

УДК 531.36:534.01

© 2002 г. Л.Д. Акуленко

СХЕМЫ УСРЕДНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ В СИСТЕМАХ С БЫСТРОЙ И МЕДЛЕННОЙ ФАЗАМИ

Рассматриваются нелинейные колебательные системы, содержащие быструю и относительно медленную фазы. Предлагается модифицированный метод усреднения для ситуации, когда усредненные по быстрой фазе медленные переменные не изменяются. Излагается и обосновывается процедура разделения переменных на существенно больших по малому параметру интервалах времени, на которых происходит значительная эволюция всех переменных. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность предлагаемого подхода.

В нелинейных колебательных системах часто возникают ситуации, когда эволюция оскулирующих переменных происходит с различными средними скоростями по отношению к степеням некоторого естественного малого параметра. Такими системами описывается ряд задач теории колебаний нелинейных механических систем (осцилляторов и маятников), динамики твердых тел и гироскопов, орбитальных движений и вращений естественных и искусственных небесных тел, задача о нелинейных стоячих волнах в жидкости (параметрический резонанс) и др. В теоретическом и прикладном аспектах представляет значительный интерес исследование эволюции системы на достаточно большом промежутке времени, приводящем к существенному изменению оскулирующих переменных, в том числе самых медленных.

Оказывается, что для многих важных случаев можно применить и обосновать модифицированную схему метода усреднения Крылова–Боголюбова и разделения движений (замены переменных [1–3]) на относительно больших интервалах времени. Рассмотрим некоторые подходы к исследованию нелинейных колебательных систем в стандартной по Н.Н. Боголюбову форме и систем, содержащих быструю и медленную фазы.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная колебательная система в стандартной по Н.Н. Боголюбову форме [1, 2]

$$\dot{z} = \varepsilon Z(t, z), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z^0, \quad z \in D_z, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1 \quad (1.1)$$

Вектор-функция Z произвольной размерности n_z предполагается достаточно гладкой по $z \in D_z$, где D_z – некоторое связное множество. Относительно аргумента t (t – время или фаза колебаний) она предполагается кусочно-непрерывной и 2π -периодической. Стандартным образом построим усредненную систему первого приближения [1, 2] и предположим, что усредненные уравнения обладают определенными ниже структурными свойствами, а именно

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi, \eta), \quad \xi(0) = x^0; \quad \dot{\eta} = \varepsilon Y_0(\xi, \eta), \quad \eta(0) = y^0 \quad (1.2)$$

$$z = (x^T, y^T)^T, \quad Z(t, z) \equiv (X^T(t, x, y), Y^T(t, x, y))^T$$

$$x, \xi \in D_x, \quad y, \eta \in D_y, \quad D_z = D_x \times D_y$$

$$X_0 = \langle X(t, \xi, \eta) \rangle \equiv 0; \quad Y_0 = \langle Y(t, \xi, \eta) \rangle \neq 0$$

Здесь x, y – векторы произвольных размерностей n_x, n_y соответственно ($n_z = n_x + n_y$), причем $n_y \geq 1$; ξ, η – "усредненные" значения этих векторов. Частный

случай $n_y = 0$, т.е. $x = z$, требует отдельного обсуждения [4], см. ниже. Из (1.2) следует [1, 2], что в первом приближении по ε средняя скорость изменения вектора x равна нулю, т.е. $|x - x^0| = O(\varepsilon)$ для $t \sim 1/\varepsilon$, а переменная y изменяется, вообще говоря, существенно: $|y - y^0| = O(1)$. Уравнение для η удобнее рассматривать в медленном времени $\tau = \varepsilon t$.

Для приложений, однако, часто представляет интерес поведение системы (1.1) на значительно большем по отрицательным степеням ε отрезке, например $t \in I_2$ ($I_k = [0, L/\varepsilon^k]$, $k = 0, 1, 2, \dots$), на котором могут произойти значительные изменения переменной x . В общем случае решение этой задачи на основе метода усреднения затруднительно. Поэтому рассмотрим встречающуюся в прикладных задачах ситуацию, когда уравнение для η при $\xi = \text{const}$ ($\xi \in D_x$) допускает полное семейство одночастотных периодических решений в медленном времени τ [1]

$$\eta = \eta_0(\varphi, \xi, \zeta), \quad \varphi = \omega(\xi, \zeta)\tau + \varphi^0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \eta \in D_y \quad (1.3)$$

Здесь ζ, φ^0 – постоянные интегрирования, φ – скалярная фаза; размерность $\zeta, \zeta \in D_\zeta$, равна $n_y - 1$. Функция η_0 описывает колебательные или вращательно-колебательные движения и предполагается 2π -периодической в известном смысле [1–3] по φ . Фаза φ во времени t является медленной переменной: при $t \sim 1/\varepsilon^2$ она получает приращение $\delta\varphi \sim 1/\varepsilon$. Итак, в предположении выполнения условий (1.2), (1.3) ставится задача построения и обоснования схемы усреднения более высокой по ε степени, чем применяемая при стандартном подходе [1–3]. Такая модификация метода усреднения впервые была применена при исследовании нерезонансных вращений трехосного спутника на эллиптической орбите [5].

2. Приведение к системе с быстрой и медленной фазами. Следуя процедуре замены переменных [1–3], совершим преобразование $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, близкое к тождественному, вида

$$x = \xi + \varepsilon U(t, \xi, \eta), \quad y = \eta + \varepsilon V(t, \xi, \eta) \\ U = \int_0^t X(s, \xi, \eta) ds, \quad V = \int_0^t [Y(s, \xi, \eta) - Y_0(\xi, \eta)] ds \quad (2.1)$$

Функции X, Y ($X_0 \equiv 0, Y_0 \neq 0$) определены согласно соотношениям (1.2).

