

УДК 531.2

© 2002 г. А.С. Смышляев, Ф.Л. Черноусько

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЯ НА ШЕРОХОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача равновесия стержня на шероховатой горизонтальной плоскости при наличии сил сухого трения. Путем решения задачи на экстремум определены условия равновесия, обеспечивающие неподвижность стержня. Полученные результаты сравниваются с известным результатом для скамьи Жуковского.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, представляющее собой стержень, покоящийся на шероховатой горизонтальной плоскости. Введем декартову систему координат Oxy так, чтобы ось x была направлена вдоль стержня, а точка O совпадала с одним из его концов (фиг. 1). Длину стержня обозначим через l , линейную плотность – через ρ . Стержень будем считать бесконечно тонким, а его вес распределенным равномерно по всей длине. Это предположение соответствует случаю, когда жесткость стержня относительно оси y существенно меньше жесткости относительно вертикальной оси. Пусть к стержню в плоскости Oxy приложены внешние силы, главный вектор которых обозначим через $\mathbf{F}$, его проекции на оси x, y – через F_x, F_y соответственно, а величину главного момента всех внешних сил относительно центра стержня – через M_0 . Между стержнем и плоскостью действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона, который можно записать в виде

$$\sqrt{X^2 + Y^2} \leq \rho g k, \quad x \in [0, l] \quad (1.1)$$

где k – коэффициент трения, $X(x)$ и $Y(x)$ – линейные плотности проекций сил трения на оси x и y соответственно.

Условия равновесия стержня под действием приложенных сил запишутся так:

$$F_x + \int_0^l X dx = 0, \quad F_y + \int_0^l Y dx = 0, \quad M_0 + \int_0^l \left(x - \frac{l}{2}\right) Y dx = 0 \quad (1.2)$$

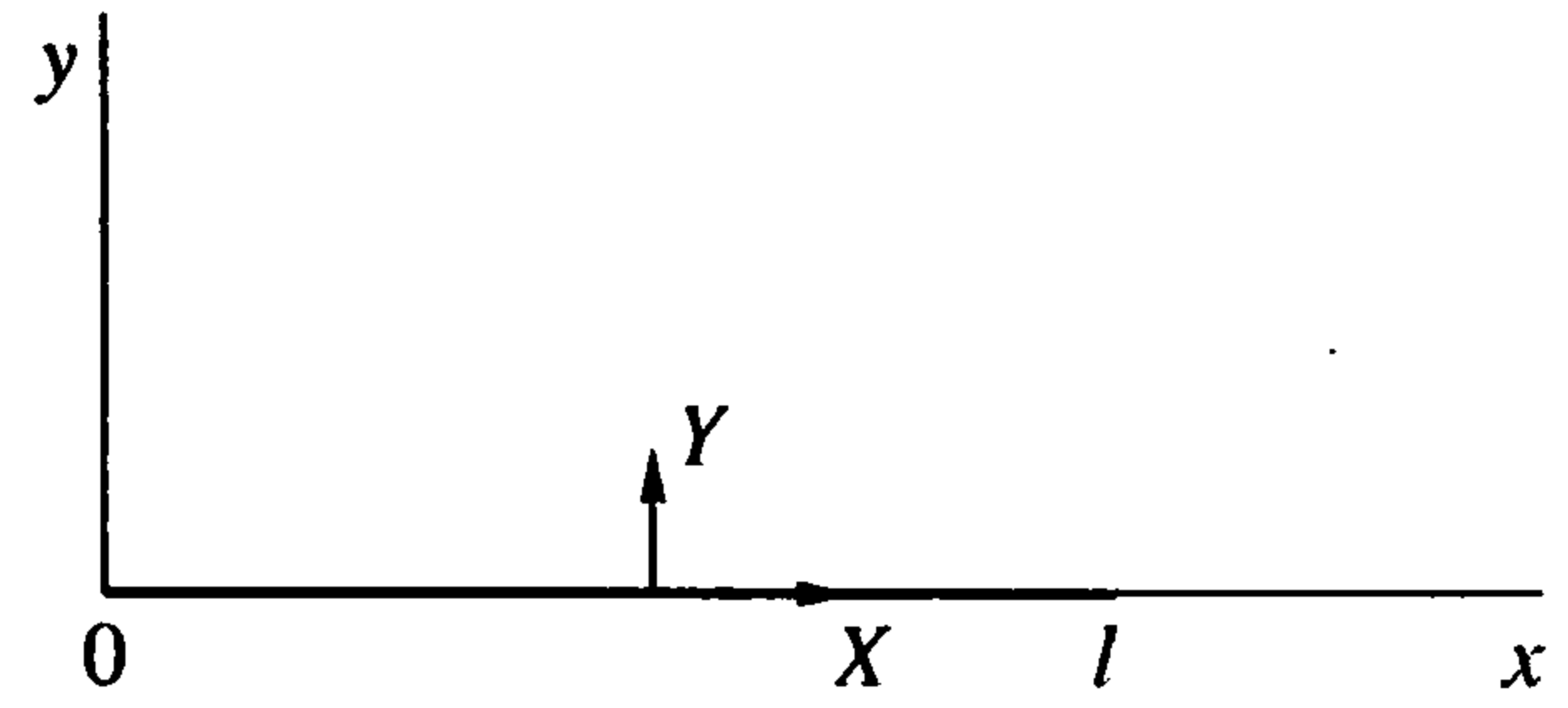
Поставим задачу: указать условия, которые необходимо наложить на $\mathbf{F}$ и M_0 , чтобы стержень находился в состоянии равновесия. Таким образом, нужно указать, при каких F_x, F_y и M_0 существуют функции $X(x)$ и $Y(x)$, удовлетворяющие соотношениям (1.1) и (1.2).

