

УДК 551.446.81:534.1

© 2002 г. В.Г. Байдулов, Ю.В. Кистович, Ю.Д. Чашечкин

СВОЙСТВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО ТИПА В ТЕОРИИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Проанализированы общие свойства решений волнового типа в теории внутренних волн для течений в непрерывно стратифицированных средах. В дополнение к известным случаям эквивалентности условий сложения плоских нелинейных периодических волн и принципа суперпозиции линейных волн определены условия существования решений волнового типа для нестационарных и присоединенных волн в диссипирующих средах. Определены наборы отношений физических параметров, которые могут использоваться в качестве параметров разложения при построении приближенных (асимптотических) решений уравнений внутренних волн в диссипативных средах.

При построении аналитических решений задач движения стратифицированных сред широко используются упрощающие предположения – такие, как приближение Буссинеска, линеаризация самих уравнений [1, 2] и граничных условий [3]. Условия слабой стратификации и малой вязкости позволяют привести исходные уравнения к линейной сингулярно-возмущенной системе. В некоторых случаях удается строить решения даже нелинейных задач теории генерации волн с учетом их взаимодействия с пограничными течениями [4].

В приближении идеальной жидкости в безграничной среде решения в виде двумерных внутренних волн удовлетворяют как линейным, так и нелинейным уравнениям [5]. В переменных соленость – функция тока удается провести точное описание установившихся двумерных течений идеальной жидкости (в общей постановке для линейно стратифицированной и в приближении Буссинеска для экспоненциально стратифицированной среды) в канале конечной глубины [6]. Существование решений волнового типа существенно расширяет возможности анализа, облегчает сравнение с лабораторными опытами [7] и наблюдениями в океане и атмосфере [8, 9].

Практический интерес представляет определение условий существования точных решений для нелинейных диссипативных систем. В последнем случае внутренние волны сосуществуют с периодическими пограничными слоями на твердых поверхностях и внутренними пограничными течениями на разрывах частоты плавучести и ее производных¹. Цель данной работы – анализ условий существования решений волнового типа, которые переводят исходные нелинейные уравнения движения непрерывно стратифицированных жидкостей в линейные.

1. Уравнения движения. Система уравнений движения однокомпонентной несжимаемой устойчиво стратифицированной жидкости с плотностью $\rho(z)$ в поле силы тяжести с ускорением свободного падения $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ в приближении Буссинеска [10] имеет вид

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{u} + gS, \quad S_t + (\mathbf{u}\nabla)S = \kappa_S\Delta S + w/\Lambda, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ – скорость, P – динамическая компонента давления, $\Lambda = |\partial \ln \rho / \partial z|^{-1}$ – масштаб стратификации, t – время, ν – кинематическая вязкость и κ_S – коэффициент диффузии соли. Обычно полная соленость S^* включает не завися-

¹ Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Внутренние волны, вязкие пограничные слои и внутренние пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости: Препринт № 674. М.: Ин-т проблем механики РАН, 2001. 155 с.

щую от времени стратифицирующую составляющую и динамическую компоненту, в декартовой системе координат $\{x, y, z\}$ ось z направлена вертикально вверх.

Слабо стратифицированная по вертикали жидкость характеризуется уравнением состояния вида $\rho = \rho_0(1 - z/\Lambda + S(\mathbf{r}, t))$, где S – динамическая составляющая солёности, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор. Начальные и граничные условия системы (1.1) включают условие затухания возмущений на бесконечности, а также условия прилипания для скорости и непротекания для вещества на ограничивающих поверхностях.

2. Плоские волны. В двумерном случае с использованием функции тока ψ система (1.1) приводится к системе двух уравнений

$$\begin{aligned}\Delta\psi_t + \psi_y\Delta\psi_x - \psi_x\Delta\psi_y &= \nu\Delta^2\psi + gS_x \\ S_t + \psi_yS_x - \psi_xS_y &= \kappa_S\Delta S - \psi_x/\Lambda\end{aligned}\quad (2.1)$$

В соответствии с постановкой задачи решение системы (2.1) ищется в виде суммы инвариантных решений волнового типа

$$\psi = \sum \psi_i(\vartheta_i); \quad S = \sum S_i(\vartheta_i) \quad (2.2)$$

где $\vartheta_i = a_ix + b_iy - \omega_it$ – эйконал, компоненты волнового вектора $\{a_i, b_i\}$ и частоты гармоник ω_i предполагаются постоянными, здесь и далее суммирование по i и/или j ведется от 1 до N .