Дифференцируя выражения (2.1) в силу уравнений (1.1), получим задачу Коши

$$\dot{\xi} = \varepsilon^2 \Xi(t, \xi, \eta, \varepsilon), \quad \xi(0) = x^0 \\ \dot{\eta} = \varepsilon Y_0(\xi, \eta) + \varepsilon^2 H(t, \xi, \eta, \varepsilon), \quad \eta(0) = y^0 \\ \Xi = [I + \varepsilon U'_\xi - \varepsilon^2 U'_\eta (I + \varepsilon V'_\eta)^{-1} V'_\xi]^{-1} [\Delta X - U'_\eta (I + \varepsilon V'_\eta)^{-1} (Y_0 + \Delta Y)] \\ H = (I + \varepsilon V'_\eta)^{-1} (\Delta Y - V'_\eta Y_0 - \varepsilon V'_\xi \Xi) \\ \varepsilon \Delta X = X - (X), \quad \varepsilon \Delta Y = Y - (Y) \quad (2.2)$$

Выражения $(X), (Y)$ означают, что функции X, Y берутся при $x = \xi, y = \eta$.

Из соотношений (2.1), (2.2) следует, что правые части уравнений 2π -периодичны по t и достаточно гладкие относительно $\xi \in D_x, \eta \in D_y, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. С точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ они совпадают с уравнениями (1.2).

Перейдем от переменных ξ, η к переменным ξ, ζ, φ посредством неособенной замены

$$\xi = \xi, \quad \eta = \eta_0(\varphi, \xi, \zeta) \quad \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} \omega(\xi, \zeta) \equiv Y_0(\xi, \eta_0) \right) \quad (2.3)$$

где η_0, ω – известные функции согласно (1.3). Объединим векторы ξ, ζ в один

$(n_x + n_y - 1)$ -мерный вектор $\alpha = (\xi^T, \zeta^T)^T$; стандартным приемом получим систему со скалярной медленной фазой φ

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \varepsilon^2 A(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad \alpha(0) = \alpha^0, \quad \alpha, \alpha^0 \in D_\alpha \\ \dot{\varphi} &= \varepsilon \omega(\alpha) + \varepsilon^2 \Phi(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi(0) = \varphi^0 \pmod{2\pi}, \quad |\varphi| < \infty\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$A = (\Xi^T, Z^T)^T, \quad (\Phi, Z^T)^T = \left\| \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \right\|^{-1} \left(H - \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \Xi \right)$$

Компонента ξ вектора α описывается уравнением (2.2), в правую часть которого, т.е. в функцию Ξ , подставляется известное выражение η_0 (2.3). Для составляющей ζ правая часть уравнения определяется функцией Z ; для ее нахождения требуется обратить матрицу $(\partial \eta_0 / \partial(\varphi, \zeta))$ согласно (2.4); при этом определяется также скалярная функция Φ . Начальные значения $\zeta(0) = \zeta^0$, $\varphi(0) = \varphi^0$ находятся из соотношения (2.3) для η : $y^0 = \eta_0(\varphi^0, x^0, \zeta^0)$, причем φ^0 определяется с точностью до 2π . Правые части системы (2.4) являются гладкими относительно α , φ , ε и 2π -периодическими по t , φ .

Для исследования системы (2.4) при $t \in I_2$ применим схему разделения медленных и быстрых движений. При этом может производиться неполное (частичное) разделение переменных, при котором система уравнений для переменных, отвечающих α и φ , связана, а переменная t отделяется. Для дальнейшего полного разделения переменных α и φ может быть использована усредненная система, не содержащая аргумента t . Как и в классическом методе усреднения для $t \in I_1$, соответствующие асимптотические разложения не должны содержать сингулярных слагаемых на расширенном отрезке $t \in I_2$.

3. Отделение быстрой фазы. Будем рассматривать α , φ как медленные переменные, а аргумент t – как быструю фазу. Совершим замену переменных α , φ на β , ψ , где β , ψ – усредненные по t значения, уравнения изменения для которых не содержат аргумента t ,

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta + \varepsilon^2 \Pi(t, \beta, \psi, \varepsilon) = \beta + \varepsilon^2 \Pi_2(t, \beta, \psi) + \varepsilon^3 \Pi_3 + \dots + \varepsilon^k \Pi_k + \varepsilon^{k+1} \dots \\ \varphi &= \psi + \varepsilon^2 \Gamma(t, \beta, \psi, \varepsilon) = \psi + \varepsilon^2 \Gamma_2(t, \beta, \psi) + \varepsilon^3 \Gamma_3 + \dots + \varepsilon^{k-1} \Gamma_{k-1} + \varepsilon^k \dots \\ \dot{\beta} &= \varepsilon^2 B(\beta, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^2 [B_0(\beta, \psi) + \varepsilon B_1 + \dots + \varepsilon^{k-2} B_{k-2}] + \varepsilon^{k+1} \dots \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \omega(\beta) + \varepsilon^2 \Psi(\beta, \psi, \varepsilon) = \varepsilon \omega(\beta) + \varepsilon^2 [\Psi_0(\beta, \psi) + \varepsilon \Psi_1 + \dots + \varepsilon^{k-3} \Psi_{k-3}] + \varepsilon^k \dots \\ k &\geq 2, \quad \Gamma_j, \Psi_j \equiv 0, \quad j \leq 1, \quad \omega \neq \text{const}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Искомые коэффициенты Π_j , Γ_j асимптотических разложений (3.1) и соответствующие им правые части уравнений для β , ψ получаются стандартным образом [1, 2] в результате дифференцирования α , φ по t , подстановки в (2.4) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε^j :

$$\begin{aligned}(I + \varepsilon^2 \Pi'_\beta) B + \Pi'_\psi (\varepsilon \omega + \varepsilon^2 \Psi) &= A(t, \beta + \varepsilon^2 \Pi, \psi + \varepsilon^2 \Gamma, \varepsilon) - \Pi'_t \\ \varepsilon^3 \Gamma'_\beta B + (1 + \varepsilon^2 \Gamma'_\psi) (\varepsilon \omega(\beta) + \varepsilon^2 \Psi) &= \omega(\beta + \varepsilon^2 \Pi) + \varepsilon \Phi(t, \beta + \varepsilon^2 \Pi, \psi + \varepsilon^2 \Gamma, \varepsilon) - \varepsilon \Gamma'_t \\ B &= B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots, \quad \Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \dots \\ \Pi &= \Pi_2 + \varepsilon \Pi_3 + \varepsilon^2 \Pi_4 + \dots, \quad \Gamma = \Gamma_2 + \varepsilon \Gamma_3 + \dots\end{aligned}\quad (3.2)$$