2. Эквивалентная задача на экстремум. Для упрощения последующих выкладок введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad X' = \frac{X}{\rho g k}, \quad Y' = \frac{Y}{\rho g k} \\ F'_x &= -\frac{F_x}{\rho g k l}, \quad F'_y = -\frac{F_y}{\rho g k l}, \quad M' = \frac{M_0}{\rho g k l^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

и условия (1.2) запишем в виде (далее везде опускаем штрихи у безразмерных переменных)

$$\int_0^1 X dx = F_x, \quad \int_0^1 Y dx = F_y, \quad \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) Y dx = M \quad (2.2)$$



Фиг. 1

Условие (1.1) примет вид

$$X^2 + Y^2 \leq 1, \quad x \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Требуется определить множество Ω в трехмерном пространстве (F_x, F_y, M) , для точек которого имеет место равновесие, т.е. существуют функции $X(x)$ и $Y(x)$, удовлетворяющие соотношениям (2.2) и (2.3).

Установим сначала некоторые общие свойства множества Ω .

1°. Множество Ω выпукло. Это свойство вытекает из выпуклости множества допустимых управлений, определяемого условием (2.3), и из линейности преобразования (2.2).

2°. Множество Ω симметрично относительно трех координатных плоскостей $F_x = 0$, $F_y = 0$ и $M = 0$. В самом деле, если набору (F_x, F_y, M) соответствуют функции $X(x), Y(x)$, то, как нетрудно проверить при помощи условий (2.2) и (2.3), для набора $(-F_x, F_y, M)$ можно взять функции $-X(x), Y(x)$, для набора $(F_x, -F_y, M)$ — функции $X(x), -Y(1-x)$, а для набора $(F_x, F_y, -M)$ — функции $X(x), Y(1-x)$.

Поставим задачу оптимального управления

$$y_1' = X, \quad y_2' = Y, \quad y_3' = (x - 1/2)Y, \quad X^2 + Y^2 \leq 1 \quad (2.4)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$$

$$y_1(1) = F_x, \quad y_2(1) = F_y, \quad y_3(1) \rightarrow \max$$

Штрихами обозначены производные по x , величины X и Y играют роль управляющих функций.

Решив задачу (2.4), найдем для каждой пары F_x, F_y наибольшее возможное значение M . В силу выпуклости множества Ω это означает, что будет найдена часть границы этого множества. Остальные части границы найдем, используя отмеченные свойства симметрии этого множества. Таким образом, для определения множества Ω достаточно решить задачу оптимального управления (2.4) при различных $F_x \geq 0$ и $F_y \geq 0$.

3. Решение задачи оптимального управления. Гамильтониан для задачи (2.4) имеет вид

$$H = p_1 X + p_2 Y + p_3 (x - 1/2) Y \quad (3.1)$$

Здесь p_i ($i = 1, 2, 3$) — сопряженные переменные. Из сопряженной системы следует, что все p_i постоянны. Не нарушая общности, можно положить $p_3 = 1$.

Найдем максимум гамильтониана (3.1) при ограничении $X^2 + Y^2 \leq 1$. Очевидно, что искомый максимум достигается при $X^2 + Y^2 = 1$. Воспользуемся методом множителей Лагранжа для определения X, Y , доставляющих максимум гамильтониану

$$L = p_1 X + p_2 Y + (x - 1/2) Y + \lambda (X^2 + Y^2)$$

Приравняв нулю частные производные $\partial L / \partial x$ и $\partial L / \partial y$, получим уравнения, разрешая которые относительно X и Y , получим

$$X = \frac{p_1}{[p_1^2 + (p + x)^2]^{1/2}}, \quad Y = \frac{p + x}{[p_1^2 + (p + x)^2]^{1/2}}; \quad p = p_2 - \frac{1}{2} \quad (3.2)$$

Здесь выбраны знаки, отвечающие максимуму гамильтониана (3.1). Так как $p_1 = \text{const}$ и X не меняет знака при $x \in [0, 1]$, то для выполнения первого условия (2.2) при $F_x \geq 0$ необходимо, чтобы $p_1 \geq 0$.

