

УДК (532.591+539.3):534.1

© 2002 г. И.В. Стурова

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ДАВЛЕНИЙ НА ПЛАВАЮЩУЮ УПРУГУЮ ПЛАТФОРМУ

Приводится решение линейной гидроупругой задачи об установившихся вынужденных колебаниях плавающей платформы под действием локализованной внешней нагрузки. Платформа предполагается достаточно тонкой и моделируется упругой пластиной со свободными краями. Используется метод декомпозиции области, занятой жидкостью, на подобласти, ограниченные сверху либо свободной поверхностью, либо упругой пластиной. Решение получено с помощью разложения искомых потенциалов скоростей по собственным функциям соответствующих краевых задач. В плоском случае рассмотрена балочная пластина конечной и полубесконечной длины, в пространственном – круглая пластина. Выполнено сопоставление решений, полученных для мелкой воды и жидкости конечной глубины.

Воздействие динамических нагрузок на плавающую тонкую упругую пластину интенсивно изучалось применительно к ледовому покрову (см., например, [1–3]). При этом предполагалось, что лед полностью покрывает свободную поверхность жидкости. В связи с созданием искусственных плавающих сооружений больших размеров типа плавучих островов возникла необходимость исследования влияния нестационарных динамических нагрузок на упругую пластину конечных размеров. Несмотря на достаточно полное решение в линейной постановке гидроупругой задачи о действии нестационарных нагрузок на безграничную пластину, решения для конечных областей отсутствуют.

В данной работе получено решение линейной гидроупругой задачи об установившихся колебаниях плавающей ограниченной пластины под действием периодической по времени внешней нагрузки.

1. Постановка задачи. Пусть на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости глубины h плавает тонкая упругая пластина, занимающая область Ω_1 и ограниченная контуром Γ . Область Ω_2 вне пластины является свободной поверхностью жидкости. Предполагается, что на пластину действуют периодические по времени с частотой ω нормальные напряжения вида

$$p(x, y, t) = P(x, y) \exp(i\omega t) \quad (1.1)$$

где x и y – горизонтальные координаты, t – время. Исследуем колебания жидкости и пластины, вызванные этими напряжениями, считая возникающее движение установившимся. Движение жидкости предполагается потенциальным, а скорость жидких частиц и прогиб пластины – малыми.

Потенциалы скоростей $\phi_j(\mathbf{x}, t)$, описывающие движение жидкости под пластиной ($j = 1$) и в области, ограниченной свободной поверхностью ($j = 2$), ищем в виде $\phi_j(\mathbf{x}, t) = \Phi_j(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$, где $\mathbf{x} = (x, y, z)$, ось z направлена вертикально вверх и начало координат расположено на дне бассейна. Нормальный прогиб пластины $w(x, y, t) = W(x, y) \exp(i\omega t)$ и возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t) = \zeta(x, y) \exp(i\omega t)$ определяются из соотношений

$$W = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=h}, \quad \zeta = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=h} \quad (1.2)$$

Согласно линейной теории волн, для определения $\Phi_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2$) необходимо решить систему уравнений

$$\Delta\Phi_j + \frac{\partial^2\Phi_j}{\partial z^2} = 0 \quad (x, y \in \Omega_j, 0 < z < h), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

с граничными условиями

$$D\Delta^2 W - \rho_1 h_1 \omega^2 W + \rho g W + i\rho\omega\Phi_1 = -P(x, y) \quad (x, y \in \Omega_1, z = h) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\Phi_2 = 0 \quad (x, y \in \Omega_2, z = h) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \quad (1.6)$$

где $D = Eh_1^3/[12(1 - \nu^2)]$, E , ρ_1 , h_1 , ν – модуль нормальной упругости, плотность, толщина и коэффициент Пуассона пластины, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести. На боковой поверхности вертикального столба жидкости с сечением Ω_1 должны выполняться следующие условия согласования, означающие непрерывность давления и горизонтальной скорости в направлении нормали n к контуру Γ :

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \quad (x, y \in \Gamma, 0 < z < h) \quad (1.7)$$

На краях пластины ставятся условия свободного края – равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы (см., например, [4])

$$\Delta W = \nu_1 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \alpha'(s) \frac{\partial W}{\partial n} \right], \quad \frac{\partial \Delta W}{\partial n} = \nu_1 \frac{\partial}{\partial s} \left[\alpha'(s) \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial n} \right] \quad (x, y \in \Gamma) \quad (1.8)$$

где $\alpha(s)$ – угол наклона внешней нормали к оси x , s – дуговая координата контура Γ , $\nu_1 = 1 - \nu$, штрих означает дифференцирование по s . Вдали от пластины следует выполнить условие излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_0 \right) \Phi_2 = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.9)$$

где k_0 – волновое число поверхностной гравитационной волны, определяемое как вещественный положительный корень уравнения

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh) \quad (1.10)$$

Условие излучения означает, что при $r \rightarrow \infty$ волны являются расходящимися. Мощность, затрачиваемая на генерацию этих волн, равна [5]

$$T = \frac{i}{2} \rho \omega r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \Phi_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} dz \quad (r \rightarrow \infty), \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (1.11)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Альтернативный способ определения мощности через энергию плоских прогрессивных волн дан в [6]. Известно, что средний поток энергии F за период колебаний для плоской волны с амплитудой ζ_0 равен

$$F = \frac{1}{4} \rho g \omega \zeta_0^2 \left[\frac{1}{k_0} + \frac{2h}{\operatorname{sh}(2k_0 h)} \right]$$

и потребная мощность дается выражением

$$T = r \int_0^{2\pi} F d\theta \quad (1.12)$$

2. Приближение мелкой воды. Если глубина жидкости достаточно мала, то можно использовать теорию мелкой воды, согласно которой искомые потенциалы скоростей не зависят от вертикальной координаты z . В этом приближении легко учесть осадку пластины d . Для определения $\Phi_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) получаем следующую задачу (подробнее см., например, в [4]):

$$D\Delta^3\Phi_1 + (\rho g - \rho_1 h_1 \omega^2) \Delta\Phi_1 + \frac{\rho \omega^2}{h_2} \Phi_1 = \frac{i\omega}{h_2} P(x, y) \quad (x, y \in \Omega_1)$$

$$\Delta\Phi_2 + \frac{\omega^2}{gh} \Phi_2 = 0 \quad (x, y \in \Omega_2), \quad h_2 = h - d$$