Из соотношений (3.2) искомые функции B , Ψ , Π , Γ могут быть определены рекуррентно с любой степенью точности по ε , определяемой гладкостью правых частей системы (2.4). В частности, можно использовать процедуру разложения по степеням

параметра ε . При этом на каждом шаге соотношения (3.2) расщепляются и искомые выражения имеют вид

$$\begin{aligned} B_0(\beta, \psi) &= A_0(\beta, \psi) = \langle A(t, \beta, \psi, 0) \rangle, & \Psi_0(\beta, \varphi) &= \Phi_0(\beta, \psi) = \langle \Phi(t, \beta, \psi, 0) \rangle \\ P_2(t, \beta, \psi) &= \int_0^t ((A) - A_0) ds, & \Gamma_2(t, \beta, \psi) &= \int_0^t ((\Phi) - \Phi_0) ds \\ B_1 &= \langle (A'_\varepsilon) \rangle - (\omega) \langle P'_{2\varphi} \rangle, & \Psi_1 &= \langle (\Phi'_\varepsilon) \rangle + (\omega') \langle P_2 \rangle - (\omega) \langle \Gamma'_2 \psi \rangle \\ P_3 &= \int_0^t ((A'_\varepsilon) - (\omega) P'_{2\varphi} - B_1) ds \\ B_2 &= \frac{1}{2} \langle A''_{\varepsilon^2} \rangle + \langle (A'_\alpha) P_2 \rangle + \langle (A'_\varphi) \Gamma_2 \rangle - \langle P'_{2\beta} \rangle B_0 - (\omega) \langle P'_{3\psi} \rangle - \langle P'_{2\varphi} \rangle \Psi_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогично вычисляются последующие коэффициенты B_j , P_j , Ψ_j , Γ_j . Они позволяют построить систему уравнений любого приближения ε при $t \in I_2$ для переменных β , ψ , причем медленная фаза ψ определяется с более низкой точностью (погрешностью ε^{j-1}) по сравнению с переменной β . Это свойство имеет место также для исходных переменных α , φ . Аналогично, как и в классической схеме [1, 2] для построения j -го приближения функции P_{j+1} , Γ_j не потребуются. Таким образом, в первом приближении, т.е. с погрешностью $O(\varepsilon)$ для α и $O(1)$ для φ , имеем, согласно (3.3),

$$\dot{\beta} = \varepsilon^2 A_0(\beta, \psi), \quad \beta(0) = \alpha^0, \quad \dot{\psi} = \varepsilon \omega(\beta), \quad \psi(0) = \varphi^0, \quad t \in I_2 \quad (3.4)$$

Построение решения сводится к интегрированию задачи Коши (3.4); при этом может быть введен медленный аргумент $\tau = \varepsilon t$, причем $\tau \in I_1$. Правая часть автономной системы (3.4) 2π -периодична по фазе ψ , $\psi \sim 1/\varepsilon$. Требуется проинтегрировать эти уравнения для $\tau \in I_1$ с погрешностью $O(\varepsilon)$ по медленным переменным β и $O(1)$ – по фазе ψ . Система может быть исследована качественными методами на цилиндрической поверхности. Если функция $\omega(\beta)$ отделена от нуля в рассматриваемой области изменения переменной β , например $\omega \geq \omega_0 > 0$, то искомое приближенное решение для $\beta(\varepsilon^2 t)$ находится введением аргумента ψ , $\psi \sim 1/\varepsilon$ и усреднением по ψ согласно стандартной процедуре метода усреднения. Фаза $\psi(\varepsilon t)$ затем определяется из неявного соотношения простой квадратурой [1–3].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Решение (точное или приближенное) задачи Коши (3.4) на отрезке изменения медленного аргумента $\tau \in I_1$ определяет решение задачи (2.4) с погрешностью $O(\varepsilon)$ по медленной переменной α на отрезке исходного аргумента $t \in I_2$; переменная φ определяется с погрешностью $O(1)$. Медленная переменная x исходной системы (1.1) вычисляется с погрешностью $O(\varepsilon)$, а относительно быстрая y – с погрешностью $O(1)$ на указанном отрезке изменения t .

Доказательство следует из замен (2.1), (2.3), (3.1) и оценок на основе леммы Гронуолла. При этом требуется, чтобы функция A в (2.4) удовлетворяла равномерному условию Липшица по α , а по φ предполагается непрерывность; функция Φ считается непрерывной по α , φ ; частота ω должна удовлетворять равномерному условию Липшица ($\alpha \in D_\alpha$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Доказательство упрощается, если потребовать дифференцируемость A , ω по $\alpha \in D_\alpha$.

Аналогично во втором приближении с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ по α , x и с погрешностью $O(\varepsilon)$ по φ , y для $t \in I_2$ имеет место задача Коши, см. (3.1) – (3.3)

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \varepsilon A_0(\beta, \psi) + \varepsilon^2 B_1(\beta, \psi), & \beta(0) &= \alpha^0, & \tau &\in I_1 \\ \dot{\psi} &= \omega(\beta) + \varepsilon \Psi_0(\beta, \psi), & \psi(0) &= \varphi^0, & \tau &= \varepsilon t \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для придания стандартной формы системы с вращающейся фазой в системе (3.5) введен медленный аргумент τ . "Возмущающие функции" B_1, Ψ_0 определены в (3.3); это требует более высокой гладкости функций A, ω, Φ , т.е. исходных функций X, Y . Требуется построить решение упрощенной системы (3.5) для $\tau \in I_1$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ по β и погрешностью $O(\varepsilon)$ по ψ . Для этой цели, как и выше, могут быть применены численные и аналитические методы. Если решение первого приближения построено, то второе приближение строится методами теории возмущений на основе системы в вариациях [2, 3].

Сходным образом находятся усредненные по t решения произвольного j -го приближения по степеням параметра ε на отрезке $t \in I_2$. Согласно соотношениям (3.1), (3.2), имеем систему j -го приближения, в которой отбрасываются члены $O(\varepsilon^{j+2})$ в уравнении для медленного вектора β и $O(\varepsilon^{j+1})$ – для медленной фазы ψ . Обозначая точкой скобу производную по медленному аргументу $\tau = \varepsilon t$, получим стандартную по Боголюбову систему [1–3]

$$\beta' = \varepsilon A_0 + \varepsilon^2 B_1 + \dots + \varepsilon^j B_{j-1}, \quad \beta(0) = \alpha^0 \quad (3.6)$$

$$\psi' = \omega(\beta) + \varepsilon \Phi_0 + \varepsilon^2 \Psi_1 + \dots + \varepsilon^{j-1} \Psi_{j-1}, \quad \psi(0) = \varphi^0$$

Напомним, что отброшенные члены разложений (3.6) зависят также 2π -периодически от быстрого аргумента $t = \tau/\varepsilon$.