Взяв интегралы (2.2), получим

$$F_x = p_1 \ln \frac{p+1+\Delta_1}{p+\Delta_0}, \quad F_y = \Delta_1 - \Delta_0; \quad M = \frac{1}{2} \Delta_0 - \frac{p_1}{2} F_x - \frac{p}{2} F_y \quad (3.3)$$

$$\Delta_1 = \sqrt{p_1^2 + (p+1)^2}, \quad \Delta_0 = \sqrt{p_1^2 + p^2}$$

Формулы (3.3) определяют параметрическую зависимость $M(F_x, F_y)$ через параметры p_1, p . Получить эту зависимость в явном виде, исключив p_1 и p , не удастся. Поэтому рассмотрим сначала частные случаи, в которых аналитическое решение возможно.

1°. Пусть $F_x^2 + F_y^2 = 1$. Покажем, что этому случаю соответствуют бесконечно большие значения сопряженных переменных. Положим

$$p_1 = \mu q_1, \quad p = \mu q_2, \quad \mu \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

где q_1, q_2 — новые постоянные, μ — большой параметр. Подставляя выражения (3.4) в первые два соотношения (3.3) и разлагая их по обратным степеням μ , получим

$$F_x = \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \quad F_y = \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \quad (3.5)$$

так что условие $F_x^2 + F_y^2 = 1$ выполняется. Подставим соотношения (3.4) в выражения (3.2) и положим $\mu \rightarrow \infty$. Сравнивая полученные результаты с равенствами (3.5), убедимся, что $X \equiv F_x, Y \equiv F_y$. Следовательно, согласно последнему уравнению (2.2) имеем $M = 0$. Таким образом, для всех точек на окружности $F_x^2 + F_y^2 = 1$ главный момент внешних сил должен равняться нулю.