Подставляя выражение (2.2) в систему (2.1), получаем

$$\begin{aligned}-\sum \omega_i c_i^2 \psi_i''' + \sum \sigma_{ij} c_j^2 \psi_i' \psi_j'' &= g \sum a_i S_i' \\ -\sum \omega_i S_i' + \sum \sigma_{ij} \psi_i' S_j' &= -\gamma \sum a_i \psi_i'; \quad c_i^2 = a_i^2 + b_i^2\end{aligned}\quad (2.3)$$

где $\sigma_{ij} = b_i a_j - a_i b_j$ – компоненты антисимметричного тензора второго ранга ($\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$, $\sigma_{ii} = 0$), штрихи означают производную по соответствующей переменной с индексом i или j , обозначающим порядковый номер функции и независимой переменной. Учет этих свойств тензора $\|\sigma_{ij}\|$ позволяет переписать систему (2.3) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}-\sum \omega_i c_i^2 \psi_i''' + \sum_{i>j} \sigma_{ij} (c_j^2 \psi_i' \psi_j'' - c_i^2 \psi_j' \psi_i'') &= g \sum a_i S_i' \\ -\sum \omega_i S_i' + \sum_{i>j} \sigma_{ij} (\psi_i' S_j' - \psi_j' S_i') &= -\gamma \sum a_i \psi_i'\end{aligned}\quad (2.4)$$

Поскольку в (2.4) входят только производные искомых функций, свойства линейной и нелинейной частей решения могут быть проанализированы независимо. Разделение частей решения проводится с помощью подстановки

$$\psi_i = \psi_i^0 \vartheta_i + \psi_i^*, \quad S_i = S_i^0 \vartheta_i + S_i^* \quad (2.5)$$

(в дальнейших формулах звездочка опускается). При выполнении соотношений

$$c_j^2 \psi_i' \psi_j'' = c_i^2 \psi_j' \psi_i'', \quad \psi_i' S_j' = \psi_j' S_i' \quad (2.6)$$

нелинейные компоненты системы (2.4) тождественно обращаются в нуль. Условие разделения переменных переводит уравнения (2.6) в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$c_i^2 \psi_i''' = \lambda \psi_i', \quad S_i' = \mu \psi_i' \quad (2.7)$$

частные решения которой имеют вид

$$\psi_i = S_i / \mu = \psi_i^1 \exp(\vartheta_i \sqrt{\lambda} / c_i) + \psi_i^2 \exp(-\vartheta_i \sqrt{\lambda} / c_i) \quad (2.8)$$

причем

$$\lambda(a_i x + b_i y) / c_i = \lambda(x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i)$$

Таким образом, сумма квадратов компонент волнового вектора c_i^2 оказывается инвариантом пучка волн (2.8)

$$a_i^2 + b_i^2 = \lambda = k_0^2 \quad (2.9)$$

Прямая подстановка выражений (2.8) в исходную систему уравнений (2.1) показывает, что нелинейные члены последней тождественно обращаются в нуль.

Из общих свойств волновых движений следует, что кроме условия (2.9) между компонентами волнового вектора и частотами составляющих пучка волн существует дополнительная связь, налагаемая дисперсионным соотношением [1], конкретный вид которого зависит от распределения плотности, скорости течения и диссипативных свойств жидкости $\omega = \omega(k, U, \nu, \kappa_s)$. Для периодических волн в покоящейся линейно стратифицированной среде $\omega = \omega(k, \nu, \kappa_s)^2$, для присоединенных волн в идеальной жидкости $\omega = \omega_0 = k U$ [1], где $U = \text{const}$ – скорость движения источника (потока жидкости на бесконечности).