Условия согласования (1.7) примут вид

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{h}{h_2} \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \quad (x, y \in \Gamma) \quad (2.1)$$

Условия свободного края (1.8) не меняются, а в условии излучения (1.9) следует положить

$$k_0 = \omega / \sqrt{gh} \quad (2.2)$$

Нормальный прогиб пластины равен

$$W = \frac{ih_2}{\omega} \Delta\Phi_1$$

3. Балочная пластина. Рассмотрим плоскую задачу, в которой отсутствует зависимость от координаты y . Предположим, что функция $P(x)$ является четной и отлична от нуля только при $|x| < l$. Длина пластины равна L и ее левый конец имеет горизонтальную координату $x = -L_1$, а правый $x = L_2 = L - L_1$ ($L_1, L_2 > l$). Для решения плоской задачи удобно разбить область, занятую жидкостью, на три части: S_1 ($-L_1 < x < L_2$), S_2 ($x < -L_1$), S_3 ($x > L_2$); в каждой из них потенциал скоростей обозначим через $\Phi_j(x, z)$ ($j = 1, 2, 3$). Внутри жидкости эти функции удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_j}{\partial z^2} = 0 \quad (x, y \in S_j)$$

Граничное условие (1.4) с использованием соотношений (1.2) запишем в виде

$$\left[D \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \rho_1 h_1 \omega^2 + \rho g \right] \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \rho \omega^2 \Phi_1 = -i\omega P(x) \quad (-L_1 < x < L_2, z = h)$$

В областях S_2 и S_3 , ограниченных свободной поверхностью, при $z = h$ выполняется условие (1.5) для Φ_2 и Φ_3 , а на дне для всех функций Φ_j – условие (1.6). Условия согласования (1.7) теперь имеют вид

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \quad (x = -L_1, 0 \leq z \leq h) \quad (3.1)$$

$$\Phi_1 = \Phi_3, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_3}{\partial x} \quad (x = L_2, 0 \leq z \leq h) \quad (3.2)$$

Условия свободного края (1.8) значительно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^3 \partial z} = 0 \quad (x = -L_1, x = L_2, z = h)$$

Функции Φ_j ($j = 1, 2, 3$) будем, как и ранее [7, 8], искать в виде разложения по собственным функциям соответствующих краевых задач. В области жидкости S_1 , ограниченной упругой пластиной, нормированные собственные вертикальные моды имеют вид

$$q_m(z) = \text{ch}(\mu_m z) / \sqrt{\Lambda(\mu_m)}, \quad \Lambda(\mu) = h/2 + \text{sh}(2\mu h)/(4\mu)$$

где собственные значения μ_m – корни уравнения

$$\omega^2 = S(\mu); \quad S(\mu) = (D\mu^4 + \rho g)\mu \text{th}(\mu h) / Q(\mu), \quad Q(\mu) = \rho + \rho_1 h_1 \mu \text{th}(\mu h)$$

Значения μ_{-1} и $\mu_{-2} = -\mu_{-1}^*$ являются комплексными и принадлежат соответственно первому и второму квадранту комплексной плоскости μ , вещественный положительный корень μ_0 представляет собой волновое число изгибно-гравитационной волны, а значения $\mu_1, \mu_2, \dots$ – чисто мнимые корни.

Общее решение для Φ_1 запишем в виде

$$\Phi_1(x, z) = \sum_{m=-2}^{\infty} [A_m \exp(-i\mu_m x) + B_m \exp(i\mu_m x)] q_m(z) + \Phi_0(x, z) \quad (3.3)$$

где $\Phi_0(x, z)$ – решение задачи о воздействии периодических давлений на безграничную балочную пластину. Решение этой задачи известно [1, 2, 9] и имеет вид

$$\Phi_0 = \omega \left[\frac{i}{\pi} \text{p.v.} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{P}(\xi) \text{ch}(\xi z) \cos(\xi x) d\xi}{\text{ch}(\xi h) Q(\xi) [\omega^2 - S(\xi)]} - \frac{\tilde{P}(\mu_0) \text{ch}(\mu_0 z) \cos(\mu_0 x)}{\text{ch}(\mu_0 h) Q(\mu_0) S'(\mu_0)} \right] \quad (3.4)$$

$$\tilde{P}(\xi) = 2 \int_0^l P(x) \cos(\xi x) dx, \quad S'(\mu_0) \equiv \left. \frac{dS}{d\xi} \right|_{\xi=\mu_0}$$

($\tilde{P}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $P(x)$, p.v. означает интеграл в смысле главного значения). Второе слагаемое в квадратных скобках в равенстве (3.4) необходимо для удовлетворения условию излучения, так как подынтегральное выражение всегда имеет простой полюс в точке $\xi = \mu_0$. В дальнем поле бесконечной пластины генерируется одна система изгибно-гравитационных волн с длиной волны $2\pi/\mu_0$, и нормальный прогиб пластины описывается выражением

$$W(x) = \frac{i\mu_0 \tilde{P}(\mu_0) \text{th}(\mu_0 h)}{Q(\mu_0) S'(\mu_0)} \exp(\mp i\mu_0 x) \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

Примеры расчетов амплитуд этих волн даны ранее [9].

Общие решения для Φ_2 и Φ_3 в областях, ограниченных свободной поверхностью жидкости, можно представить в виде

$$\Phi_2(x, z) = C_0 \exp(ik_0 x) f_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp(-ik_m x) f_m(z) \quad (3.5)$$

$$\Phi_3(x, z) = F_0 \exp(-ik_0 x) f_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} F_m \exp(ik_m x) f_m(z) \quad (3.6)$$

где $f_m = \text{ch}(k_m z) / \sqrt{\Lambda(k_m)}$; $k_1, k_2, \dots$ – чисто мнимые корни уравнения (1.10). Волновые моды, связанные с k_m и μ_m ($m \geq 1$), носят название краевых.

При численном решении используется метод редукции и бесконечные ряды в (3.3), (3.5), (3.6) заменяются конечными суммами с числом членов M . Условия согласования (3.1), (3.2) выполняются в интегральном смысле, т.е. они последовательно умножаются на функции $f_m(z)$, $q_m(z)$ ($0 \leq m \leq M$) и интегрируются в интервале $0 \leq z \leq h$. В итоге задача сводится к решению системы $4(M+2)$ линейных уравнений.