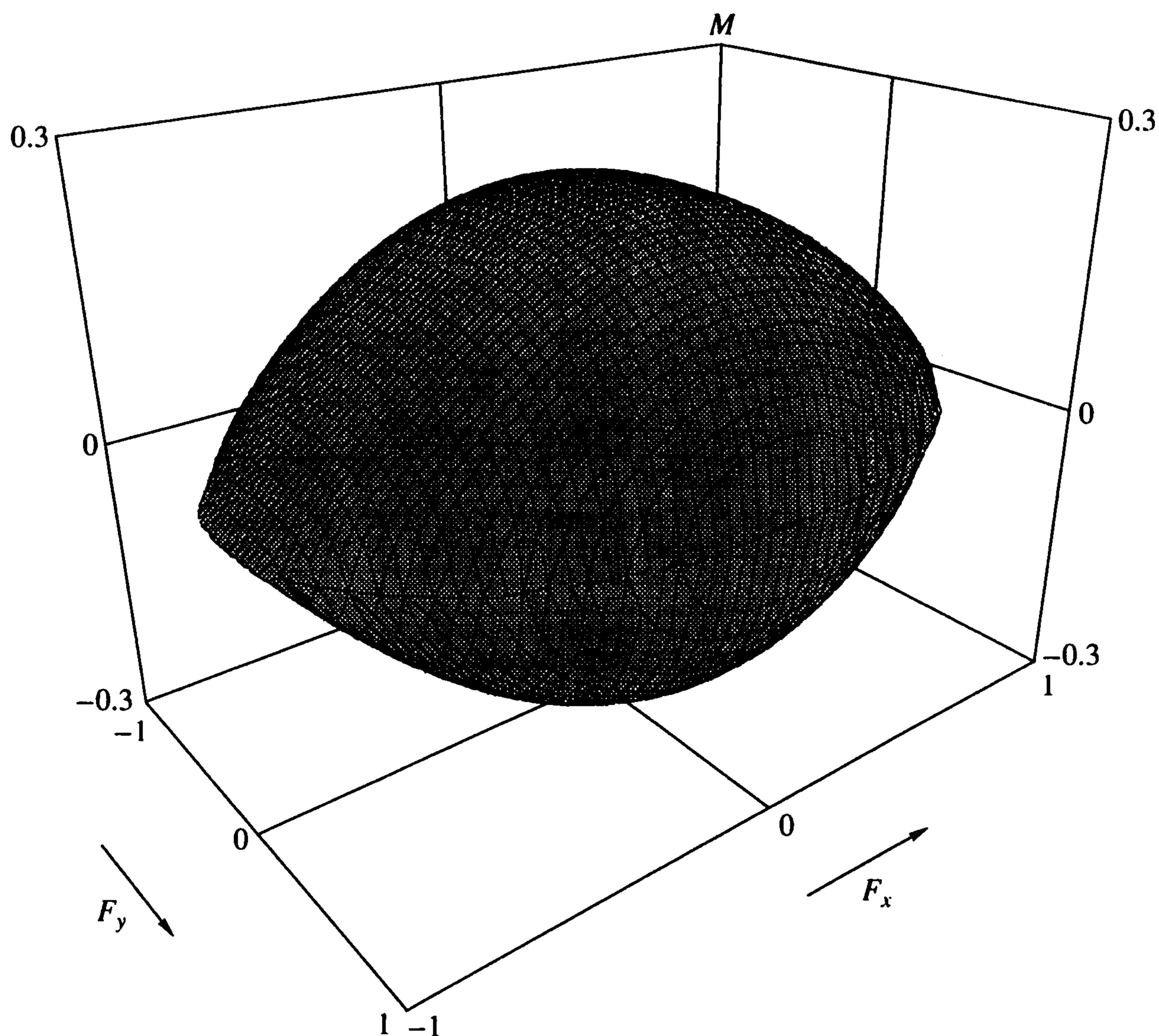
2°. Пусть $F_x = F_y = 0$. Тогда

$$\int_0^1 X dx = 0$$

и так как $X \geq 0$ при $x \in [0, 1]$, то $X \equiv 0$. Из соотношений (3.2) следует, что $p_1 = 0$. Подставляя это значение в (3.3), получим: $F_y = 0, p = -1/2, M = 1/4$. Таким образом, максимальный момент при равенстве нулю главного вектора сил равен $1/4$. Из физических соображений ясно, что это значение момента — максимально возможное при любых F_x, F_y .

Система нелинейных уравнений (первые два уравнения (3.3)) относительно p_1, p решалась численно методом Ньютона для каждой пары F_x, F_y , удовлетворяющей соотношению $F_x^2 + F_y^2 \leq 1$. Затем по третьей формуле (3.3) определялся момент M . Результаты расчета представлены на фиг. 2, где изображено полученное множество Ω , на фиг. 3, где при $M \geq 0$ показаны его сечения плоскостями $F_x = \text{const}$ (значения F_x указаны на фигуре) и на фиг. 4, где при $F_y \geq 0$ показаны сечения множества Ω плоскостями $M = \text{const}$ (значения M указаны на фигуре). Ввиду свойств симметрии множества Ω относительно плоскостей $M = 0$ и $F_y = 0$ на фиг. 3 и 4 показаны половины соответствующих сечений.