Далее предполагается, что решение задачи Коши (3.6) построено с погрешностью $O(\varepsilon)$ по β и $O(\varepsilon^{j-1})$ по ψ . Тогда справедливо утверждение.

Теорема 2. Функции $\beta(\tau, \varepsilon), \psi(\tau, \varepsilon)$, согласно соотношениям (3.1) – (3.3), определяют решение задачи Коши (2.4) $\alpha(t, \varepsilon), \varphi(t, \varepsilon)$ с погрешностями $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^{j-1})$ соответственно на отрезке $t \in I_2$. Согласно соотношениям (2.1) – (2.3), погрешности $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^{j-1})$ справедливы для переменных x и y исходной системы (1.1), (1.2).

Доказательство проводится стандартными методами на основе интегральных неравенств (лемма Гронуолла [1, 2]). Для обоснования близости требуется, чтобы решение задачи первого приближения $x_{(1)}(t, x^0, y^0, \varepsilon), y_{(1)}(t, x^0, y^0, \varepsilon)$ принадлежало ограниченной области $D_x \times D_y$ вместе с некоторой окрестностью для указанного промежутка изменения аргумента при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ и, кроме того, $(j-1)$ -е производные функций X, Y (1.2) по x, y удовлетворяли условиям Липшица.

Для отделения быстрой фазы (аргумента) t может быть применен также метод последовательных приближений. После приведения соотношений (3.2) к виду

$$\Pi' = A(t, \beta, \psi, 0) - B + \varepsilon F(t, \beta, \psi, \Pi, [\Pi], \Gamma, B, \Psi, \varepsilon) \quad (3.7)$$

$$\Gamma' = \Psi(t, \beta, \psi, 0) - \Psi + \varepsilon G(t, \beta, \psi, \Pi, \Gamma, [\Gamma], B, \Psi, \varepsilon)$$

где выражения $[\cdot]$ означают линейные дифференциальные операторы по β, ψ . Искомые функции B, Ψ в уравнениях для β, ψ и функции Π, Γ , определяющие соответствующую замену переменных α, φ на β, ψ (3.1), строятся рекуррентно. На первом шаге процедуры (при $\varepsilon = 0$) имеем (см. (3.2), (3.3))

$$B_0(\beta, \psi) = \langle A(t, \beta, \psi, 0) \rangle \equiv \langle A_{(0)} \rangle$$

$$\Psi_{(0)}(\beta, \psi) = \langle \Phi(t, \beta, \psi, 0) \rangle \equiv \langle \Psi_{(0)} \rangle$$

$$\Pi_0(t, \beta, \psi) = \int_0^t (A(s, \beta, \psi, 0) - \langle A_{(0)} \rangle) ds \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{(0)}(t, \beta, \psi) = \int_0^t (\Phi(s, \beta, \psi, 0) - \langle \Phi_{(0)} \rangle) ds$$

Последующие приближения описываются аналогичными соотношениями

$$\begin{aligned} B_{j+1}(\beta, \psi, \varepsilon) &= \langle A(t, \beta, \psi, 0) + \varepsilon F(t, \beta, \psi, \Pi_{(j)}, [\Pi_{(j)}], \Gamma_{(j)} B_{(j)}, \Psi_{(j)}, \varepsilon) \rangle \\ \Psi_{j+1}(\beta, \psi, \varepsilon) &= \langle \Psi(t, \beta, \psi, 0) + \varepsilon G(t, \beta, \psi, \Pi_{(j)}, \Gamma_{(j)}, [\Gamma_{(j)}], B_{(j)}, \Psi_{(j)}, \varepsilon) \rangle \\ \Pi_{j+1}(t, \beta, \psi, \varepsilon) &= \int_0^t (A_{(0)} + \varepsilon F - \langle A_{(0)} + \varepsilon F \rangle) ds \\ \Gamma_{j+1}(t, \beta, \psi, \varepsilon) &= \int_0^t (\Psi_{(0)} + \varepsilon G - \langle \Psi_{(0)} + \varepsilon G \rangle) ds \end{aligned} \quad (3.9)$$

Разложения выражений (3.9) приводят к функциям, которые являются коэффициентами выражений (3.2). Вопреки известным утверждениям (см. [6], с. 196, 197), отметим, что построение стандартной схемы последовательных приближений связано с повышением требований гладкости к функциям A , ω , Ψ относительно переменных α , φ по мере роста порядка приближений. Это обстоятельство, как нетрудно видеть из (3.2), (3.7), (3.9), обусловлено ростом порядка производных по медленным переменным β , ψ . При этом интегрирование по t , согласно соотношениям (3.9), не приводит к сглаживанию по независимым переменным β , ψ . Последовательными приближениями удастся построить траектории соответствующей возмущенной задачи Коши с неаналитическими правыми частями [3]. В общем случае точное разделение переменных не имеет места также для аналитических систем вследствие "резонанса между медленными и быстрыми переменными" [7, 8].

4. Замечания и возможные обобщения схемы усреднения высших степеней.

