

УДК 532.5:534.1

© 2002 г. А.М. Тер-Крикоров

ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ИСТОЧНИКА В ТРЕХСЛОЙНОЙ АТМОСФЕРЕ

В линейной постановке исследуется задача о внутренних волнах, возбуждаемых точечным источником в трехслойной, первоначально невозмущенной атмосфере. Предполагается, что на границах слоев вертикальные смещения и скорости частиц меняются непрерывно, частота Брента–Вяйсяля постоянна в каждом слое, но терпит разрывы на границах слоев. Найденное при помощи интегральных преобразований решение выражается через двойные интегралы от многозначных аналитических функций. Интегральное представление для возмущений в среднем слое не позволяет непосредственно применить асимптотические методы для получения приближенного описания поведения решения на больших временах. Оно преобразуется в конечные суммы однократных интегралов, представляющих в некотором смысле различные моды возникающих колебаний. Методом стационарной фазы исследованы моды, дающие наибольший вклад в возмущение. Найденны особые поверхности, в окрестности которых амплитуды колебаний слабо затухают с течением времени.

Ранее [1] была изучена задача о возмущениях от источника в двухслойной атмосфере. Изучение случая трехслойной атмосферы представляет интерес, поскольку средний слой играет роль волновода.

1. Постановка задачи и интегральное представление решения. Рассматривается идеальная атмосфера, заполняющая трехмерное пространство и разделяющаяся на три слоя с постоянными, но различными частотами Брента–Вяйсяля (БВ). Соответственно N_1, N_2, N_3 – частоты БВ в нижнем, среднем и верхнем слоях. В качестве единицы длины выбирается ширина среднего слоя, в качестве единицы времени $1/N_2$. Предполагается, что $N_1/N_2 = a < 1$, $N_3/N_2 = a' < 1$. Начало декартовой системы координат, хуз выбирается на нижней границе среднего слоя, ось z направлена противоположно силе тяжести. Источник расположен в нижнем слое, в точке $(0, 0, -c)$. Мощность источника $Q(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $Q(0) = Q'(0) = 0$. Вертикальное отклонение W жидких частиц от положения равновесия выражается через производную $\partial w / \partial z$, где функция $w(x, y, z, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta w) + \Delta_2 w &= 0, \quad 0 < z < 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta w) + a^2 \Delta_2 w &= \frac{Q'(t)}{4\pi} \delta(x) \delta(y) \delta(z + c), \quad -\infty < z < 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta w) + a'^2 \Delta_2 w &= 0, \quad 1 < z < +\infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функция w и ее частные производные первого порядка ограничены и меняются непрерывно при переходе через границы слоев, начальные условия нулевые.

Применяя преобразование Лапласа по переменной t с нулевыми начальными условиями и преобразование Ганкеля по r , ищем решение задачи (1.1) в виде

$$w = \frac{1}{16\pi^3 i} \int_0^{+\infty} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \varphi(u, p, z) J_0(ru) LQ(p) e^{pt} du \frac{dp}{p} \quad (1.2)$$

где LQ – преобразование Лапласа функции Q .

Для определения функции φ получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \omega^2 \varphi &= 0, \quad 0 < z < 1, \quad \omega = \frac{u}{p} \sqrt{1 + p^2} \\ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \beta^2 \varphi &= 0, \quad 1 < z < +\infty, \quad \beta = \frac{u}{p} \sqrt{a'^2 + p^2} \\ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \gamma^2 \varphi &= u \delta(z + c), \quad z < 0, \quad \gamma = \frac{u}{p} \sqrt{a^2 + p^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Любое ограниченное при $z > 1$ решение второго из уравнений (1.3) удовлетворяет условию $\varphi'(z) - \beta \varphi(z) = 0$. Любое ограниченное при $z < 0$ решение третьего уравнения (1.3) имеет вид $\varphi = -(u/2\gamma)e^{-\gamma|z+c|} + Ce^{\gamma z}$ и при $z > -c$ удовлетворяет условию $\varphi'(z) - \gamma \varphi = ue^{-\gamma(z+c)}$.

Так как функция $\varphi'(z)$ непрерывна в точках $z = 0$ и $z = 1$, то для определения функции $\varphi(z)$ на отрезке $[0, 1]$ нужно решить граничную задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} - \omega^2 \varphi(z) &= 0 \\ \frac{d\varphi(0)}{dz} - \gamma \varphi(0) &= ue^{-\gamma c}, \quad \frac{d\varphi(1)}{dz} + \beta \varphi(1) = 0 \end{aligned}$$

Решение этой граничной задачи имеет вид

$$\varphi(u, p, z) = -ue^{-\gamma c} \frac{(\omega + \beta)e^{\omega(1-z)} + (\omega - \beta)e^{-\omega(1-z)}}{(\omega + \beta)(\omega + \gamma)e^{\omega} - (\omega - \beta)(\omega - \gamma)e^{-\omega}}$$

Решение задачи (1.1) получается подстановкой функции $\varphi(u, p, z)$ в формулу (1.2).