После вычисления всех неизвестных постоянных в (3.3), (3.5), (3.6) можно определить нормальный прогиб пластины и вертикальные смещения свободной поверхности жидкости, учитывая (1.2). Амплитуды поверхностных волн $\zeta_0^\pm$ вдали от пластины при $x \rightarrow \pm\infty$ даются выражениями

$$\zeta_0^+ = k_0 \operatorname{sh}(k_0 h) |C_0| / \omega, \quad \zeta_0^- = k_0 \operatorname{sh}(k_0 h) |F_0| / \omega$$

Частным случаем данной задачи при $L_1 \rightarrow -\infty$ является задача о воздействии поверхностных давлений на полубесконечную балочную пластину. В этом случае область, занятая жидкостью, делится на две части: S_1 ($x < L_2$) и S_3 ($x > L_2$). Представление для Φ_3 по-прежнему имеет вид (3.6), а для Φ_1 в (3.3) следует опустить члены с коэффициентами B_{-2} , B_{-1} , A_0 и B_m ($m \geq 1$). На границе областей S_1 и S_3 должны выполняться условия согласования (3.2). Для решения этой задачи также использован метод интегральной склейки, и задача сведена к системе $2(M+2)$ линейных уравнений.

В приближении мелкой воды краевые волны отсутствуют, и для пластины конечной длины представления (3.3), (3.5), (3.6) имеют более простой вид

$$\Phi_1(x, z) = \sum_{m=-2}^0 [A_m \exp(-i\mu_m x) + B_m \exp(i\mu_m x)] + \Phi_0(x, z) \quad (3.7)$$

$$\Phi_2 = C_0 \exp(ik_0 x), \quad \Phi_3 = F_0 \exp(-ik_0 x) \quad (3.8)$$

Величина k_0 задана выражением (2.2), а μ_m ($m = -2, -1, 0$) – решения кубического уравнения

$$D\chi^3 + (\rho g - \omega^2 \rho_1 h_1) \chi - \omega^2 \rho / h_2 = 0$$

Известно [1], что это уравнение имеет один положительный корень χ_1 и два комплексно-сопряженных корня χ_2 и χ_3 , тогда $\mu_0 = \sqrt{\chi_1}$, $\mu_{-1} = \sqrt{\chi_2}$, $\mu_{-2} = -\sqrt{\chi_3}$. Решение $\Phi_0(x)$ для бесконечной пластины имеет вид [1]

$$\Phi_0 = \frac{\omega}{h_2} \left[\frac{i}{\pi} \text{p.v.} \int_0^\infty \frac{\tilde{P}(\xi) \cos(\xi x) d\xi}{Z(\xi) [\omega^2 - \Upsilon(\xi)]} - \frac{\tilde{P}(\mu_0) \cos(\mu_0 x)}{Z(\mu_0) \Upsilon'(\mu_0)} \right]$$

где

$$Z(\xi) = \rho_1 h_1 \xi^2 + \rho / h_2, \quad \Upsilon(\xi) = \xi^2 (D\xi^4 + \rho g) / Z(\xi), \quad \Upsilon'(\mu_0) \equiv d\Upsilon / d\xi|_{\xi=\mu_0}$$

Неизвестные коэффициенты в (3.7), (3.8) определяются из условий согласования (2.1), которые в плоском случае имеют вид

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{h}{h_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \quad (x = -L_1)$$

$$\Phi_1 = \Phi_3, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{h}{h_2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \quad (x = L_2)$$

и условий свободного края

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} = \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial x^5} = 0 \quad (x = -L_1, \quad x = L_2)$$

В приближении мелкой воды задача сводится к решению системы восьми линейных уравнений для конечной пластины и четырех уравнений для полубесконечной пластины.

4. Круглая пластина. Для пространственной задачи рассмотрим наиболее простую форму – круглую пластину. Наряду с декартовой системой координат x, y, z удобно ввести цилиндрическую систему r, θ, z . Общая вертикальная ось z проходит через центр пластины радиуса r_0 . Предположим, что нормальные напряжения приложены к пластине только в круге радиуса l , центр которого находится в точке $x = L_1, y = 0$ ($l + L_1 < r_0$), и функция $P(x, y)$ в (1.1) зависит только от $R = \sqrt{(x - L_1)^2 + y^2}$.

Условия согласования (1.7) для круглой пластины примут вид

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \quad (r = r_0, \quad 0 \leq z \leq h) \quad (4.1)$$

а условия свободного края (1.8)

$$\Delta W - \frac{v_1}{r_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{v_1}{r_0} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial \Delta W}{\partial r} - \frac{v_1}{r_0^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{v_1}{r_0^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^2 \partial r} = 0 \quad (r = r_0) \quad (4.2)$$

Используя предложенный ранее подход [7], решение уравнений (1.3) ищем в виде

$$\Phi_1 = \sum_{m=-2}^{\infty} X_m(r, \theta) q_m(z) + \Phi_0(R, z), \quad \Phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(r, \theta) f_m(z)$$

где функции X_m и Y_m удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta X_m + \mu_m^2 X_m = 0 \quad (m \geq -2), \quad \Delta Z_m + k_m^2 Z_m = 0 \quad (m \geq 0) \quad (4.3)$$

Функция Φ_0 представляет собой решение осесимметричной задачи о периодических давлениях, действующих на безграничную пластину. Известно, что [1, 2]

$$\Phi_0(R, z) = \frac{\omega}{2} \left[\frac{i}{\pi} \text{p.v.} \int_0^{\infty} \frac{\xi \tilde{P}(\xi) J_0(\xi R) \text{ch}(\xi z) d\xi}{\text{ch}(\xi h) Q(\xi) [\omega^2 - S(\xi)]} - \frac{\mu_0 \tilde{P}(\mu_0) J_0(\mu_0 R) \text{ch}(\mu_0 z)}{\text{ch}(\mu_0 h) Q(\mu_0) S'(\mu_0)} \right] \quad (4.4)$$

$$\tilde{P}(\xi) = 2\pi \int_0^l R P(R) J_0(\xi R) dR$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решение уравнений (4.3) ищем в виде

$$X_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} J_n(\mu_m r) \cos(n\theta) \quad (m \geq -2)$$

$$Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(0)} H_n^{(2)}(k_0 r) \cos(n\theta), \quad Z_m = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(m)} K_n(|k_m| r) \cos(n\theta) \quad (m \geq 1)$$

где $H_n^{(2)}$ – функция Ганкеля второго рода, K_n – модифицированные функции Бесселя второго рода.