1°. Рассмотрим аналогичную схему в случае выполнения следующих условий для коэффициентов B_i :

$$X_0 = B_0 = B_1 = \dots = B_{k-3} \equiv 0, \quad B_{k-2} \not\equiv 0, \quad k \geq 3 \quad (4.1)$$

при построении усредненной системы (3.1). Это означает, что отличным от нуля является член порядка ε^k в уравнении для переменной β ; с учетом условий (4.1) получим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \varepsilon^k B_{k-2}(\beta, \psi) + \varepsilon^{k+1} B_k^*(t, \beta, \psi, \varepsilon) \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \omega(\beta) + \varepsilon^2 (\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \dots + \varepsilon^{k-3} \Psi_{k-3}) + \varepsilon^k \Psi_k^*(t, \beta, \psi, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тогда, отбрасывая в системе (4.2) члены $O(\varepsilon^{k+1})$ в уравнении для β и $O(\varepsilon^k)$ в уравнении для ψ , получим систему первого приближения. Ее решение $\beta_1(t, \alpha^0, \varphi^0, \varepsilon)$, $\psi_1(t, \alpha^0, \varphi^0, \varepsilon)$ с погрешностью $O(\varepsilon)$ по α и $O(1)$ по φ определяет решение системы (2.4) на отрезке $t \in I_k$. В частности, при $\omega(\beta) \neq 0$ усреднение по φ приводит эту систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \varepsilon^k \langle B_{k-2} \rangle \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \omega(\beta) + \varepsilon^2 \langle \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \dots + \varepsilon^{k-3} \Psi_{k-3} \rangle_{(k-1)} \equiv \varepsilon \omega_{(k)}(\beta, \varepsilon) \\ \beta &= \beta_1(\varepsilon^k t, \alpha^0) + O(\varepsilon), \quad \psi = \varphi^0 + \varepsilon \int_0^t \omega_{(k)}(\beta_1, \varepsilon) dt_1 + O(1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Близость между решениями систем (4.2) и (4.3) устанавливается стандартным методом усреднения по "быстрой фазе" ψ после деления $\dot{\beta}$ на $\dot{\psi}$.

2°. Сходные разложения для медленной переменной β и медленной фазы φ могут быть проведены также и в случае $\omega(\alpha) \equiv 0$, а усредненная система типа (4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \varepsilon^k B_{k-2}(\beta, \psi) + \varepsilon^{k+1} B_k^*(t, \beta, \psi, \varepsilon) \\ \dot{\psi} &= \varepsilon^{l+2} \Psi_l(\beta, \psi) + \dots + \varepsilon^{k-1} \Psi_{k-3}(\beta, \psi) + \varepsilon^k \Psi_k^*(t, \beta, \psi, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $0 \leq l \leq k - 2$, $k \geq 3$; в частности, при $k = 3$, $l = 0$, получим систему первого приближения

$$\dot{\beta} = \varepsilon^3 B_1(\beta, \psi), \quad \dot{\psi} = \varepsilon^2 \Psi_0(\beta, \psi) \quad (4.5)$$

которая должна быть проинтегрирована на отрезке $\tau \in I_1$ после введения медленного аргумента $\tau = \varepsilon^2 t$. При условии $|\Psi_0| \geq c > 0$ из соотношений (4.5) получается уравнение относительно вектора β

$$\frac{d\beta}{d\psi} = \frac{\varepsilon B_1(\beta, \psi)}{\Psi_0(\beta, \psi)}, \quad 0 \leq \psi - \varphi^0 \leq \frac{\Theta}{\varepsilon}$$

которое может быть упрощено и приближенно исследовано с помощью стандартной процедуры метода усреднения (по ψ). На основе усредненного по ψ уравнения строится решение первого приближения $\beta_1(\varepsilon(\psi - \varphi^0), \alpha^0)$ для β и из соотношения

$$\varepsilon^2 t = \tau = \int_{\varphi^0}^{\psi} \frac{d\gamma}{\Psi_0(\beta_1(\varepsilon\gamma), \gamma)}$$

определяется функция $\psi = \psi_1(\tau, \alpha^0, \varphi^0)$ с погрешностью $O(1)$ на отрезке $\tau \in I_1$. После подстановки ψ_1 в выражение β_1 находится медленный вектор с погрешностью $O(\varepsilon)$.

Аналогичные построения проводятся в общем случае системы (4.4) на отрезке времени $t \in I_k$.

3°. Наряду с рассмотренным вариантом наличия одной медленной фазы, см. (1.3), (2.4), может быть исследована более сложная система, содержащая иерархию медленных фаз вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \varepsilon^k A(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad \dim \alpha = n, \quad \dim \varphi = m \geq 0 \\ \dot{\varphi}_1 &= \varepsilon \omega_1(\alpha, \varphi_2, \dots, \varphi_m) + \varepsilon^2 \Phi_1(t, \alpha, \varphi, \varepsilon) \\ \dot{\varphi}_2 &= \varepsilon^2 \omega_2(\alpha, \varphi_3, \dots, \varphi_m) + \varepsilon^3 \Phi_2(t, \alpha, \varphi, \varepsilon) \\ &\dots \\ \dot{\varphi}_m &= \varepsilon^m \omega_m(\alpha) + \varepsilon^{m+1} \Phi_m(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad m \leq k - 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Функции A , Φ_j , ω_j , естественно, предполагаются 2π -периодическими по фазам, причем ω_j отделены от нуля. В общем случае процедура разделения переменных для системы (4.6) весьма сложна. Но в каждом конкретном случае может быть построена соответствующая замена, позволяющая отделить интегрирование более медленных переменных от более быстрых. Если $m = 0$, то считается, что в системе присутствует только одна быстрая переменная t , по которой проводится усреднение; она изменяется на отрезке $t \in I_k$. Отметим, что в общем случае может быть также применена процедура асимптотических разложений метода многих масштабов [9].

4°. Вместо системы (1.1) может быть взята система более общая, вида [1, 2, 8]

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon), \quad x(0) = x^0, \quad \dim x = n \geq 2 \quad (4.7)$$

которая при $\varepsilon = 0$ допускает невырожденное семейство периодических решений $x_0(\theta, a)$, где скалярная фаза $\theta = v(a)t + \theta^0$, $|v| \geq v_0 > 0$, a — m -вектор произвольных постоянных из некоторой области значений $a \in D$, $1 \leq m \leq n - 1$. Считается при $m < n - 1$, что это семейство асимптотически (экспоненциально) устойчиво [1, 2]. Тогда существует традиционная замена типа [1, 10, 11]

$$x = x_0(\theta, a) + \frac{1}{2} [N(\theta, a)h + N^*(\theta, a)h^*], \quad N'_\theta v + NH = (X')N, \quad N^*_\theta v + N^*H^* = (X'_x)N^* \quad (4.8)$$