Ниже в качестве примера рассмотрены двумерные решения волнового типа линеаризованных уравнений вязкой стратифицированной жидкости, для которых справедливо дисперсионное соотношение [3]

$$\omega^2(a^2 + b^2) - N^2 a^2 + i\nu\omega(a^2 + b^2)^2 = 0 \quad (2.10)$$

Условие (2.9), обеспечивающее обращение нелинейных членов в нуль, совместно с соотношением (2.10) образуют систему из двух алгебраических уравнений относительно трех переменных. С помощью данной недоопределенной системы две любые неизвестные выражаются через третью с параметром k_0 ($b = b(a, k_0)$, $\omega = \omega(a, k_0)$). Полученные при этом соотношения, как будет показано ниже, эквивалентны условиям суперпозиции присоединенных волн произвольной амплитуды (в том числе неинфинитезимальной), которые создаются несколькими независимыми источниками, движущимися с одинаковой по модулю скоростью вне пустой полосы (A, B) (фигура).

Если выражение для функции тока в пространстве, свободном от источников волн, записать в виде разложения в интеграл Фурье

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(a) \exp[iax + ib(a)z - i\omega(a)t] da \quad (2.11)$$

то для решений системы уравнений (2.9), (2.10) справедливы соотношения

$$b(a) = \pm \sqrt{k_0^2 - a^2}, \quad \omega(a) = -ivk_0^2/2 \pm \sqrt{N^2 a^2 / k_0^2 + v^2 k_0^4 / 4} \quad (2.12)$$

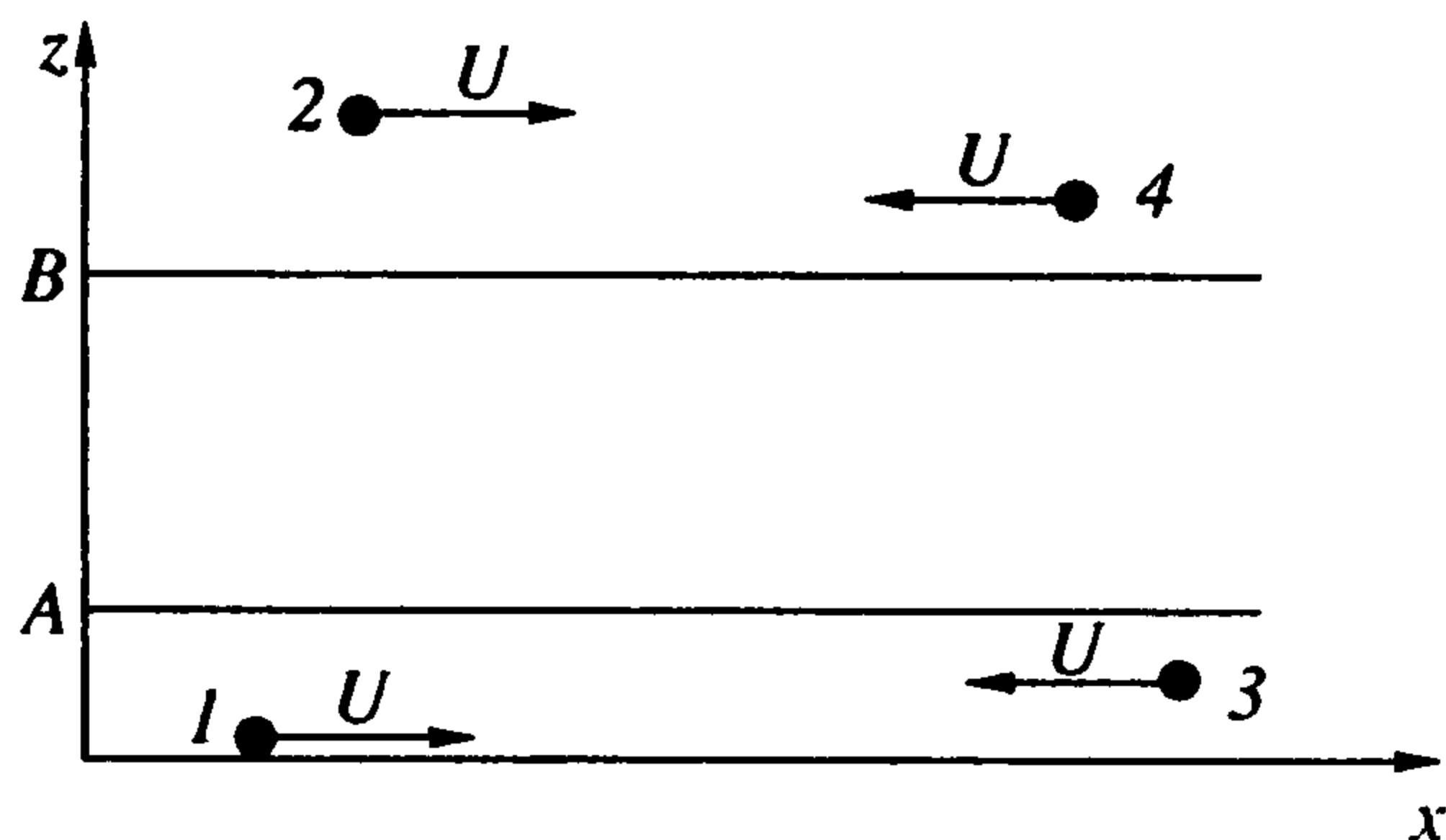
В вязкой жидкости такие решения описывают затухающие во времени нестационарные движения. В идеальной жидкости $\nu = 0$, и общее выражение (2.11) для функции тока при учете соотношений (2.12) преобразуется к виду

