10, 11], далее было показано его существование в случае тела с ротором [8] и получено его обобщение для тела с жидким заполнением на плоскости с трением [4]. Выше этот интеграл распространяется на случай гиростата с жидким заполнением на абсолютно шероховатой плоскости.

2. Стационарные движения. Устойчивость.

Вращение вокруг вертикально направленной оси симметрии. Уравнения движения гиростата допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_3^0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \Omega_3^0 \quad (2.1)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1$$

описывающее равномерное вращение гиростата вокруг вертикально направленной оси симметрии и относительное эллиптическое вращение жидкости вокруг той же оси. Примем это движение за невозмущенное и исследуем его устойчивость по отношению к переменным $\omega_i, \Omega_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$).

В возмущенном движении положим

$$\omega_3 = \omega_3^0 + x, \quad \gamma_3 = 1 + y, \quad \Omega_3 = \Omega_3^0 + z \quad (2.2)$$

Для остальных переменных сохраним прежние обозначения.

Для построения функции Ляпунова воспользуемся методом Четаева [12, 1]. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V = & U_0 + 2 \frac{\omega_3^0}{\rho(1-\epsilon)} U_1 + \frac{A'_3}{a_1^2} \left[\frac{\omega_3^0}{(1-\epsilon)\Omega_3^0} - 1 \right] U_2 + \left[mgl + \frac{\omega_3^0}{1-\epsilon} (A_{*3}\omega_3^0 + J\Omega_* + A'_3\Omega_3^0) \right] U_3 = \\ = & \tilde{A}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_{*3}x^2 + m\rho^2(\omega_3^0)^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \\ - & 2m\rho(\rho-l)\omega_3^0(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A'_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + A'_3z^2 - \\ - & 2 \frac{\omega_3^0}{1-\epsilon} [A_{*1}(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + (A_{*3}x + A'_3z)y + A'_1(\Omega_1\gamma_1 + \Omega_2\gamma_2)] + \\ + & \frac{A'_3}{a_1^2} \left[\frac{\omega_3^0}{(1-\epsilon)\Omega_3^0} - 1 \right] [a_3^2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + a_1^2z^2] + \\ + & \left[mgl + \frac{\omega_3^0}{1-\epsilon} (A_{*3}\omega_3^0 + J\Omega_* + A'_3\Omega_3^0) \right] (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + y^2) \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = l/\rho, \quad \tilde{A} = A_{*1} + m(\rho - l)^2$$

Функция V является суммой трех квадратичных форм, причем матрицы двух из них одинаковы. Применяя критерий Сильвестра, находим условия определенной положительности функции V

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1(1-\varepsilon)} - \tilde{\alpha} > 0, \quad p_1 = \frac{\Omega_3^0}{\omega_3^0}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \quad \alpha = \frac{a_3^2}{a_1^2} \\ \left[\frac{1}{p_1(1-\varepsilon)} - \tilde{\alpha} \right] \left\{ \frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} [(A_{*3} + Jp_2)(1-\varepsilon) - A_{*1}] \right\} + \\ + A'_3 \frac{\tilde{\alpha}}{1-\varepsilon} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{1-\varepsilon} - p_1 \right) > 0, \quad p_2 = \frac{\Omega_*}{\omega_3^0} \\ \frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{p_1}{(1-\varepsilon)^2} [(A'_3 + Jp_3)(1-\varepsilon) - \varepsilon A_{*3}] > 0, \quad p_3 = \frac{\Omega_*}{\Omega_3^0} \\ \frac{1}{p_1(1-\varepsilon)} \left\{ \frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} [Jp_2(1-\varepsilon) - \varepsilon A_{*3}] \right\} > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости [12, 1], неравенства (2.3) являются достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (2.1) по отношению к переменным $\omega_i, \Omega_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$).