где N — комплексная матрица, периодическая по θ , h — вектор, звездочка означает

комплексное сопряжение, приводящая систему (4.7) к системе уравнений в некоторой окрестности локального интегрального многообразия

$$\begin{aligned}\dot{a} &= A(a, \theta, h, \varepsilon), \quad a(0) = a^0, \quad A = O(|\varepsilon| + |h|^2) \\ \dot{\theta} &= v(a) + \Theta(a, \theta, h, \varepsilon), \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \Theta = O(|\varepsilon| + |h|^2) \\ \dot{h} &= B(a)h + H(a, \theta, h, \varepsilon), \quad h(0) = h^0, \quad H = O(|\varepsilon| + |h|^2)\end{aligned}\tag{4.9}$$

В соответствии с заменой (4.8) искомая переменная x остается вещественной; функции A , Θ , H в системе (4.9) также оказываются вещественными. Кроме того, характеристические показатели матрицы $B(a)$ имеют отрицательные вещественные части. При достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ и $|h^0|$ решения стремятся к устойчивому интегральному многообразию; за относительно короткое время порядка $\ln |\varepsilon|^{-1}$ они оказываются сколь угодно близкими к многообразию, описываемому соотношениями

$$h = \varepsilon h_1(\alpha, \theta) + \varepsilon^2 h_2(\alpha, \theta) + \varepsilon^3 \dots\tag{4.10}$$

где функции h_j строятся стандартным образом [1, 10, 11].

Точность построения функции $h(a, \theta, \varepsilon)$ определяется степенью гладкости системы (4.9), т.е. исходной системы (4.7). После подстановки функций (4.10) в уравнения для a , θ и деления $\dot{a}$ на $\dot{\theta}$ получается с требуемой точностью по степеням ε система стандартного вида (1.1) ($t = \theta$ – аргумент). При соответствующих предположениях она может быть исследована посредством стандартной процедуры метода усреднения или схем усреднения высших степеней, см. выше. В ряде случаев, встречающихся в приложениях, усредненные уравнения для медленной переменной a могут быть получены на основе интегралов невозмущенной системы (4.7) [2, 3].

5°. В частном случае системы (2.4) $\omega(\alpha) = v = \text{const}$ переменные α , φ могут быть определены с одинаковой степенью точности по ε . При этом в разложениях (3.2) требуется построение коэффициентов Π_{k-1} , V_{k-2} , Γ_{k-1} , Ψ_{k-2} , что приведет к одинаковой погрешности $O(\varepsilon^k)$ определения α , φ на интервале $t \in I_2$; при этом $|\alpha - \alpha^0| \sim 1$, $|\varphi - \varphi^0| \sim 1/\varepsilon$.

6°. Процедура отделения быстрой фазы t (усреднение по t) проводится аналогично в случае системы вида (2.4), в которой φ – векторная фаза произвольной размерности $n_\varphi \leq n_y$. Переход от системы (2.2) к уравнениям с медленной фазой φ посредством замены типа (2.3) осуществляется сходным образом. Однако исследование усредненных по t уравнений (2.4) с помощью процедуры (3.1), например систем (3.4) – (3.6), в случае векторной фазы φ на интервале $t \in I_2$ приводит к известным трудностям ("малым знаменателям"), присущим существенно нелинейным многочастотным системам [1, 2, 8].

7°. При исследовании квазилинейных колебательных систем может быть исследована резонансная ситуация, когда одна из частот имеет относительно большую расстройку, чем другие. При соответствующих предположениях относительно свойств средних по t возмущающих воздействий (см. разд. 2) многочастотная система приводится к виду (2.4), где $\varepsilon\omega = \text{const}$ – указанная расстройка. Эта система может быть упрощена и изучена для $t \in I_2$ с помощью изложенного в разд. 3 подхода, см. примеры в разд. 5.

5. Примеры. Приведем решение первого приближения для колебательных систем вида (1.1), которые могут быть представлены в форме (2.4) и просто исследованы с помощью схемы усреднения второй степени.

Модельный пример. Сперва с иллюстративной целью рассмотрим двумерную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon f(x, y) \sin(t + \theta(x, y)), & x(0) &= x^0 \\ \dot{y} &= \varepsilon \gamma(x, y), & y(0) &= y^0\end{aligned}\quad (5.1)$$

Здесь f, θ, γ – гладкие функции x, y , 2π -периодические по медленной фазе $\varphi = y$. Посредством преобразования (2.3) приведем систему (5.1) к виду (2.4)

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon^2 (f'_a u \sin(t + \theta) + f u \theta'_a \cos(t + \theta) - f'_\varphi \gamma (\cos \theta - \cos(t + \theta)) - \\ &- f \theta'_\varphi \gamma (\sin(t + \theta) - \sin \theta)) + \varepsilon^3 \dots \\ \dot{\varphi} &= \varepsilon \gamma(a, \varphi) + \varepsilon^2 \dots, & f &= f(a, \varphi), & \theta &= \theta(a, \varphi), & \varphi &= y \\ x &= a + \varepsilon u, & u &= f(a, \varphi) (\cos \theta(a, \varphi) - \cos(t + \theta(a, \varphi)))\end{aligned}\quad (5.2)$$

Применяя процедуру усреднения из разд. 3, получим уравнения, не содержащие явно аргумента t ,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} f^2 \theta'_\xi + \gamma (f \cos \theta)'_\varphi \right), & \xi(0) &= x^0 \\ \dot{\varphi} &= \varepsilon \gamma(\xi, \varphi), & \varphi(0) &= \varphi^0\end{aligned}\quad (5.3)$$

Переменная φ в рассматриваемом первом приближении не преобразуется, и за нею сохранено старое обозначение.