Выражение для Φ_0 в (4.4) разложим в ряд Фурье

$$\Phi_0(R, z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(r, z) \cos(n\theta)$$

$$D_n = \omega \epsilon_n \left[\frac{i}{\pi} \text{p.v.} \frac{\xi \tilde{P}(\xi) \text{ch}(\xi z)}{\text{ch}(\xi h) Q(\xi) [\omega^2 - S(\xi)]} J_n(\xi r) J_n(\xi L_1) d\xi - \frac{\mu_0 \tilde{P}(\mu_0) \text{ch}(\mu_0 z)}{\text{ch}(\mu_0 h) Q(\mu_0) S'(\mu_0)} J_n(\mu_0 r) J_n(\mu_0 L_1) \right]$$

$$\epsilon_0 = 1/2, \quad \epsilon_n = 1 \quad (n \geq 1)$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$ используются условия согласования (4.1), которые выполняются аналогично изложенному в разд. 3 в интегральном смысле, и условия свободного края (4.2). В полученных системах уравнений следует собрать коэффициенты при одинаковых значениях $\cos(n\theta)$, и для каждой угловой гармоники, используя метод редукции, задача сведется к решению системы $2(M + 2)$ линейных уравнений.

При расположении пятна давления в центре пластины ($L_1 = 0$) рассматриваемая задача становится осесимметричной и отличными от нуля будут только коэффициенты при $n = 0$. При $L_1 \neq 0$ в численном решении учитывалось N угловых гармоник.

Вдали от пластины при $r \rightarrow \infty$ вертикальные смещения свободной поверхности имеют вид

$$\zeta = -\frac{ik_0 \operatorname{sh}(k_0 h)}{\omega \sqrt{\Lambda(k_0)}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(0)} H_n^{(2)}(k_0 r) \cos(n\theta)$$

Учитывая асимптотическое представление функции Ганкеля при больших значениях аргумента, получим

$$\zeta \approx -\frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{2k_0}{\pi r \Lambda(k_0)}} \operatorname{sh}(k_0 h) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - k_0 r\right)\right] H(\theta) \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$H(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(0)} \exp\frac{in\pi}{2} \cos(n\theta)$$

Амплитуда поверхностной волны в дальнем поле имеет вид

$$\zeta_0 \approx \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2k_0}{\pi r \Lambda(k_0)}} \operatorname{sh}(k_0 h) |H(\theta)|$$

Мощность, затрачиваемая на генерацию волн, согласно выражению (1.12), равна

$$T = \frac{\rho \omega}{\pi} \int_0^{2\pi} |H(\theta)|^2 d\theta = \rho \omega \left[2 |B_0^{(0)}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |B_n^{(0)}|^2 \right]$$

Этот же результат получится и при использовании выражения (1.11).

В приближении мелкой воды следует внести изменения аналогично указанным в разд. 3 и в результате для каждой угловой гармоники необходимо решить систему четырех линейных уравнений.

5. Численные результаты. Для выполнения численных расчетов использованы следующие распределения давлений:

в плоском случае

$$P(x) = a \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (|x| < l), \quad \tilde{P}(\xi) = \frac{4a}{l\xi^2} \left[\frac{\sin(\xi l)}{\xi l} - \cos(\xi l) \right]$$

в пространственном случае

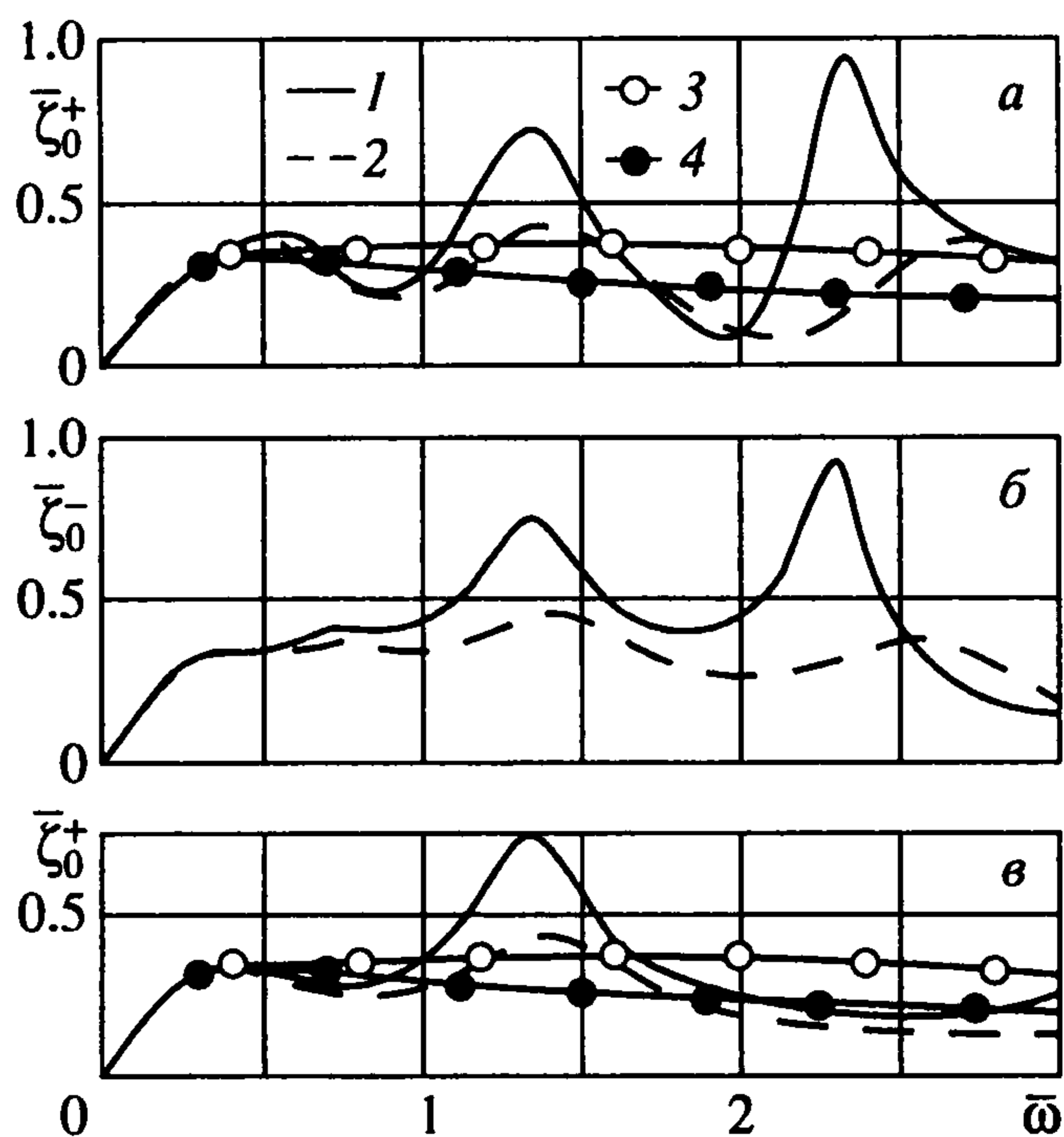
$$P(R) = a \left[1 - \left(\frac{R}{l} \right)^2 \right] \quad (R < l), \quad \tilde{P}(\xi) = 4\pi a \frac{J_2(\xi l)}{\xi^2}$$