$$\Psi = I_r^+ + I_r^- + I_l^+ + I_l^- \quad (2.13)$$

$$I_q^\pm = \int_{-\infty}^{+\infty} A_q^\pm(a) \exp\left[iaX_q \mp \sqrt{k_0^2 - a^2} z\right] da, \quad q = r, l;$$

$$X_r = x - Ut, \quad X_l = x + Ut, \quad k_0 = \frac{N}{U}$$

где один или несколько коэффициентов A^+ , A^- могут независимо обращаться в нуль.



² См. сноску на стр. 69.

Первый (третий) интеграл в (2.13) описывает поле источника, движущегося вправо (влево) и расположенного ниже полосы ($z < A$), второй (четвертый) – движущегося вправо (влево) и расположенного выше полосы ($z > b$). Таким образом, даже в нелинейной постановке поля нескольких (в данном случае четырех, в общем случае любого числа) источников волн в идеальной жидкости не взаимодействуют между собой и удовлетворяют принципу суперпозиции, установленному для инфинитезимальных волн.

Методами теории возмущений такой подход может быть распространен и на случай слабовязкой жидкости, когда в качестве малого параметра задачи выбирается кинематическая вязкость. В общем случае такой подход позволяет в качестве малого параметра использовать и другие характеристики задачи, включая амплитуды (крутизны) волн, и, как следует из соотношения (2.9), степень расхождения квадратов волновых векторов в пакете (т.е. отклонений сумм квадратов волновых чисел в пакете от k_0^2), а также их комбинации.

Выражения (2.8), (2.9) задают форму дисперсионного соотношения при расчете картины установления и распространения волн с учетом начала движения источника в диссипативных средах. Были приведены [11] примеры расчетов установления инфинитезимальных внутренних волн для различных законов движения сингулярных источников.

3. Волны в движущейся среде. Общим решениям (2.7), содержащим линейные функции эйконала с произвольными коэффициентами $\psi_i = \psi_i^0 \vartheta_i$, $S_i = S_i^0 \vartheta_i$, соответствуют задачи с конечным значением скорости жидкости в невозмущенной волнами среде, включающие теорию присоединенных (подветренных) внутренних волн в канале конечной глубины. Подстановка решений (2.7) переводит систему (2.4) в переопределенную систему алгебраических уравнений, причем частным решениям (2.8) соответствуют уравнения

$$\lambda \sum \sigma_{ij} \psi_i^0 \psi_j' = \sum (\lambda \omega_i + \mu g a_i) \psi_i', \quad \sum \sigma_{ij} (\mu \psi_i^0 - S_i^0) \psi_j' = \sum (\mu \omega_i - \gamma a_i) \psi_i' \quad (3.1)$$

а линейной части решения (2.7) – уравнения

$$\sum a_i S_i^0 = 0, \quad \sum \sigma_{ij} \psi_i^0 S_j^0 = \sum (\omega_i S_i^0 - \gamma a_i \psi_i^0). \quad (3.2)$$

Для дальнейшего анализа соотношения (3.1), (3.2) удобно переписать в векторно-матричных обозначениях

$$-\lambda A \psi^0 \psi = (\lambda \omega + \mu g a) \psi, \quad -A(\mu \psi^0 - S^0) \psi = (\mu \omega - \gamma a) \psi \quad (3.3)$$

$$a S = 0, \quad (A S^0) \psi^0 = -(A \psi^0) S^0 = \omega S^0 - \gamma a \psi^0 \quad (3.4)$$

Здесь A – антисимметричная матрица размера $N \times N$ тензора $\|\sigma_{ij}\|$.