В частном движении (2.1) величины ω_3^0 и Ω_3^0 могут иметь произвольные значения. Практический интерес представляют значения на интервале $0 < \tau \leq (\Omega_3^0 / \omega_3^0) \leq 1$, где τ — бесконечно малая величина, так как при равномерном вращении гиростата вокруг вертикально расположенной оси симметрии жидкость, если она не была предварительно завихрена, вначале совершает безвихревое движение, а затем постепенно вовлекается в движение корпуса, пока не будет двигаться с ним как одно твердое тело [13].

Положим $\omega_3^0 = \Omega_3^0$. В этом случае условия устойчивости (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\varepsilon} - \tilde{\alpha} > 0 \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon} - \tilde{\alpha} \right) \left\{ \frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} [(A_{*3} + Jp_2)(1-\varepsilon) - A_{*1}] \right\} + A'_3 \frac{\tilde{\alpha}}{1-\varepsilon} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{1-\varepsilon} - 1 \right) > 0 \\ \frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} [(A'_3 + Jp_2)(1-\varepsilon) - \varepsilon A_{*3}] > 0 \\ \frac{1}{1-\varepsilon} \left\{ \frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} [Jp_2(1-\varepsilon) - \varepsilon A_{*3}] \right\} > 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что всегда справедливо неравенство

$$1/(1 - \varepsilon) > 0$$

В самом деле, если центр масс G гиростата расположен выше центра C сферического основания, то $l < 0$ и, следовательно, $1 - \varepsilon > 0$; если G находится ниже центра C , то $0 < l < \rho$ и, значит, $1 - \varepsilon > 0$.

Таким образом, если выполнено последнее неравенство (2.4), то выполнено и предпоследнее.

Из условий (2.4) видно, что вращение системы тело – жидкость и ротора в одном направлении и полость в виде сжатого ($\alpha < 1$) вдоль оси симметрии эллипсоида оказывают стабилизирующее воздействие. Если же ротор и корпус вращаются в противоположных направлениях и величина угловой скорости Ω_* ротора значительно превышает величину угловой скорости ω_3^0 корпуса, то ротор оказывает дестабилизирующее влияние на систему. Полость в форме вытянутого ($\alpha > 1$) вдоль оси симметрии эллипсоида также ухудшает устойчивость.

Пусть центр масс гиростата расположен выше центра сферического основания ($l < 0$). Если полость представляет собой сильно вытянутый эллипсоид ($\alpha > 1 + 2\rho/|l|$), то нарушается первое условие (2.4)..

При $\Omega_3^0 / \omega_3^0 = \tau \ll 1$, когда движение жидкости в полости весьма близко к потенциальному, условия (2.3) принимают вид

$$\frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} [(A_{*3} + Jp_2)(1 - \varepsilon) - A_{*1}] > 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{mgl}{(\omega_3^0)^2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} [Jp_2(1 - \varepsilon) - \varepsilon A_{*3}] > 0$$

Первое из этих условий было получено для гиростата, движущегося по плоскости с произвольной шероховатостью, и показана его справедливость в случаях вязкого и сухого кулоновского трения [7, 14].

В частном случае *шаровой полости* ($\alpha = 1$) первое из условий (2.3) означает, что жидкость и корпус вращаются в одном направлении. Ротор в этом случае не может стабилизировать систему. Если ротор отсутствует, этот результат аналогичен случаю волчка с полостью на плоскости с трением скольжения [4]. Если, кроме того, корпус и жидкость в полости вращаются с одинаковой угловой скоростью, то получаем неравенства (2.5).