где a – размерный множитель.

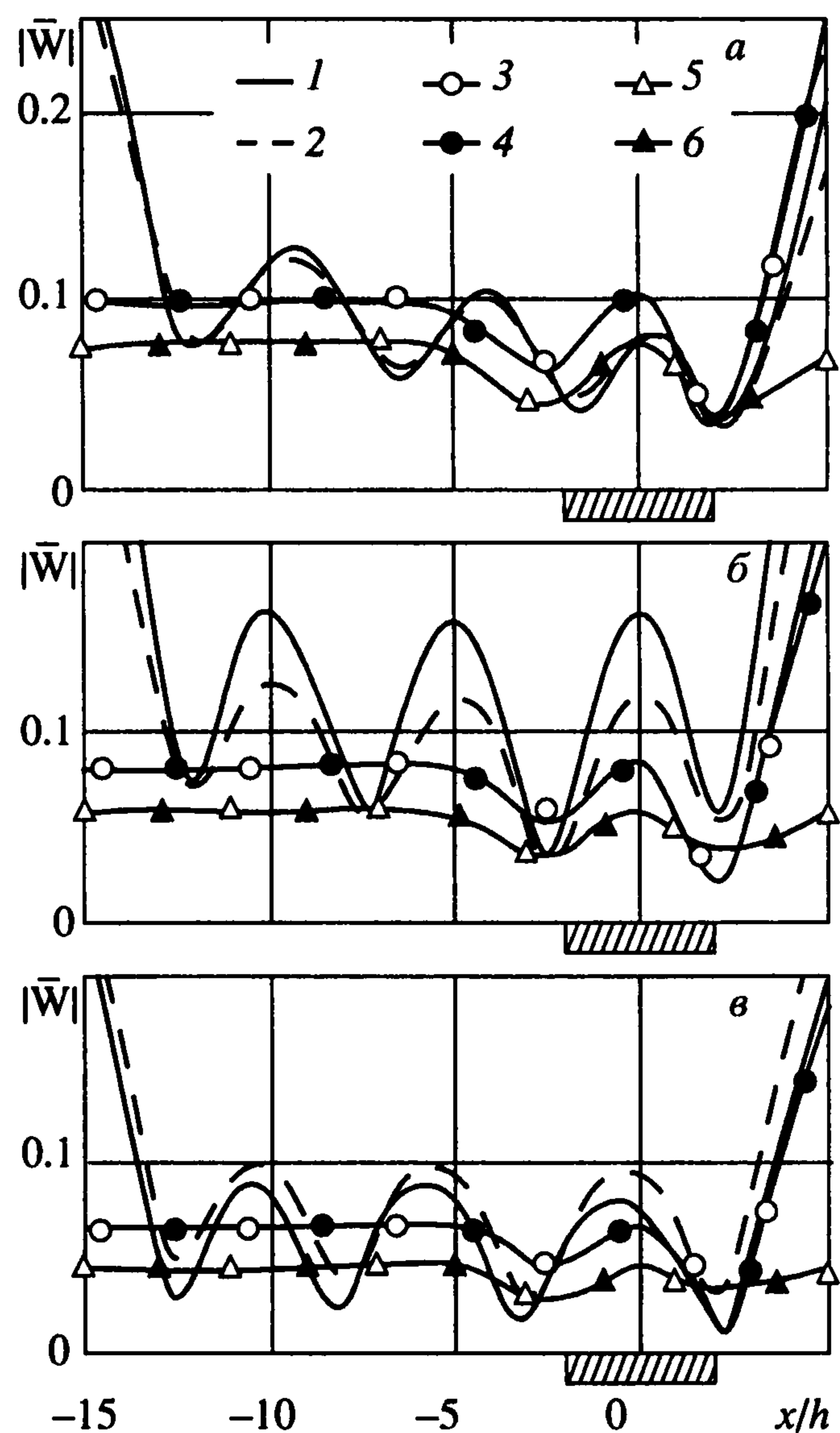
Значения исходных параметров приняты те же, что и ранее [4]:

$$D = 1.093 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2, h = 0.25 \text{ м}, \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_1 h_1 = 12.5 \text{ кг/м}^2, \nu = 0.3$$

Полуширина области давления во всех расчетах равна $l = 2h$. В решении для мелкой воды осадка пластины не учитывалась.