4. Сравнение с результатом Жуковского. В работе Жуковского [1] получены условия равновесия тела, опирающегося на две точки, под действием нормальной силы, приложенной в середине отрезка, соединяющего эти точки, а также силы F ,



Фиг. 2

лежащей в плоскости xu . Были рассмотрены [2] более общие условия равновесия тел на плоскости при различных условиях опирания (гарантированные условия равновесия в случае статической неопределимости). Обозначим через φ угол между вектором $\mathbf{F}$ и осью x , через $h > 0$ – расстояние от начала координат до линии действия силы $\mathbf{F}$ (фиг. 5). Условия равновесия, полученные в [1], приводятся к виду [2]

$$\frac{F}{Nk} = \begin{cases} [1 + h^2(a \cos \varphi)^{-2}]^{-1/2}, & ha^{-1} < \cos^2 \varphi |\sin \varphi|^{-1} \\ (ha^{-1} + |\sin \varphi|)^{-1}, & ha^{-1} \geq \cos^2 \varphi |\sin \varphi|^{-1} \end{cases} \quad (4.1)$$

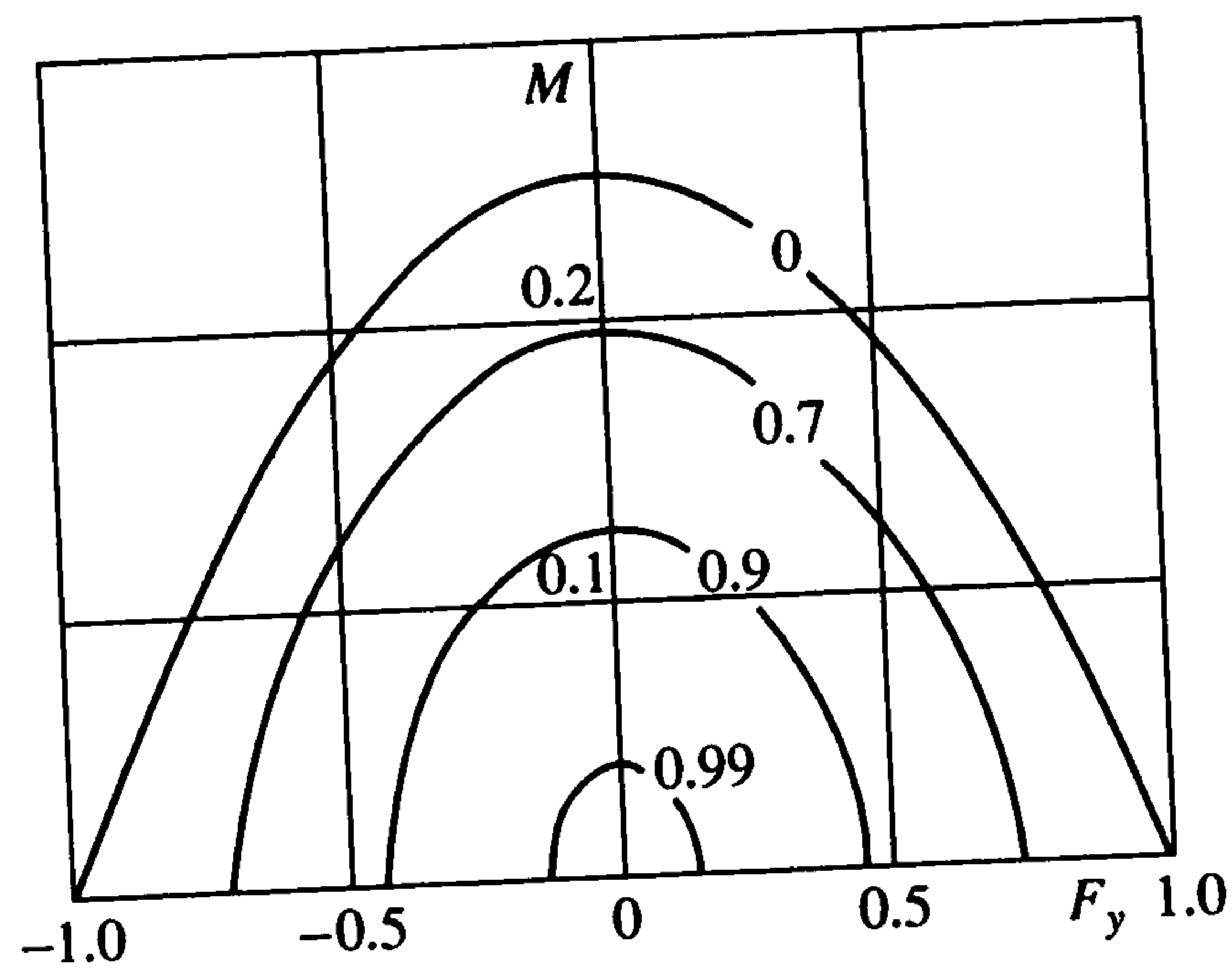
Здесь a – половина расстояния между массами, N – нормальная сила, приложенная в середине отрезка, соединяющего точечные массы. Для того чтобы сравнить результат Жуковского с решением задачи, полученным в разд. 3, перейдем к безразмерным переменным по формулам (2.1) и положим $a = l/2$, $N = 2mg = \rho lg$, $s = h/a$. Получим