Выпишем линеаризованные уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\Gamma_1 \omega_2 + \Gamma_2 \Omega_2 - \Gamma_3 \gamma_2, & \dot{\omega}_2 &= \Gamma_1 \omega_1 - \Gamma_2 \Omega_1 + \Gamma_3 \gamma_1, & \dot{x} &= 0 \\ \dot{\Omega}_1 &= -\Gamma_4 \omega_2 + \Gamma_5 \Omega_2, & \dot{\Omega}_2 &= \Gamma_4 \omega_1 - \Gamma_5 \Omega_1, & \dot{z} &= 0 \\ \dot{\gamma}_1 &= -\omega_2 + \omega_3^0 \gamma_2, & \dot{\gamma}_2 &= \omega_1 - \omega_3^0 \gamma_1, & \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \tilde{B} \omega_3^0 + \tilde{J} \Omega_* + \tilde{A}'_3 \tilde{\alpha}^2 \Omega_3^0, & \Gamma_2 &= 2\tilde{A}'_3 \frac{\alpha \tilde{\alpha}}{\alpha + 1} \Omega_3^0, \\ \Gamma_3 &= \frac{mgl}{\tilde{A}}, & \Gamma_4 &= \frac{2}{\alpha + 1} \Omega_3^0, & \Gamma_5 &= \omega_3^0 - \tilde{\alpha} \Omega_3^0 \\ \tilde{B} &= \frac{A_{*3} - A_{*1} + m(\rho - l)l}{\tilde{A}}, & \tilde{J} &= \frac{J}{\tilde{A}}, & \tilde{A}'_3 &= \frac{A'_3}{\tilde{A}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Характеристическое уравнение системы (2.6) имеет вид

$$\Delta(\kappa) = \kappa^3(\kappa_6 + \Lambda_1 \kappa^4 + \Lambda_2 \kappa^2 + \Lambda_3) = 0 \quad (2.8)$$

где

$$\Lambda_1 = (2 + \tilde{B}_2)(\omega_3^2)^2 + \tilde{J}_2 \Omega_2^* + 2\tilde{J}(B\omega_3^2 + \tilde{A}_3 \alpha_2 \Omega_0^2) \Omega_2^* + \\ + 2\tilde{\alpha}(B\tilde{A}_3 \alpha - 1)\omega_3 \Omega_0^2 + \alpha_2^2 \left[(\tilde{A}_3)^2 \alpha + 1 - 8\tilde{A}_3' \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \right] (\Omega_0^3)^2 + 2\Gamma_3$$

$$\Lambda_2 = (1 + 2\tilde{B}_2)(\omega_3^2)^4 + \tilde{J}[2B(\omega_3^2)^3 + \tilde{A}_3 \alpha_2^2 (\Omega_0^3)^3] \Omega_2^* + \\ + 4\tilde{J}\alpha(\tilde{A}_3 \alpha - B)(\omega_3^2)^2 \Omega_2^* \Omega_0^2 - 2\tilde{J}\alpha \left[2\tilde{A}_3' \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} - \tilde{B}\alpha \right] \omega_3 \Omega_2^* (\Omega_0^3)^2 + \\ + \tilde{J}_2 [2(\omega_3^2)^2 - 2\alpha \omega_3 \Omega_0^2 + \alpha_2^2 (\Omega_0^3)^2] \Omega_2^* + 2\tilde{\alpha}(2B\tilde{A}_3 \alpha - 1 - \tilde{B}_2)(\omega_3^2)^3 \Omega_0^2 +$$

$$+ 2\tilde{A}_3 \alpha_2^2 (B + \tilde{A}_3 \alpha)(\Omega_0^3)^3 + \alpha_2^2 \left[2(\tilde{A}_3)^2 \alpha_3 + \alpha \right] \left(1 - 8\tilde{A}_3' \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} + \tilde{B}_2 \right) \alpha - \\ - 4\tilde{B}\tilde{A}_3' \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2} \left[(\omega_3^2)^2 (\Omega_0^3)^2 + \Gamma_3^2 + 2\Gamma_3 \right] (1 + B)(\omega_3^2)^2 + \tilde{J}\omega_3 \Omega_2^* +$$

$$+ \tilde{\alpha}(\tilde{A}_3 \alpha - 2)\omega_3 \Omega_0^2 + \alpha \left(\tilde{\alpha} - \tilde{A}_3' \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2} \right) (\Omega_0^3)^2 \left[\right.$$

$$\left. \Lambda_3 = \{(\omega_3^2 - \alpha \Omega_0^2)[B(\omega_3^2)^2 + \tilde{J}\omega_3 \Omega_2^* + \Gamma_3] + \tilde{A}_3 \alpha(\alpha \omega_3^2 - \Omega_0^2)\omega_3 \Omega_0^2\}^2 \right.$$