Фиг. 1

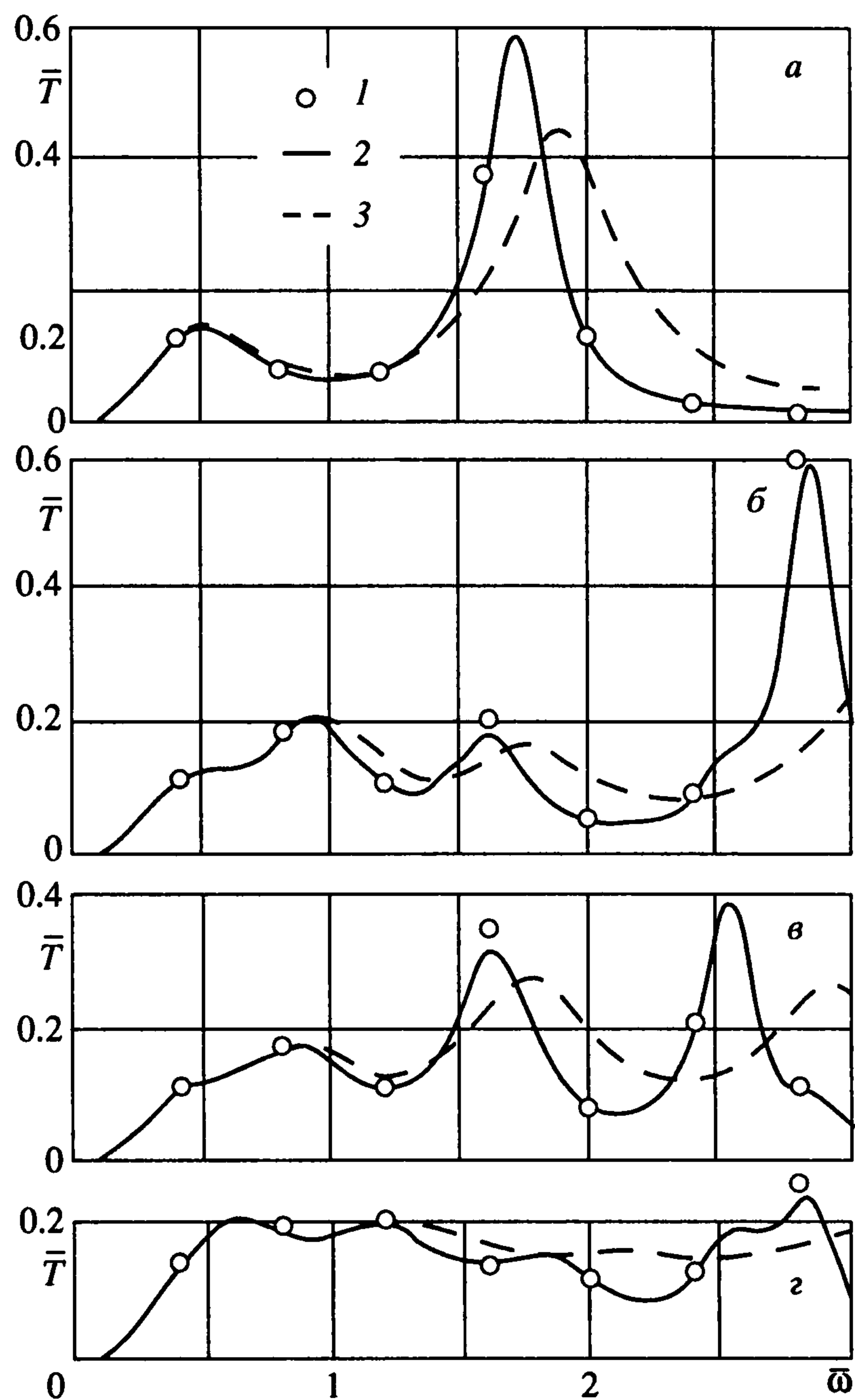


Фиг. 2

На фиг. 1 представлены зависимости амплитуд поверхностных волн в дальнем поле $\bar{\zeta}_0^\pm = \rho g \zeta_0^\pm / a$ от безразмерной частоты $\bar{\omega} = \omega \sqrt{h/g}$ для балочной пластины при $L_1 = 15h, L_2 = 5h$ (а, б) и $L_1 = L_2 = 10h$ (в). Кривыми 1, 2 показаны решения для конечной пластины, а кривыми 3, 4 на фиг. 1, а, в – для полубесконечной пластины. На фиг. 1, 2 нечетные номера кривых соответствуют решениям для жидкости конечной глубины при учете $M = 20$ краевых мод, четные – мелкой воде.

Видно, что в случае конечной пластины зависимость амплитуд поверхностных волн от частоты существенно немонотонна. Для полубесконечной пластины этого явления не наблюдается.

Амплитуды нормальных прогибов пластины $\bar{W} = \rho g W / a$ представлены на фиг. 2, а, б, в соответственно для трех значений безразмерной частоты $\bar{\omega} = 1, 1.3, 1.6$ в случае конечной пластины при $L_1 = 15h, L_2 = 5h$ (кривые 1, 2), полубесконечной пластины при $L_2 = 5h$ (кривые 3, 4) и безграничной пластины (кривые 5, 6). Заштрихованной полосой на фиг. 2, 4 показана область приложения давления. Видно, что максимальные прогибы возникают на краях конечной пластины и из трех представленных случаев наибольшие прогибы имеют место при $\bar{\omega} = 1.3$. Эта частота примерно соответствует локальному максимуму амплитуды вертикальных смещений в дальнем поле (фиг. 1, а, б). Действие периодической нагрузки приводит к значительно бóльшим прогибам пластины при ее ограниченных размерах по сравнению со случаем бесконечной пластины. В случае полубесконечной пластины параметры колебаний свободного края почти повторяют значения для конечной пластины, однако с удалением влево от области давления нормальные прогибы существенно уменьшаются.