$$F_x = \xi(\varphi, s) \cos \varphi, \quad F_y = \xi(\varphi, s) \sin \varphi, \quad M = \frac{1}{2} s \xi(\varphi, s) \quad (4.2)$$

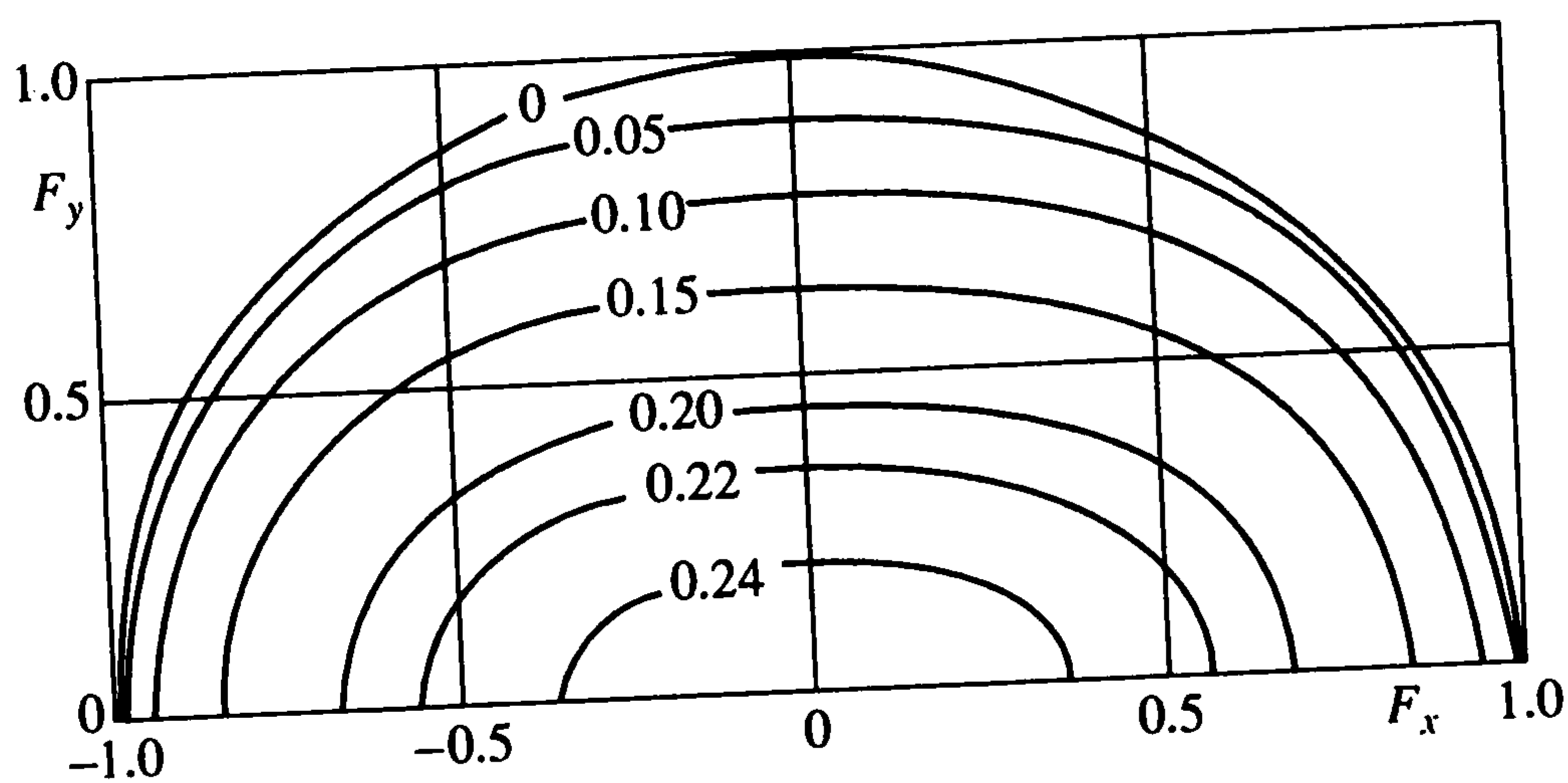
$$\xi(\varphi, s) = \begin{cases} [1 + (s / \cos \varphi)^2]^{-1/2}, & s < \cos^2 \varphi |\sin \varphi|^{-1} \\ (s + |\sin \varphi|)^{-1}, & s \geq \cos^2 \varphi |\sin \varphi|^{-1} \end{cases}$$