Уравнения (5.3) допускают введение аргумента $\tau = \varepsilon t$; на интервале $\tau \sim 1/\varepsilon$ переменная ξ , а вместе с нею и a, x получают в общем случае приращение порядка единицы; медленная фаза изменится на величину $O(\varepsilon^{-1})$. Для исследования уравнений (5.3) могут быть применены аналитические и качественные методы фазовой плоскости, а также численные методы. Если функция γ отделена от нуля, то для производной $d\xi/d\varphi$ получается стандартное уравнение, к которому применима классическая процедура усреднения по φ на интервале $\varphi \sim 1/\varepsilon$. В первом приближении по ε получим уравнение

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Xi(\xi), \quad \Xi \equiv -\frac{1}{2} \left\langle \frac{f^2 \theta'_\xi}{\gamma} \right\rangle_\varphi, \quad \xi(\varphi^0) = x^0, \quad |\gamma| \geq \gamma_* > 0 \quad (5.4)$$

допускающее разделение переменных и интегрирование в квадратурах. В результате получаются выражения для искомого решения с погрешностью $O(\varepsilon)$ на отрезке $t \in I_2$ вида

$$\int_{\xi^0}^{\xi} \frac{d\zeta}{\Xi(\zeta)} = \varepsilon(\varphi - \varphi^0), \quad \xi = \xi_0(\varepsilon\varphi), \quad \int_{\varphi^0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\gamma(\xi_0(\varepsilon\psi), \psi)} = \varepsilon t \quad (5.5)$$

В (5.4), (5.5) предполагается, что $\Xi \not\equiv 0$. Эти соотношения свидетельствуют о том, что при $t \sim \varepsilon^{-2}$ в системе (5.1) происходит существенная эволюция переменных x, y . Стандартная процедура на интервале $t \sim 1/\varepsilon$ приводит к более простым выражениям: $x = x^0 + O(\varepsilon)$, $\dot{y} = \varepsilon \gamma(x^0, y) + O(\varepsilon^2)$.

Вынужденные квазилинейные колебания. Рассмотрим возмущенные периодические движения нелинейного осциллятора в безразмерных переменных

$$\ddot{q} + Q(q) = P(t) - \Lambda \dot{q}, \quad Q(0) = 0 \quad (5.6)$$

которые происходят в малой окрестности точки $q = \dot{q} = 0$. Здесь q – обобщенная координата, $\dot{q}$ – скорость; возвращающаяся сила – Q предполагается достаточно

гладкой функцией. Двухчастотное воздействие $P(t)$ считается малым, и 2π -периодическим по t ; $\Lambda > 0$ – малый коэффициент диссипации, предполагаемый постоянным. Введем малый параметр $\varepsilon > 0$, характеризующий указанные допущения. Имеем

$$\begin{aligned} \ddot{y} + v^2 y &= \varepsilon Y(t, y, \dot{y}, \varepsilon); \quad q = \varepsilon y, \quad v^2 = Q'(0) > 0 \\ Y &= h \sin 2t + \alpha y^2 + \varepsilon(f \sin(t + \kappa) + \beta y^3 - \lambda \dot{y}) + \varepsilon^2 \dots \\ P &= \varepsilon^2 h \sin 2t + \varepsilon^3 f \sin(t + \kappa) \\ \alpha &= -\frac{1}{2} Q''(0), \quad \beta = -\frac{1}{6} Q'''(0), \quad \Lambda = \varepsilon^2 \lambda \end{aligned} \quad (5.7)$$

Числовые параметры $h, f, \alpha, \beta, \kappa, \lambda, v$ считаются величинами порядка единицы, причем v близко к единице: $v = 1 + \varepsilon\gamma$, $\gamma \sim 1$. Перейдем в системе (5.7) к переменным амплитуда – фаза

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A(t, a, \psi, \varepsilon), \quad A \equiv -F \sin \psi \\ y &= a \cos \psi, \quad \dot{y} = -a \sin \psi, \quad a > 0 \\ \dot{\psi} &= 1 + \varepsilon \Psi(t, a, \psi, \varepsilon), \quad \Psi \equiv -F a^{-1} \cos \psi \\ F &= Y - 2\gamma y - \varepsilon \gamma^2 y \end{aligned} \quad (5.8)$$

Вместо фазы ψ введем медленную расстройку $\theta = \psi - t$ и представим систему (5.8) в виде уравнений (1.1), для которых выполняются свойства (1.2): $\langle(A)\rangle \equiv 0$, $\langle(\Psi)\rangle = \gamma$. Выражение вида $\langle \cdot \rangle$ означает, что в функции F величина $\varepsilon = 0$. Посредством замены типа (2.1) при учете приведенных соотношений для средних $\langle(A)\rangle, \langle(\Psi)\rangle$ получается система вида (2.4)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon^2 ((A'_\xi) U_0 + (A'_\delta) V_0 + (A'_\varepsilon) - U'_{0\delta} \gamma) + \varepsilon^3 \dots \\ \dot{\delta} &= \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 \dots, \quad a = \xi + \varepsilon U_0, \quad \theta = \delta + \varepsilon V_0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$U_0 = -\left(\frac{2}{3} h (\sin^3 t \cos \delta + (1 - \cos^3 t) \sin \delta) + \gamma \xi (\sin^2 \delta - \sin^2(t + \delta)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \alpha \xi^2 (\cos^3 \delta - \cos^3(t + \delta)) \right)$$

$$V_0 = -\left(\frac{2}{3} \frac{h}{\xi} ((1 - \cos^3 t) \cos \delta - \sin^3 t \sin \delta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \gamma (\sin 2(t + \delta) - \sin 2\delta) + \alpha \xi (\sin(t + \delta) - \sin \delta + \frac{1}{3} \sin^3 \delta - \sin^3(t + \delta)) \right)$$

После усреднения по t уравнения для ξ (5.9) получается система первого приближения типа (3.4)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{4} \gamma^2 \xi - \frac{1}{2} f \cos(\kappa - \delta) - \frac{1}{2} \lambda \xi + \frac{2}{3} h \gamma \cos \delta + \gamma^2 \xi \sin 2\delta - \alpha \gamma \xi^2 \cos^2 \delta \sin \delta \right), \\ \xi(0) &= a^0 \\ \dot{\delta} &= \varepsilon \gamma, \quad \delta(0) = \varphi^0; \quad t \in I_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Дальнейшее упрощение системы (5.10) связано с усреднением уравнения для ξ по δ согласно изложенному в разд. 3 подходу при $\gamma \sim 1$. В результате получается весьма

простое линейное по ξ уравнение, интегрирование которого приводит к искомому решению первого приближения

$$\xi = a^0 \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2 t \left(\frac{\gamma^2}{2} + \lambda\right)\right), \quad \delta = \varphi^0 + \varepsilon \gamma t \quad (5.11)$$

$$|a - \xi| \leq C\varepsilon, \quad |\theta - \delta| \leq C, \quad t \in I_2$$

Интересно отметить, что частотная расстройка $\varepsilon\gamma$ приводит к дополнительному затуханию колебаний независимо от ее знака. Для отрезка $t \in I_1$ стандартная процедура усреднения дает $\xi = a^0 + O(\varepsilon)$.