Вычитая из первого уравнения (3.3), умноженного на μ , второе, умноженное на λ , и собирая члены при одинаковых компонентах вектора ψ , получаем переопределенную систему относительно коэффициентов S^0 и ψ^0

$$-\lambda A \psi^0 = \lambda \omega + \mu g a, \quad -A S^0 = (\lambda \gamma + \mu^2 g) a, \quad a S^0 = 0 \quad (3.5)$$

$$(A S^0) \psi^0 = -(A \psi^0) S^0 = \omega S^0 - \gamma a \omega^0$$

Из сравнения первого и третьего уравнений (3.5) при учете последнего уравнения системы заключаем, что

$$a \psi^0 = 0 \quad \text{и} \quad S^0 = \beta \psi^0 \quad (3.6)$$

т.е. векторы S^0 и ψ^0 коллинеарны. Из второго уравнения (3.5) следует, что коллинеарны и векторы ω и ψ^0 .

Используя полученные соотношения и учитывая первые два уравнения (3.5), найдем связь между частотами ω и компонентами волновых векторов – аналог дисперсионного соотношения, соответствующего системе (2.4),

$$-\lambda\beta A\psi^0 = \lambda\beta\omega + \mu\beta ga = (\lambda\gamma + \mu^2 g)a \Rightarrow \beta\lambda\omega = [\lambda\gamma + \mu(\mu - \beta)g]a. \quad (3.7)$$

Оставшиеся два уравнения ($-\lambda\beta A\psi^0 = (\lambda\gamma + \mu^2 g)a$ и четвертое уравнение (3.5)) образуют переопределенную систему из $N + 1$ линейного алгебраического уравнения для N переменных $\{S_i^0\}$. Для ее решения вводится дополнительная фиктивная переменная $S_{N+1}^0 = \gamma + \mu^2 / g$, после чего для нового набора переменных получается однородная система $N + 1$ линейных алгебраических уравнений. Нетривиальные решения такой системы существуют, если определитель матрицы A_{N+1} равен нулю.

Учитывая, что определители антисимметричных матриц равны нулю при нечетном числе строк и отличны от нуля в противоположном случае, так как $\det A = \det A^T = (-1)^n \det A$, получаем, что при нечетном числе волн ($N = 2n-1$) в решении (2.5) отсутствует линейная часть, моделирующая среднее течение в среде. При четном числе волн N линейная часть решения (2.5) определяется однозначно. Построенное решение описывает волновые пакеты с круговой поляризацией, для которых все составляющие имеют одинаковые суммы квадратов волновых чисел.

4. Коллинеарные волны. Вырожденному случаю $\sigma_{ij} = 0$, также обращающему в нуль нелинейные члены, соответствует волновой пакет, содержащий только волны с параллельными волновыми векторами (но, вообще говоря, с разными частотами). Общее выражение, описывающее волны такого типа, имеет вид

$$f = f(kR, t) = \int \bar{f}(k, \omega) \exp[i(kR - \omega t)] dk d\omega \quad (4.1)$$

$$R = \cos \alpha_x x + \cos \alpha_y y + \cos \alpha_z z$$

где k – модуль волнового числа, $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ – направляющие косинусы заданного направления. Примером таких волн является каждый из пучков "андреевского креста" периодических внутренних волн, возбуждаемых в непрерывно стратифицированной жидкости компактным линейным источником [3].

5. Трехмерные волны. В трехмерных задачах, когда движение несжимаемой жидкости характеризуется векторным потенциалом $\mathbf{A} = \{q_1, q_2, q_3\}$ ($\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{A}$), нелинейные члены в уравнениях переноса импульса и вещества системы (1.1) выражаются через $\mathbf{A}$ по правилам векторного анализа.