Уравнения (4.2), задающие параметрическую зависимость $M(F_x, F_y)$, удастся решить относительно φ и s . Имеем

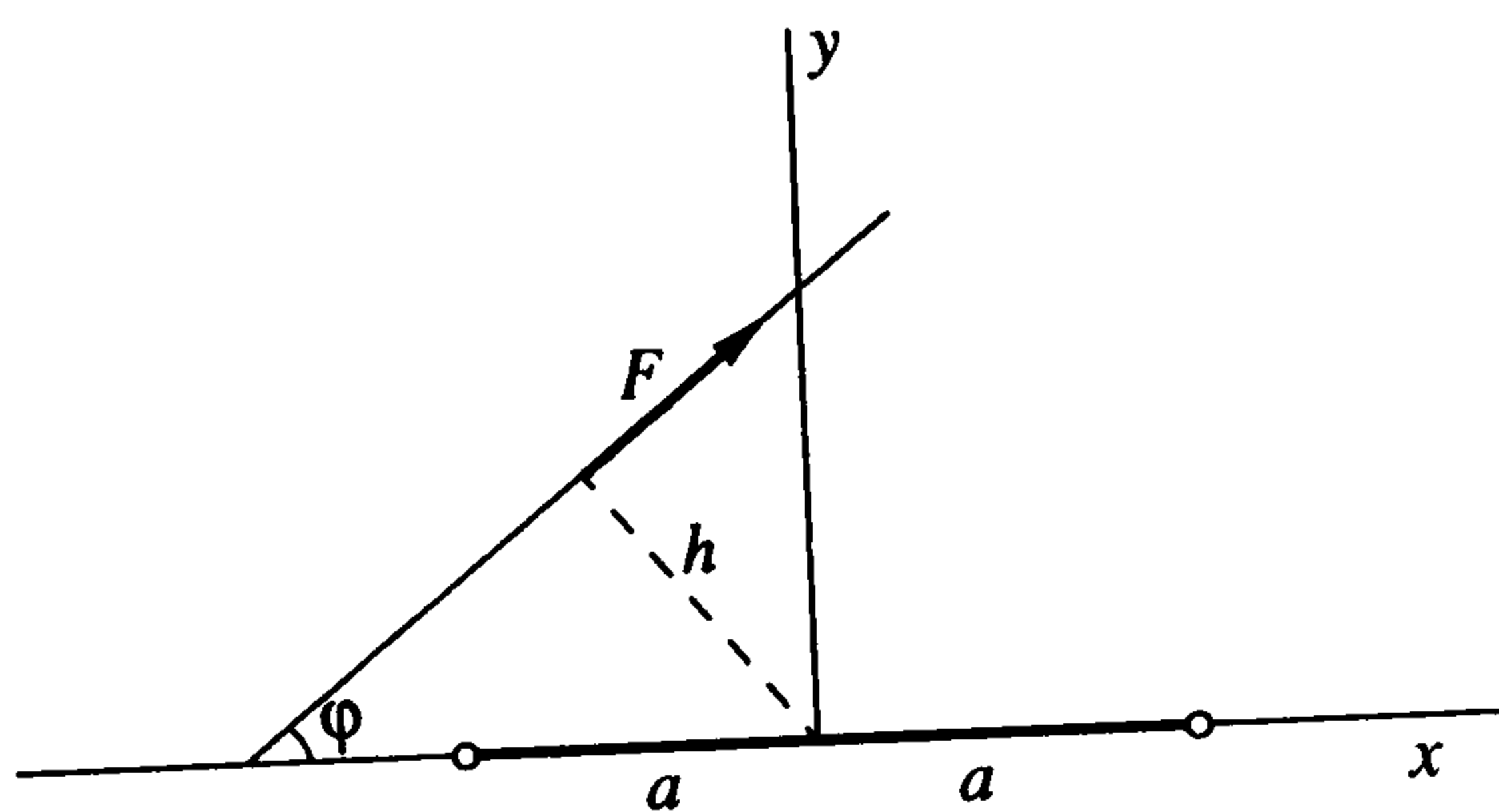
$$M = \frac{1}{2} \times \begin{cases} |F_x| (1 + (F_x^2 + F_y^2)^{-1})^{1/2}, & F_y < F_x^2 + F_y^2 \\ (1 - F_y), & F_y \geq F_x^2 + F_y^2 \end{cases} \quad (4.3)$$