Параметрические колебания маятника. Рассмотрим плоские колебания физического маятника, точка подвеса которого перемещается заданным образом [3]. В стандартных обозначениях и терминах имеем уравнение движения

$$J\ddot{\alpha} + Mgl \sin \alpha = -Ml(\ddot{x}_0 \cos \alpha + \ddot{y}_0 \sin \alpha) - \Lambda \dot{\alpha} \quad (5.12)$$

Предположим, что ускорение $(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0)$ точки подвеса в плоскости (x, y) изменяется периодически с частотой ν . Тогда, вводя вместо аргумента времени t фазу $\theta = \nu t$, приведем уравнение (5.12) к безразмерному виду

$$\alpha'' + (N^2 + \varepsilon h''(\theta)) \sin \alpha = -\varepsilon s''(\theta) \cos \alpha - \varepsilon^2 \lambda \alpha' \quad (5.13)$$

$$N^2 = \frac{Mgl}{J\nu^2}, \quad \varepsilon h'' \equiv \frac{Ml\ddot{y}_0}{J\nu^2}, \quad \varepsilon s'' \equiv \frac{Ml\ddot{x}_0}{J\nu^2}, \quad \varepsilon^2 \lambda = \frac{\Lambda}{J\nu}$$

Штрихами обозначены производные по аргументу θ , малый параметр ε характеризует величины ускорений оси маятника вдоль осей x, y и малость приведенного коэффициента диссипации Λ .

Уравнение (5.13) описывает широкий класс вынужденных и параметрических вращательно-колебательных движений маятника, исследованию которых посвящены многочисленные публикации. Значительное внимание уделялось случаю быстрых вибраций точки подвеса ($N \sim \varepsilon$); ниже рассматривается задача о параметрических малых колебаниях при следующих предположениях ($\gamma, \kappa = \text{const}$):

$$\alpha = \varepsilon z, \quad h'' = -\cos 2\theta, \quad N = 2 + \varepsilon\gamma, \quad s'' = -4\varepsilon^2 d \sin(2\theta + \kappa)$$

$$z'' + (4 - \varepsilon \cos 2\theta)z = -4\varepsilon\gamma z - \varepsilon^2 \left(4\gamma^2 z + \lambda z' - \frac{2}{3}z^3 + 4d \sin(2\theta + \kappa)\right) + \varepsilon^3 \dots \quad (5.14)$$

Согласно соотношениям (5.14), параметрические колебания исследуются в ε -окрестности второй резонансной зоны. Стандартным образом приведем уравнение (5.14) к системе с вращающейся фазой ψ , аналогичной системе (5.8). Имеем

$$a' = \varepsilon A(\theta, a, \psi, \varepsilon), \quad z = a \cos \psi, \quad A = -\frac{1}{2} F \sin \psi$$

$$\psi' = 2 + \varepsilon \Psi(\theta, a, \psi, \varepsilon), \quad z' = -2a \sin \psi, \quad \Psi = -\frac{1}{2} F a^{-1} \cos \psi \quad (5.15)$$

$$F \equiv z(\cos 2\theta - 4\gamma) - \varepsilon(4\gamma^2 z + \lambda z' - \frac{2}{3}z^3 + 4d \sin(2\theta + \kappa))$$

Посредством элементарной подстановки $\psi = 2\theta + \varphi$ система (5.15) приводится к виду (1.1), для которой выполняются условия (1.2): $\langle(A)\rangle_\theta \equiv 0$, $\langle(\Psi)\rangle_\theta = \gamma$. Медленная переменная a и фаза φ подвергаются преобразованию типа (3.1), приводящему

к отделению аргумента θ с относительной погрешностью $O(\varepsilon)$ для $\theta \sim 1/\varepsilon^2$. Имеем сперва соотношения, аналогичные (2.1) – (2.4),

$$\begin{aligned} a &= \xi + \varepsilon U(\theta, \xi, \delta), & \varphi &= \delta + \varepsilon V(\theta, \xi, \delta) \\ U &= \int_0^\theta (A) d\theta_1, & V &= \int_0^\theta ((\Psi) - \gamma) d\theta_1 \\ \xi' &= \varepsilon^2 ((A'_a)U + (A'_\psi)V + (A'_\varepsilon) - \gamma U'_\delta) + \varepsilon^3 \dots \\ \delta' &= \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

затем усреднение правой части уравнения для ξ по явно входящему аргументу θ приводит к указанной выше системе (3.1), которая, однако, весьма громоздка. При $\gamma \sim 1$ ("вдали" от параметрического резонанса) после усреднения по медленной фазе δ с той же относительной погрешностью получаются выражения

$$a = \xi = a^0 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \lambda \theta\right) + O(\varepsilon), \quad \delta = \varepsilon \gamma \theta + O(1), \quad \theta \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (5.17)$$

Из выражений (5.17) следует, что существенного, порядка $O(1)$, параметрического и внешнего воздействия на колебания системы (5.14) при $t \sim 1/\varepsilon^2$ не происходит, если частотная расстройка равна $\varepsilon \gamma$, $\gamma \sim 1$. Амплитуда колебаний затухает по θ экспоненциально с показателем $-1/2 \varepsilon^2 \lambda$. Конечно, ситуация радикально изменится, если $\gamma \sim \varepsilon$, так как при этом условии в системе имеют место параметрический и внешний резонансы [4]. Они обусловлены вертикальными и горизонтальными колебаниями точки подвеса соответственно. Таким образом, при изучении колебаний маятника с подвижной точкой подвеса на отрезке $t \in I_2$ обнаруживаются механические эффекты, связанные с существенной эволюцией медленных переменных. Применение стандартного подхода ($t \sim 1/\varepsilon$) не позволяет их установить.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00157, 02-01-00252).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
3. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в теории нелинейных колебаний // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 843–853.
5. Черноушко Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. Нейштадт А.И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Вып. 2. С. 197–204.
8. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные пробл. математики. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
9. Миркина А.С. Об одной модификации метода усреднения и оценке старших приближений // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 876–884.
10. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
11. Акуленко Л.Д. Периодические движения автономных систем в окрестности устойчивого интегрального многообразия // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 26–35.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.2001