В дальнейшем исследуется случай, когда $a' = a$ и, следовательно, $\beta = \gamma$,

$$\varphi(u, p, z) = -ue^{-\beta c} \frac{(\omega + \beta)e^{\omega(1-z)} + (\omega - \beta)e^{-\omega(1-z)}}{(\omega + \beta)^2 e^{\omega} - (\omega - \beta)^2 e^{-\omega}} \quad (1.4)$$

2. Преобразование формулы, дающей решение. Так как функция $\varphi(u, p, z)$, определяемая равенством (1.4), не меняет своего вида от замены ω на $-\omega$, то точки $p = \pm i$ не являются точками ветвления этой функции. У функции $\varphi(u, p, z)$ две точки ветвления $p = \pm ai$. Соединим эти точки разрезом по мнимой оси. Покажем, что полюсы подынтегральной функции лежат на отрезках $\pm[ai, i]$. Эти полюсы должны быть нулями уравнения $e^{2\omega} = (\omega - \beta)^2 / (\omega + \beta)^2$. Если p – нуль этого уравнения, то, как следует из формул (1.3), числа $-p$ и $\bar{p}$ также нули этого уравнения. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда точка p лежит в первом квадранте. В этом случае $0 < \arg \sqrt{1 + p^2} < \arg p < \pi/2$ и, следовательно, точка ω лежит в четвертом квадранте. Аналогично точка β лежит в четвертом квадранте. Но тогда $|\omega - \beta| / |\omega + \beta| < 1$, $|e^{\omega}| > 1$ и равенство $|e^{\omega}| = |\omega - \beta| / |\omega + \beta|$ не может быть выполнено. Итак, полюсы

подынтегральной функции могут лежать только на мнимой оси. Причем они расположены симметрично, относительно начала координат. Эти полюсы являются нулями уравнений

$$\operatorname{cth} \omega = -\omega / \beta, \quad \operatorname{th} \omega = -\omega / \beta \quad (2.1)$$

При $p = iq$, $q > 1$ числа ω и β положительны и уравнения (2.1) имеют только нулевое решение. Из формул (1.3), (1.4) видно, что нуль не является полюсом подынтегральной функции. Если $-a < q < a$, то ω и β – чисто мнимые и уравнения (2.1) не имеют решений. Если же $a < q < 1$, то ω будет мнимым числом, а β – вещественным и уравнения (2.1) имеют решения.

Применяя теорему Коши, преобразуем формулу (1.2) к виду

$$w = w_1 + w_2 + w_3 \quad (2.2)$$

$$w_k = \frac{1}{16\pi^3 i} \int_0^{+\infty} \int_{C_k} J_0(ru) LQ(p) e^{p'z} \varphi(u, p, z) \frac{dp}{p} du$$

где контур C_1 является сдвоенным отрезком $[-ai, ai]$, окружность C_2 содержит внутри все нули уравнений (2.1), лежащие на отрезке $[ai, i]$, окружность C_3 симметрична C_2 относительно действительной оси и содержит нули уравнений (2.1), лежащие на отрезке $[-i, -ai]$. На симметричных относительно действительной оси точках окружностей число p принимает комплексно-сопряженные значения. Из формул (1.3) и (1.4) следует, что $\varphi(u, \bar{p}, z) = \overline{\varphi(u, p, z)}$. Замечая, что при движении точки p по окружности C_2 в положительном направлении сопряженная точка $\bar{p}$ движется по окружности C_3 в отрицательном направлении, получаем из формулы (2.2)

$$w_2 + w_3 = \frac{1}{8\pi^3} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \int_{C_2} J_0(ru) LQ(p) e^{p'z} \varphi(u, p, z) \frac{dp}{p} du \quad (2.3)$$

Вводя новые переменные

$$p = iq, \quad x = \frac{u}{q} \sqrt{1 - q^2}, \quad b^2 = 1 - a^2, \quad u = \frac{av}{b} \quad (2.4)$$