Фиг. 3



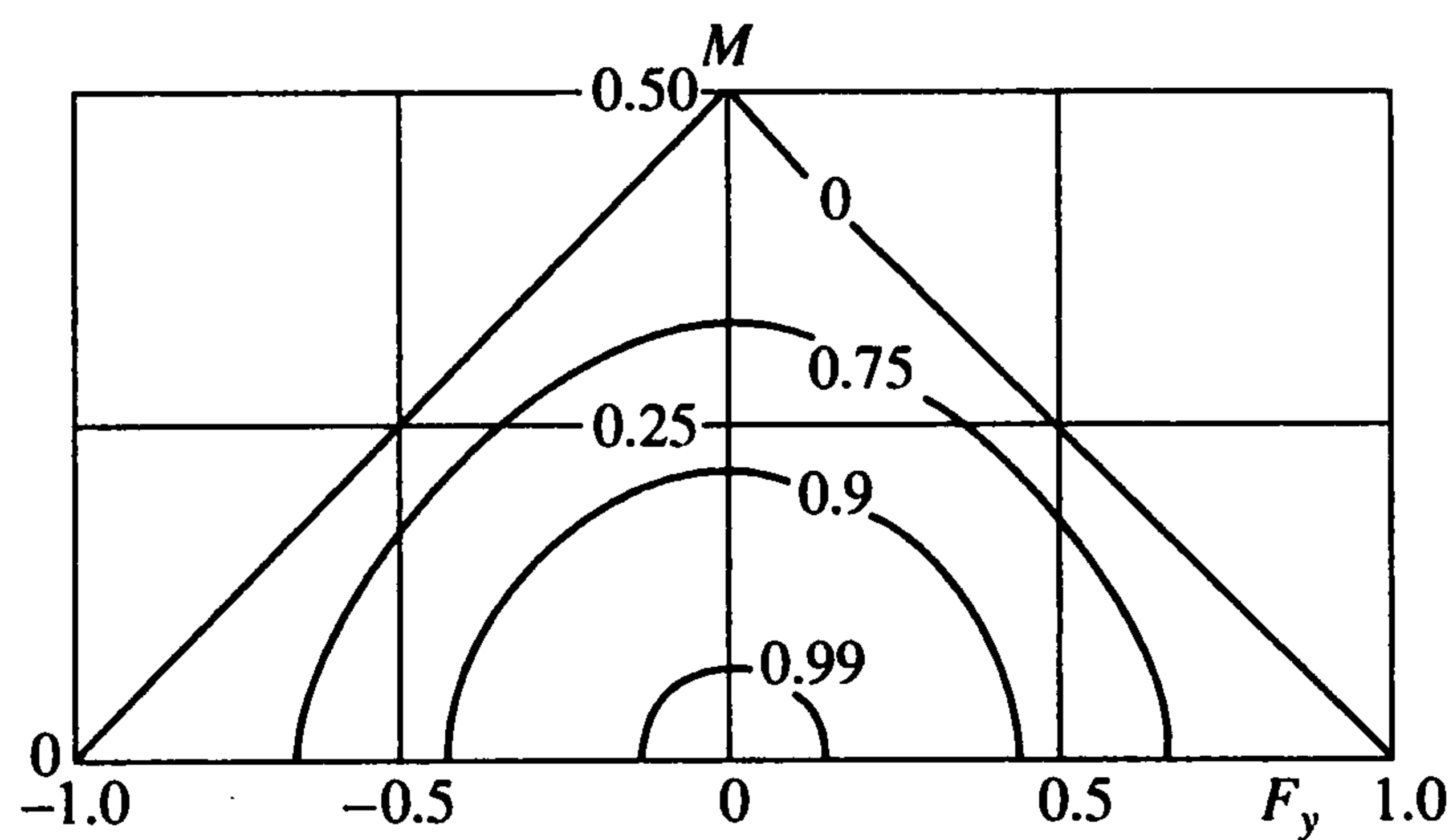
Фиг. 4



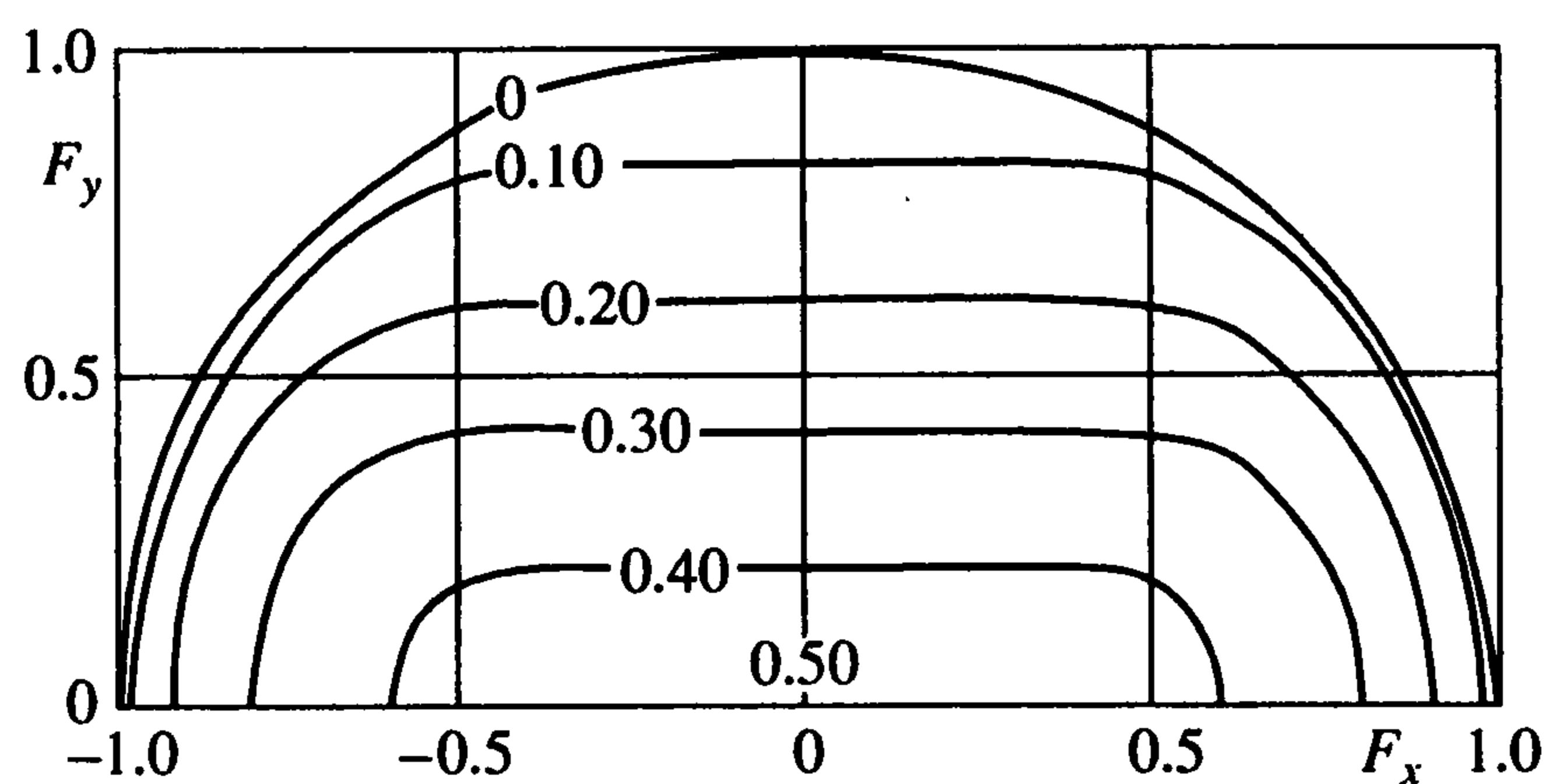
Фиг. 5

Формула (4.3) верна при $F_y \geq 0$, $-1 \leq F_x \leq 1$. Соотношения (4.3) определяют множество Ω^* в пространстве значений (F_x, F_y, M) , точки которого соответствуют состояниям равновесия. Множество Ω^* аналогично множеству Ω и обладает теми же свойствами симметрии.

Сравним значения момента, задаваемые формулой (4.3), с результатами разд. 3. Легко видеть, что при $F_x^2 + F_y^2 = 1$ значение момента $M = 0$, как и в случае стержня. При $F_x = F_y = 0$ момент достигает своего максимального значения (при всех F_x, F_y) и равен $1/2$, что в два раза больше, чем момент при равенстве нулю главного вектора сил для стержня. На фиг. 6 при $M \geq 0$ показаны сечения множества Ω^* для задачи Жуковского плоскостями $F_x = \text{const}$; значения F_x указаны на фигуре. На фиг. 7 при $F_y \geq 0$ показаны сечения множества Ω^* плоскостями $M = \text{const}$; значения M указаны на



Фиг. 6



Фиг. 7

фигуре. Ввиду симметрии множества Ω^* относительно плоскостей $M = 0$ и $F_y = 0$, на фиг. 6, 7, как и на фиг. 3, 4, показаны лишь половины соответствующих сечений. Обратим внимание как на общее сходство, так и на заметные количественные различия между данными на фиг. 6 и 3, фиг. 7 и 4 соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00201).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н.Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Собр. соч. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. Т. 1. С. 339–354.
2. Черноусько Ф.Л. Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 6–17.