Характеристическое уравнение (2.8) имеет три нулевых корня и шесть корней, отличных от нуля, определяемых из уравнения

$$\kappa_6 + \Lambda_1 \kappa^4 + \Lambda_2 \kappa^2 + \Lambda_3 = 0$$

содержащего κ только в четных степенях. Для устойчивости движения (2.1) необходимо, чтобы все корни этого уравнения были чисто мнимыми. Это означает, что корни относительно κ^2 должны быть отрицательными и вещественными. Этим условиям можно удовлетворить, если подчинить коэффициенты Λ_i ($i = 1, 2, 3$) критерию Гурвица [12]

$$\Lambda_1 > 0, \quad \Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_3 > 0 \quad (2.9)$$

и условию вещественности корней кубического относительно κ^2 уравнения (2.8) [15]

$$\Lambda_2^2(4\Lambda_2 - \Lambda_1^2) + 27\Lambda_3^2 + 2\Lambda_1\Lambda_3(2\Lambda_1^2 - 9\Lambda_2) > 0 \quad (2.10)$$

Таким образом, неравенства (2.9), (2.10) являются необходимыми условиями устойчивости движения (2.1). В случае отсутствия ротора ($\tilde{J}\Omega_2^* = 0$) и выполнения условия $\Omega_0^2 = \omega_3^2$ необходимое условие устойчивости получено ранее [3].

Если выполнено неравенство (2.10) и нарушено хотя бы одно из условий (2.9), то среди корней уравнения (2.8) могут быть положительные вещественные корни. В этом случае невозмущенное движение (2.1) неустойчиво [12].

В случае *шаровой полости* неравенство (2.10) приводится к виду

$$\{[\Lambda_3 + m(p - l)]\omega_3^2 + \tilde{J}\Omega_2^*\}^2 + 4[\Lambda_1 + m(p - l)^2]mgl > 0 \quad (2.11)$$

Это есть известное условие устойчивости волчка с ротором на абсолютно шероховатой плоскости [16]. Неравенства (2.9) принимают вид

$$2(\omega_3^0)^2 + [(\tilde{C} - 1)\omega_3^0 + \tilde{J}\Omega_*]^2 + 2\Gamma_3 > 0, \quad \tilde{C} = [A_{*3} + m\rho(\rho - l)] / \tilde{A}$$

$$\{(\omega_3^0)^2 + [(\tilde{C} - 1)\omega_3^0 + \tilde{J}\Omega_*]^2 + 2\Gamma_3\} \times$$

$$\times \{[\tilde{C}(\omega_3^0)^2 + \tilde{J}\omega_3^0\Omega_* + \Gamma_3]^2 + (\tilde{C}\omega_3^0 - 2\omega_3^0 + \tilde{J}\Omega_*)^2(\omega_3^0)^2\} > 0$$

Таким образом, условие неустойчивости волчка с ротором представляет собой совокупность неравенства (2.11) и следующего неравенства:

$$\tilde{A}^2(\omega_3^0)^2 + [(\hat{C} - \tilde{A})\omega_3^0 + J\Omega_*]^2 + 2\tilde{A}mgl < 0, \quad \hat{C} = \tilde{C}\tilde{A}$$

Движение типа регулярной прецессии. Уравнения движения гиростата допускают решение

$$v_i = 0, \quad \omega_i^0 = \lambda(\gamma_i^0 - \varepsilon\delta_{i3}) \quad (2.12)$$

$$\Omega_i^0 = \lambda\Theta_i\gamma_i^0, \quad \Theta_{1,2} = \frac{A'_1}{A'_1 + \mu a_3^2}, \quad \Theta_3 = \frac{A'_3}{A'_3 + \mu a_1^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

где λ, μ – произвольные постоянные, величина γ_3^0 определяется из уравнения

$$\lambda^2[A_{*1} + A'_1\Theta_1 - A_{*3}(\gamma_3^0 - \varepsilon) - A'_3\Theta_3]\gamma_3^0 - \lambda J\Omega_* = mgl$$

Решение (2.12) описывает движение типа регулярной прецессии гиростата, при котором скорость его центра масс G равна нулю, а угловые скорости прецессии $\dot{\psi}_0$ и собственного вращения $\dot{\phi}_0$ равны соответственно λ и $-\lambda\varepsilon$. Точка O контакта корпуса с опорной плоскостью описывает окружность радиуса $|l| \sin \vartheta_0$ [17].