представим выражение (2.3) в виде

$$w_2 + w_3 = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\Phi_1(r, x, v) \Phi_2(1 - z, x, v) dx dv}{\Psi_1(x, v) \Psi_2(x, v)} \quad (2.5)$$

$$\Phi_1(r, x, v) = J_0\left(\frac{rav}{b}\right) LQ\left(\frac{ia v}{E(x, v)}\right) \exp\left(\frac{itav}{E(x, v)}\right)$$

$$\Phi_2(z, x, v) = \frac{ia^2 vx}{8\pi^2} e^{-ac\sqrt{v^2 - x^2}} \frac{x \cos xz + a\sqrt{v^2 - x^2} \sin xz}{E^2(x, v)}$$

$$\Psi_1(x, v) = x \cos \frac{x}{2} + a\sqrt{v^2 - x^2} \sin \frac{x}{2}$$

$$\Psi_2(x, v) = x \sin \frac{x}{2} - a\sqrt{v^2 - x^2} \cos \frac{x}{2}, \quad E(x, v) = \sqrt{(av)^2 + (bx)^2}$$

Графики функций $-atg(x/2)$, $x/\sqrt{v^2 - x^2} actg(x/2)$ показывают, что при каждом фиксированном v функции Ψ_1 и Ψ_2 имеют конечное число нулей $\pm x_k(v)$ ($k = 0, \dots, 2N(v) + 1$), причем нули этих функций перемежаются, являясь возрастающими функциями параметра v . Пусть $\Psi_1(x_{2k+1}(v), v) = 0$ и $\Psi_2(x_{2k}(v), v) = 0$. Функции $x_{2k}(v)$

определены на отрезке $2\pi k < v < +\infty$, причем $2\pi k < x_{2k}(v) < (2k+1)\pi$. Функции $x_{2k+1}(v)$ определены на отрезке $(2k+1)\pi < v < +\infty$, причем $(2k+1)\pi < x_{2k+1}(v) < (2k+2)\pi$.

Заменяя внутренние интегралы в формуле (2.5) суммой вычетов, получаем

$$w_2 + w_3 = \operatorname{Re} \frac{1}{8\pi^2} \left(\sum_{k=0}^{N(v)+\infty} \int_0^\infty F_1(x_{2k+1}(v), r, z, t) x'_{2k+1}(v) dv + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N(v)+\infty} \int_0^\infty F_2(x_{2k}(v), r, z, t) x'_{2k}(v) dv \right) \quad (2.6)$$

где

$$F_1(x, r, z, t) = J_0 \left(\frac{r x A(x)}{b |\sin(x/2)|} \right) \operatorname{LQ}(iA(x)) \exp \left(itA(x) - cx \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| \right) \cos \frac{x}{2} \sin x \left(z - \frac{1}{2} \right)$$

$$F_2(x, r, z, t) = J_0 \left(\frac{r x B(x)}{b |\cos(x/2)|} \right) \operatorname{LQ}(iB(x)) \exp \left(itB(x) - cx \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \right) \sin \frac{x}{2} \cos x \left(z - \frac{1}{2} \right)$$

$$A(x) = \sqrt{1 - (1 - a^2) \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad B(x) = \sqrt{1 - (1 - a^2) \cos^2 \frac{x}{2}}$$

а переменная v связана с переменной x формулами (2.4).

Там, где функции $x_n(v)$ не определены, продолжаем их нулем. Если воспользоваться монотонностью функций $x_n(v)$ и сделать в каждом из интегралов формуле (2.6) замену переменной интегрирования $x = x_n(v)$, то формулу (2.6) можно записать в виде

$$w_2 + w_3 = \operatorname{Re} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi F_2(x + 2k\pi, r, z, t) dx + \operatorname{Re} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi F_1(x + (2k+1)\pi, r, z, t) dx \quad (2.7)$$

Воспользовавшись выражениями (2.6), формулу (2.7) можно записать в виде

$$w_2 + w_3 = -\operatorname{Im} \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\pi B(x) \sin \frac{x}{2} \operatorname{LQ}(iB(x)) e^{itB(x) - cx \operatorname{tg}(x/2)} \Psi(x, r, z) dx \quad (2.8)$$

$$\Psi(x, r, z) = \sum_{k=0}^\infty e^{-c\pi k \operatorname{tg}(x/2)} \cos \left(x \left(z - \frac{1}{2} \right) + k\pi z \right) J_0 \left(\frac{r(x + k\pi)B(x)}{b |\cos(x/2)|} \right) \quad (2.9)$$

При $x = 0$ получаем, воспользовавшись известными тождествами [2],

$$\Psi(0, r, z) = \sum_{k=0}^\infty J_0 \left(\frac{k\pi a}{b} r \right) \cos(k\pi z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=m+1}^n G(r, 2l - z), \text{ если } bz > r$$

$$\Psi(0, r, z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m (G(r, 2l + z) + G(r, 2l - z)), \text{ если } \frac{bz}{r} < 1$$

$$G(r \pm lz) = \frac{b}{\sqrt{a^2 r^2 - b^2 (2l \pm z)^2}}, \quad m = \left[\frac{|ar - bz|}{2b} \right], \quad n = \left[\frac{bz + ar}{2b} \right]$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x .