Действуя по приведенной выше схеме, волновые решения ищем в виде

$$\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{A}_i(z_i), \quad S = \sum_i S_i(z_i); \quad z_i = \mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega_i t, \quad \mathbf{A}_i = \{q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}\} \quad (5.1)$$

Для нелинейных членов получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \nabla) S &= \text{rot } \mathbf{A} \cdot \nabla S = \sum S'_i M_{ij}, \quad (\text{rot } \mathbf{A}, \nabla) \Delta \mathbf{A} = \sum k_i^2 \mathbf{A}'''_i M_{ij} \\ (\text{grad div } \mathbf{A}, \nabla) \text{rot } \mathbf{A} - (\Delta \mathbf{A}, \nabla) \text{rot } \mathbf{A} &= \sum (C_{ij} D_{jj} - k_j^2 D_{ij})(\mathbf{k}_i \times \mathbf{A}''_i) \\ (\text{rot } \mathbf{A}, \nabla) \text{grad div } \mathbf{A} &= \sum M_{ij} D_{ij} \mathbf{k}_i \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $C_{ij} = (\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j)$, $D_{ij} = (\mathbf{k}_i, \mathbf{A}''_j)$, $M_{ij} = \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j, \mathbf{A}'_j \rangle$, угловыми скобками обозначено смешанное произведение трех векторов.

Анализ выражений (5.2) показывает, что нелинейные члены уравнений движения тождественно обращаются в нуль в двух случаях: когда волновые векторы каждой составляющей волны из пакета параллельны либо перпендикулярны векторному потенциалу. Первый случай соответствует условию $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ и описывает покоящуюся

жидкость. Второй случай распадается на два: с коллинеарными по пакету волновыми векторами ($\mathbf{k}_i \parallel \mathbf{k}_j$), когда решение описывается функциями вида (4.1), и с коллинеарными компонентами векторного потенциала ($\mathbf{A}_i \parallel \mathbf{A}_j$), когда задача фактически становится двумерной и решения имеют вид (2.8).

6. Заключение. Проведенный анализ показывает, что ранее отмеченная линейаризация уравнений движения для плоских внутренних волн в толще непрерывно стратифицированной жидкости [5] является частным случаем более общего положения, включающего возможность сложения не только периодических, но и присоединенных (стационарных и нестационарных) двумерных волн конечной амплитуды, создаваемых несколькими независимыми источниками.

В трехмерном случае принцип суперпозиции остается справедливым только для волн с параллельными волновыми векторами, что выполняется для каждого из четырех пучков волн, создаваемых вертикально колеблющимся по произвольному закону источником.

Предлагаемый метод не только позволяет найти условия выполнения принципа суперпозиции для внутренних волн произвольной амплитуды в идеальной жидкости, но и может служить основой для построения асимптотических решений, описывающих волны конечной амплитуды в вязкой жидкости с диффузией. При этом набор параметров разложения дополняется новыми малыми параметрами, связанными со степенью расхождения волновых векторов в пучке, позволяющими проводить расчеты волн произвольной амплитуды. Конкретный вид параметра разложения в последнем случае определяется геометрией задачи и диссипативными свойствами среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция" (2.1-304) и Российского фонда фундаментальных исследований (99-05-64980, 99-01-00435).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1978. = *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М., Мир, 1981. 598 с.
2. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Генерация, распространение и нелинейное взаимодействие внутренних волн // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. 1990. Т. 24. С. 77–144.
3. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Точное решение одной линейаризованной задачи излучения монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 611–619.
4. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Нелинейная генерация периодических внутренних волн пограничным течением на вращающемся осесимметричном теле // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 5. С. 636–639.
5. *Мирополюский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане: Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
6. *Long R.R.* Some aspects of the flow of stratified fluids. 1: Theoretical investigation // Tellus. 1953. V. 5. № 1. P. 42–58.
7. *Boyer D.L., Davies P.A., Fernando H.J.S. et al.* Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder // Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1989. V. 328. № 1601. P. 501–528.
8. *Miles J.W.* Waves and wave drag in stratified flows // Applied Mechanics. Proc. 12th Intern. Congr. of Appl. Mech. Stanford Univ. 1968. Berlin etc.: Springer, 1969. P. 50–76.
9. *Кожевников В.Н.* Возмущения атмосферы при обтекании гор. М.: Науч. мир, 1999. С. 159.
10. *Turner J.S.* Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1973. = *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. С. 431.
11. *Чашечкин Ю.Д., Макаров С.А.* Нестационарные внутренние волны // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 5. С. 1246–1250.

Москва
e-mail: bayd@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
28.V.2001