Примем движение (2.12) за невозмущенное и исследуем его устойчивость. Функцию Ляпунова возьмем в виде линейной связки первых интегралов (1.11)–(1.14)

$$V = U_0 + 2\frac{\lambda}{\rho}U_1 + \mu U_2 + \lambda^2(A_{*1} + A'_1\Theta_1)U_3 =$$

$$= m\mathbf{v}^2 + A_{*1}(x_1^2 + x_2^2) + (A'_1 + \mu a_3^2)(z_1^2 + z_2^2) + A_{*3}\omega_3^2 + (A'_3 + \mu a_1^2)\Omega_3^2 -$$

$$- 2mgl\gamma_3 - 2\lambda(A_{*3}\omega_3 + J\Omega_*)(\varepsilon - \gamma_3) - 2\lambda A'_3\Omega_3\gamma_3 + \lambda^2(A_{*1} + A'_1\Theta_1)\gamma_3^2$$

где

$$x_j = \omega_j^0 - \lambda\gamma_j^0, \quad z_j = \Omega_j^0 - \lambda\Theta_j\gamma_j^0, \quad j = 1, 2$$

Положим в возмущенном движении

$$\omega_3 = \omega_3^0 + x_3, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0 + y_1, \quad \Omega_3 = \Omega_3^0 + z_3$$

Для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Тогда функция Ляпунова V представляет собой положительно определенную квадратичную форму переменных v_i, x_i, y_1, z_i ($i = 1, 2, 3$), если выполнены неравенства

$$A'_1 + \mu a_3^2 > 0, \quad A_{*1} + A'_1\Theta_1 - A_{*3} > 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{A_{*3}}{A'_3 + \mu a_1^2}[A_{*1} + A'_1\Theta_1 - A_{*3} - A'_3\Theta_3] > 0$$

представляющие собой достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (2.12) по отношению к переменным $\nu_i, x_j, z_j, \gamma_3, \omega_3, \Omega_3$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$). Из этих неравенств следует, что в случае гиростата на абсолютно шероховатой плоскости достаточное условие устойчивости движения (2.12) уже, нежели в случае твердого тела с неподвижной точкой, имеющего эллипсоидную полость, целиком заполненную идеальной жидкостью [2].

Автор благодарит В.В. Румянцева и А.В. Карапетяна за внимание к работе и обсуждения результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы "Ведущие научные школы" (00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. Карапетян А.В. Об устойчивости регулярной прецессии симметричного твердого тела с эллипсоидальной полостью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1972. № 6. С. 122–125.
3. Маркеев А.П. Об устойчивости вращения волчка с полостью, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 19–26.
4. Карапетян А.В., Прокопина О.В. Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, наполненной жидкостью, на плоскости с трением // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 85–91.
5. Маркеев А.П. О колебаниях твердого тела с полостью, содержащей жидкость, на абсолютно шероховатой плоскости // Некоторые задачи и методы исследования динамики механических систем. М.: Изд-во МАИ, 1985. С. 19–25.
6. *Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di Meccanica Razionale. Bologna: Zanichelli; 1930. = Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.*
7. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 778–784.
8. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
9. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. С. 152–309.
10. *Jellet J.H. A Treatise on the Theory of Friction. Dublin; London: MacMillan, 1872. 220 p.*
11. *Routh E.J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. London: McMillan, 1982. V. 2 = Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.*
12. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
13. Румянцев В.В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 740–748.
14. Румянцев В.В. К задаче об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости с трением // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 263–272.
15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 431 с.
16. Дувакин А.П. Об устойчивости движения волчка с гироскопом по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 131–134.
17. Руденко Т.В. Об устойчивости стационарных движений симметричного гиростата на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 765–778.