Исследуем поведение интеграла (2.8) при больших значениях t . Фаза $B(x)$ имеет стационарные точки на концах интервала интегрирования. Вклад от точки $x = \pi$ убывает быстрее любой отрицательной степени t , а вклад от точки $x = 0$ равен

$$w_1 + w_2 = \operatorname{Re} \frac{a \operatorname{LQ}(ia) \Psi(0, r, z) e^{ita}}{128\pi^2 b^2 t} \quad (2.10)$$

При фиксированных значениях r и z функция $w_1 + w_2$ убывает как e^{ia}/t . Из формул (2.9) и (2.10) следует, что в окрестности особых поверхностей (конусов) $a^2 r^2 - b^2 (2l \pm z)^2 = 0$ функция $\Psi(0, r, z)$ становится неограниченной и, следовательно, вблизи этих поверхностей колебания будут медленно затухающими.

Исследуем поведение слагаемого w_1 в формуле (2.2). Делая замены переменных

$$p = qi \pm 0, \quad \omega(qi \pm 0, u) = -i\omega_1, \quad \omega_1 = u \frac{\sqrt{1-q^2}}{q}$$

$$\beta(qi \pm 0, u) = \mp i\beta_1, \quad \beta_1 = u \frac{\sqrt{a^2 - q^2}}{q}$$

преобразуем выражение для w_1 к виду

$$w_1 = -\frac{1}{4\pi^3} \int_0^{+\infty} \int_0^a J_0(ru) \operatorname{Re}(\mathbf{L}Q(iq)e^{iqt}) \operatorname{Re} F(\omega_1, \beta_1, z) du dq \quad (2.11)$$

$$F(\omega_1, \beta_1, z) = u \left(e^{i\beta_1 c - i\omega_1 z} + \frac{\omega_1 - \beta_1}{\omega_1 + \beta_1} e^{i\beta_1 c - \omega_1(2-z)} \right) \left(q(\omega_1 + \beta_1) \left(1 - \left(\frac{\omega_1 - \beta_1}{\omega_1 + \beta_1} e^{-i\omega_1} \right)^2 \right) \right)^{-1}$$

Полагая

$$\frac{\omega_1 - \beta_1}{\omega_1 + \beta_1} = \frac{1}{b^2} \left(\sqrt{1-q^2} - \sqrt{a^2 - q^2} \right)^2 = s^2(q)$$

$$\frac{u}{q(\omega_1 + \beta_1)} = \frac{1}{b} s(q)$$

перепишем формулу (2.11) в виде

$$w_1 = -\frac{1}{4\pi^3 b} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a s^{4k+1} \operatorname{Re}(\mathbf{L}Q(iq)e^{iqt}) \times \\ \times \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} J_0(ru) \left(e^{i\beta_1 c - i\omega_1(z+2k)} + s^2 e^{i\beta_1 c - i\omega_1(2-z+2k)} \right) du dq$$

Вычисляя внутренние интегралы, получаем

$$w_1 = -\frac{1}{4\pi^3 b} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a s^{4k+1} \operatorname{Re}(\mathbf{L}Q(iq)e^{iqt}) \left(\sigma(r, z+2k) + s^2 \sigma(r, 2-z+2k) \right) dq \quad (2.12)$$

$$\sigma(q, r, z) = \int_0^{+\infty} J_0(ru) \exp(iuA) du = \frac{\theta(r^2 - A^2)}{\sqrt{r^2 - A^2}}$$

$$A(q, z) = \frac{1}{q} \left(z\sqrt{1-q^2} - c\sqrt{a^2 - q^2} \right), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 1 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

После замены переменной интегрирования

$$q(x) = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{1 - x^2}}, \quad s(q) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

формула (2.12) приводится к виду

$$w_1 = -\frac{b}{4\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a \frac{x(1-x)^{2k-1}}{(1+x)^{2k+2}} \operatorname{Re}(\mathbf{L}Q(iq(x))e^{iq(x)t}) \times \\ \times \frac{\sigma(q(x), r, z+2k) + s^2 \sigma(q(x), r, 2-z+2k)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (2.13)$$

где функция $\sigma(q(x), r, z)$ отлична от нуля, только если

$$z < \frac{a}{b} L(r), \quad \max\{0, x_1\} \leq x \leq x_2 \quad (2.14)$$

$$x_{1,2} = \frac{b^2 cz \mp r \sqrt{a^2 L^2(r) - b^2 z^2}}{L^2(r)}, \quad L(r) = \sqrt{b^2 c^2 + r^2}$$

При этом справедливо равенство

$$\frac{\sigma(q(x), r, z)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{L(r) \sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}}$$

Полагая

$$\frac{bz}{aL(r)} = \sin \varphi, \quad \frac{cb}{L(r)} = \cos \psi, \quad \frac{r}{L(r)} = \sin \psi$$

получаем $x_{1,2} = a \sin(\varphi \mp \psi)$.