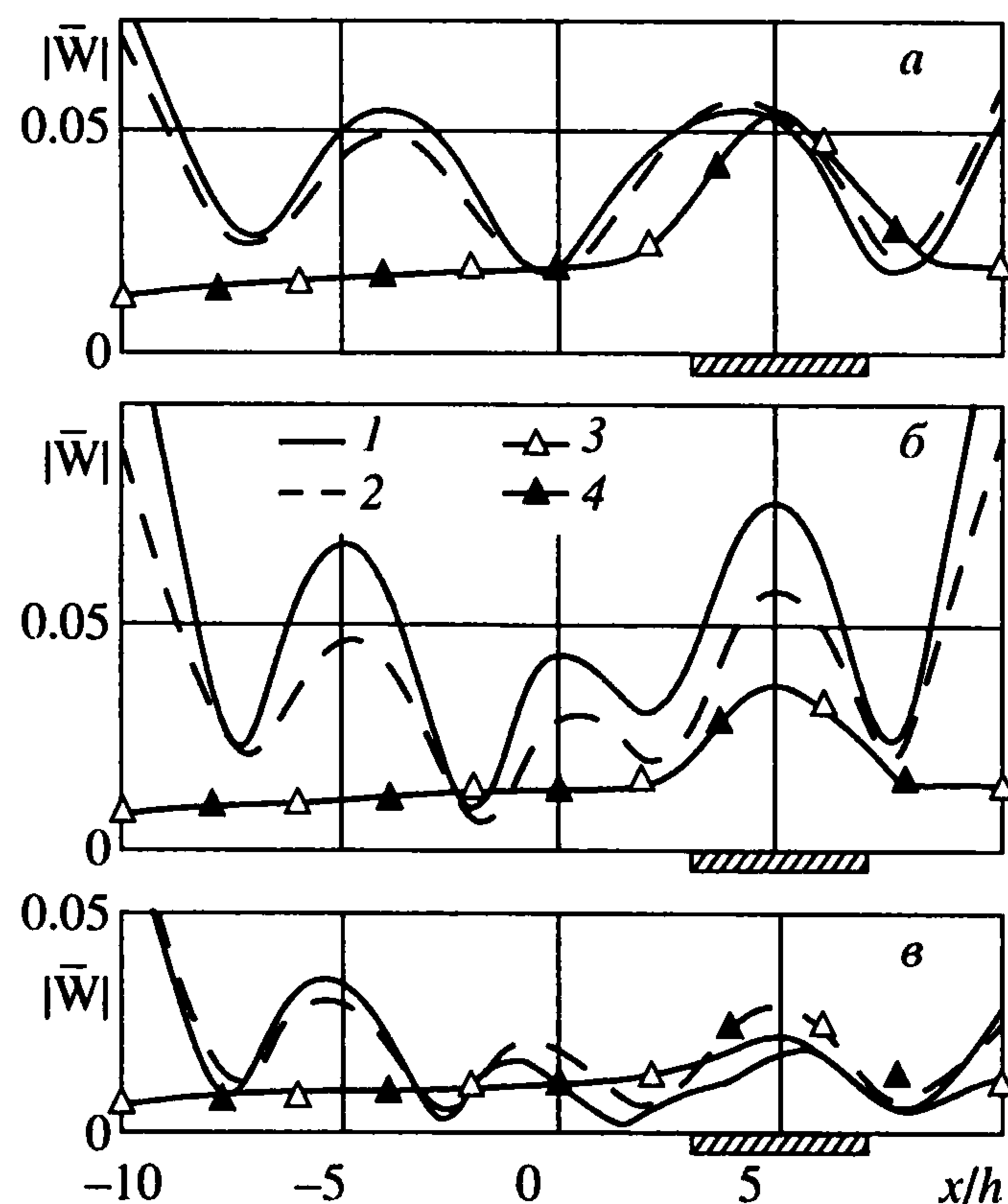
Фиг. 3

и становятся близкими к значениям в случае бесконечной пластины. Аналогичная ситуация имеет место в дифракционной задаче при исследовании рассеяния поверхностных волн на плавающей упругой полосе (см., например, [8]).

Интересно отметить, что решения для жидкости конечной глубины и мелкой воды различаются значительно слабее в поведении пластины, чем свободной поверхности. Это объясняется тем, что для гравитационных волн относительное расхождение волновых чисел этих двух решений достигает 10% уже при $\bar{\omega} = 0.8$, тогда как для изгибно-гравитационных волн при используемых параметрах такое же расхождение имеет место только при $\bar{\omega} \approx 3.8$.

На фиг. 3, а–г показана зависимость мощности $\bar{T} = \text{Tr} \sqrt{g/h^3} / a^2$ от частоты для круглой пластины при $r_0 = 10h$ соответственно для $L_1/h = 0, 3, 5, 7$. Кривыми 1, 2 представлен случай конечной глубины жидкости при $M = 10, 20$, а кривыми 3 – приближение мелкой воды. Во всех расчетах $N = 15$ при $L_1 \neq 0$. Дальнейшее увеличение N не меняет результат. Так же как и в плоской задаче (ср. с фиг. 1), на некоторых частотах происходит резкое усиление волновых движений. Изменение числа краевых мод сказывается лишь незначительно в зоне пиков мощности.

Известно [10], что для упругой круглой пластины, колеблющейся в пустоте, существует дискретный набор вещественных собственных частот для каждой угловой



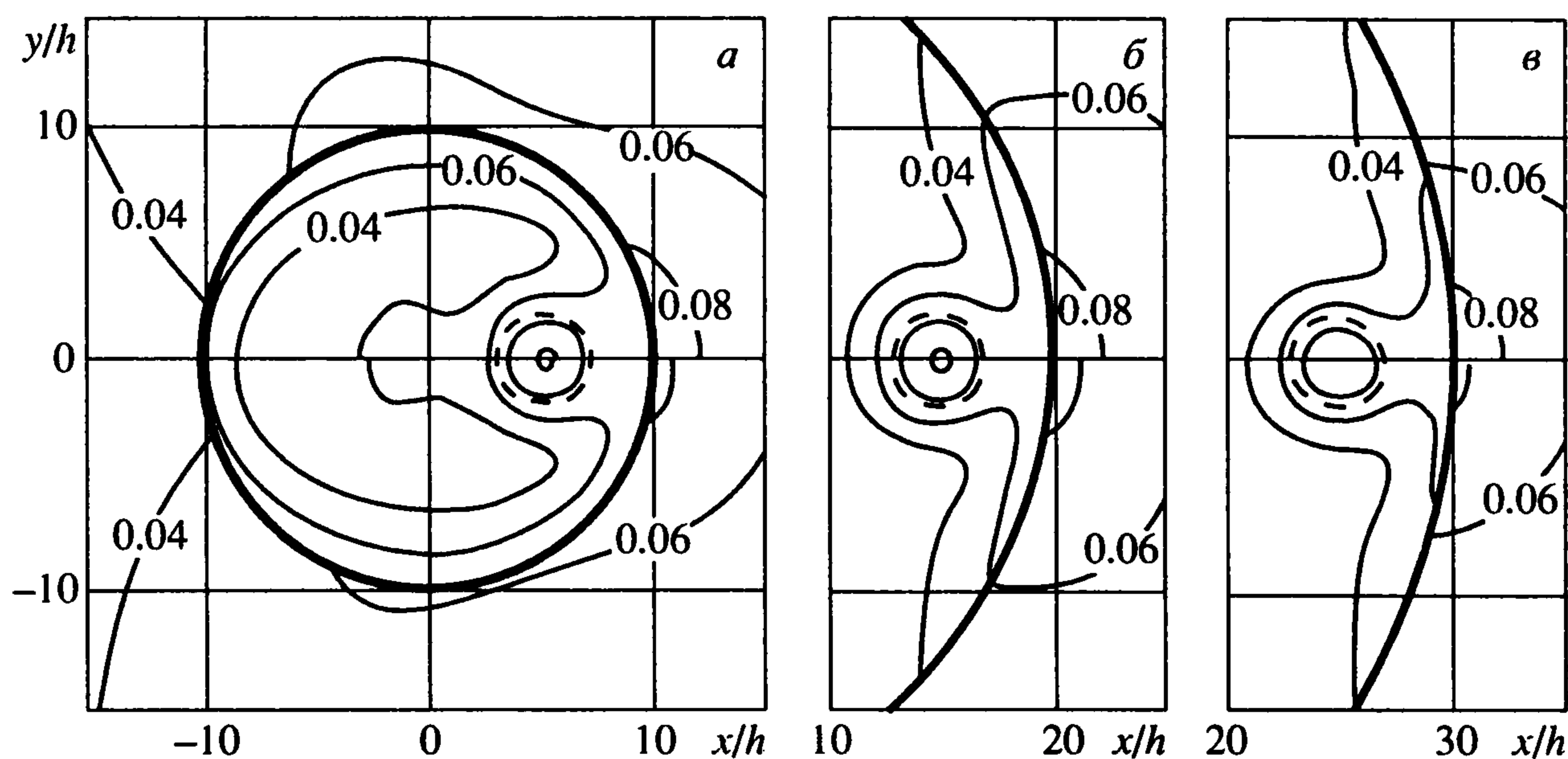
Фиг. 4

гармоники. Наименьшая собственная частота при $n = 0$ для пластины со свободными краями при выбранных параметрах соответствует $\bar{\omega} = 2.17$. Для упругой пластины, плавающей на поверхности весомой жидкости, могут существовать лишь комплексные собственные частоты с положительной мнимой частью вследствие рассеяния энергии поверхностными волнами. Локальные максимумы в зависимости мощности T от частоты могут быть ориентиром в поисках собственных значений с минимальной мнимой частью. Отметим, что с удалением пятна давления от центра пластины значения локальных максимумов мощности уменьшаются.

На фиг. 4, а, б, в представлены амплитуды нормальных прогибов круглой пластины на диаметральной линии $y = 0$ при $r_0 = 10h$, $L_1 = 5h$ соответственно для $\bar{\omega} = 1, 1.6, 2.2$. Кривыми 1, 2 показаны решения для круглой пластины, а кривыми 3, 4 – для безграничной пластины. Нечетные номера кривых соответствуют решениям для жидкости конечной глубины при учете $M = 20$ краевых мод, четные – мелкой воде, в обоих случаях $N = 15$. Аналогично плоскому случаю (ср. с фиг. 2) наибольшие прогибы пластины наблюдаются на ее краях. При частоте $\bar{\omega} = 1.6$, что примерно соответствует локальному максимуму мощности (см. фиг. 3, в), прогибы пластины больше, чем при других рассмотренных частотах.

На фиг. 5, а, б, в представлены изолинии амплитуд нормальных прогибов пластины $\bar{W}(r < r_0)$ и вертикальных смещений свободной поверхности $\bar{\zeta}(r > r_0)$ при $\bar{\omega} = 0.5$, $r_0 - L_1 = 5h$ для трех значений радиусов пластины $r_0/h = 10, 20, 30$ соответственно. Верхние половины каждого рисунка показывают решение для жидкости конечной глубины ($M = 10$), нижние – для мелкой воды, в обоих решениях $N = 20$. Изолинии выведены с шагом 0.02. Штриховая окружность соответствует области приложения давления. Граница пластины показана более жирной кривой. Поведение пластины практически одинаково для двух решений, а в поведении свободной поверхности наблюдаются небольшие расхождения.

При фиксированном расстоянии пятна давления от правого края пластины с увеличением ее радиуса решение рассматриваемой задачи стремится к решению задачи о воздействии давления на полубезграничную пластину вблизи ее прямой кромки.



Фиг. 5

6. Заключение. Представленные результаты показывают, что ограниченные размеры упругой пластины существенно влияют на характеристики ее колебаний под действием внешней периодической нагрузки. Качественное поведение прогибов пластины в плоском и пространственном случаях одинаково. Конечные размеры пластины в обоих случаях приводят к существенно большим ее колебаниям (особенно на краях) по сравнению с безграничной пластиной. В некоторых случаях амплитуды нормальных прогибов пластины на ее краях существенно превышают соответствующие значения во внутренней части, что говорит о возможной локализации колебаний пластины в окрестности краев. Для конечной пластины существуют резонансные частоты внешней нагрузки, при которых резко возрастают амплитуды как нормальных прогибов пластины, так и вертикальных смещений свободной поверхности жидкости. Это явление более выражено для жидкости конечной глубины, чем для мелкой воды.

Предложенный подход может быть распространен на исследование гидроупругого поведения пластин другой формы под действием периодических давлений. Колебания прямоугольной пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины, можно определить, используя полученные ранее результаты [7]. В приближении мелкой воды аналогично описанному ранее подходу [4] может быть рассмотрена пластина произвольной формы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта № 1 СО РАН и программы "Ведущие научные школы" Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-96162).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973. 247 с.
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D. et al. Moving Loads on Ice Plates. Dordrecht: Kluwer, 1996. 244 p.
4. Стурова И.В. Дифракция поверхностных волн на упругой плавающей на мелководье платформе // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 114–122.
5. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // Handbuch der Physik. B. Springer, 1960. Bd. 9. P. 446–778.

6. *Кочин Н.Е.* Теория волн, вынуждаемых колебаниями тела под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. С. 277–304.
7. *Kim J.W., Ertekin R.C.* An eigenfunction-expansion method for predicting hydroelastic behavior of a shallow-draft VLFS // Hydroelasticity in Marine Technology: Proc. 2nd Intern. Conf. Fukuoka: Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ., Japan, 1998. P. 47–59.
8. *Стурова И.В.* Косое набегание поверхностных волн на упругую полосу // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 4. С. 62–68.
9. *Букатов А.Е.* Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 1. С. 93–98.
10. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластин и оболочек. Справочник. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.

Новосибирск
e-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
30.1.2201