При $z < ar/b$ оба корня вещественны и $x_1 \leq 0 \leq x_2 \leq a$. При $ar \leq z \leq aL(r)/b$ корни вещественны и $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a$. При $z = aL(r)/b$ корни совпадают: $x_1 = x_2 = abc/L(r)$. Заметим еще, что корень $x_2 = a$ на плоскости $z = ca$.

Пусть $N(r, z)$ – наибольший номер, для которого справедливо неравенство $z + 2k < ar/b$, а $M(r, z)$ – наибольший номер, для которого справедливо неравенство $ar/b < z + 2k < aL(r)/b$. Равенство (2.13) перепишется в виде

$$w_1 = -\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{M(r,z)} \sum_{m=1}^2 \int_0^{x_m(r,z+2k)} \frac{G_1(x, r, z+2k) e^{iq(x)t} dx}{\sqrt{(x - x_1(r, z+2k))(x_2(r, z+2k) - x)}} - \\ - \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{M(r,2-z)} \sum_{m=1}^2 \int_0^{x_m(r,2-z+2k)} \frac{G_2(x, r, 2-z+2k) e^{iq(x)t} dx}{\sqrt{(x - x_1(r, 2-z+2k))(x_2(r, 2-z+2k) - x)}} \\ G_1(x, r, z) = \frac{b}{4\pi^3 \sqrt{b^2 c^2 + r^2}} \frac{x(1-x)^{2k-1}}{(1+x)^{2k+2}} \mathbf{L}Q\left(i \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{1 - x^2}}\right) \\ G_2(x, r, z) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 G_1(x, r, z)$$

Найдем вклады в асимптотическое разложение интеграла от точек x_1 и x_2 [3]

$$w_1 = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{M(r,z)} (-H_{12}(r, z+2k)) + \sum_{k=N(r,z)+1}^{M(r,z)} H_{11}(r, z+2k) \right) + \\ + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{M(r,2-z)} (-H_{22}(r, 2-z+2k)) + \sum_{k=N(r,2-z)+1}^{M(r,2-z)} H_{21}(r, 2-z+2k) \right) \quad (2.15) \\ H_{ij}(r, z) = \frac{G_i(x_j(r, z), r, z) \exp(itq(x_j(r, z) + (-1)^j \pi/4))}{\sqrt{\pi t |q'(x_j(r, z))| (x_2(r, z) - x_1(r, z))}}$$

Из формулы (2.15) видно, что при больших временах возмущения убывают как $1/\sqrt{t}$. Формула (2.15) становится неточной, когда корни x_2 и x_1 близки, т.е.

$$x_2 \approx x_1 \approx bca / L(r) \quad (2.16)$$

$$z + 2k \approx aL(r) / b \quad \text{или} \quad 2 - z + 2k \approx aL(r) / b$$

В этом случае основной вклад дают интегралы

$$I_k = \int_{x_1}^{x_2} \frac{G_k(x, r, z) e^{iq(x)t} dx}{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}}, \quad k = 1, 2$$

Применяя стандартную технику [3], получаем

$$\begin{aligned} I_k &\approx G_k(x_1, r, z) e^{iq(x_1)t} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{iq'(x_1)(x-x_1)t} dx}{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}} = \\ &= G_k(x_1, r, z) e^{it(q(x_1) + \frac{1}{2}q'(x_1)(x_2 - x_1))} J_0(q'(x_1)(x_2 - x_1)t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Поверхности, на которых $x_2 = x_1$, определяются равенствами (2.16). Видно, что эти поверхности являются гиперboloидами вращения. Вблизи них, как следует из равенства (2.17), возмущения затухают медленно. Это обстоятельство также может быть препятствием для распространения радиоволн в среднем слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Крикоров А.М. Фундаментальное решение уравнения внутренних волн для среды с разрывной частотой Брента–Вяйсяля // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 621–627.
2. Рыжик И.М., Градштейн С.Г. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.–Л.: Гостехиздат, 1951. 464 с.
3. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Долгопрудный

Поступила в редакцию
26.IV.2001