

УДК 532.5:534.2

© 2002 г. Р.Р. Гадыльшин

О РАССЕЙНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЛОВУШКЕ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается рассеяние плоской волны на резонаторе с узким каналом связи. Потенциал скорости рассеянной волны в таком резонаторе имеет две серии полюсов с малыми мнимыми частями, соответствующие основной ловушке и каналу связи, влияние которых внутри ловушки различается на порядки. Исследуется критический случай, когда предельное значение для полюсов из обеих серий совпадает. Показано, что в таком случае существуют два полюса, сходящихся к этому предельному значению, и они оба наследуют резонансные свойства, характерные для полюсов, порождаемых основной ловушкой. Построены главные члены асимптотик полюсов и рассеянной волны.

1. Постановка задачи. Пусть пространство заполнено однородной и изотропной жидкой или газообразной средой. Известно, что в этом случае потенциал скорости $U_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ рассеянной акустической волны, возникающей при отражении плоской волны $U_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{k})}$ от идеально жесткого тела Ω^ε , является решением задачи Неймана

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)U_\varepsilon &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon; \quad \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon &= O(r^{-1}), \quad \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial r} - ikU_\varepsilon = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

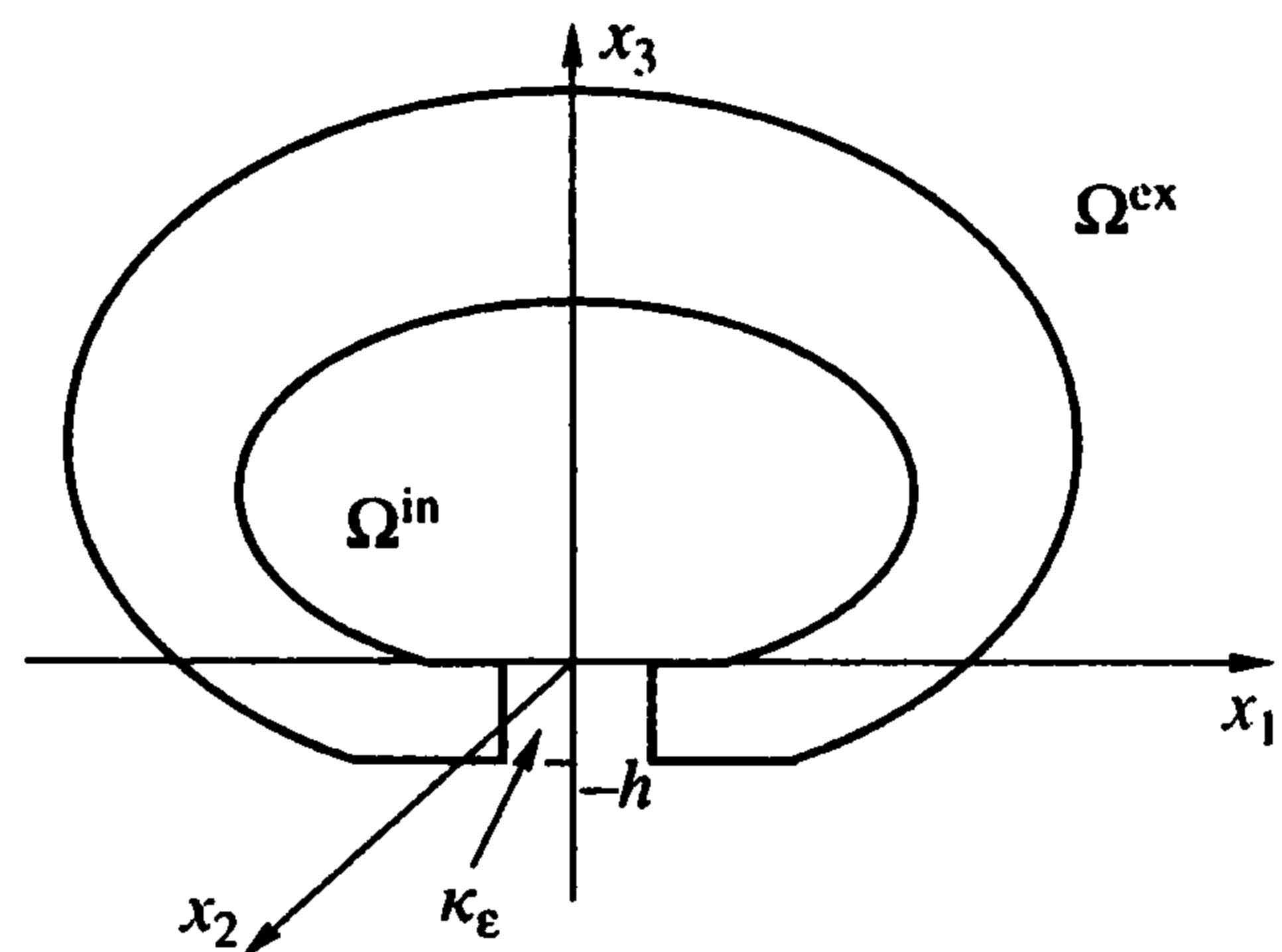
$$\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^\varepsilon}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad r = |\mathbf{x}|, \quad k = |\mathbf{k}|$$

$\mathbf{n}$ – внешняя нормаль, а полная волна в области Ω_ε определяется равенством

$$U^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = U_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + U_0(\mathbf{x}, \mathbf{k})$$

Рассматривается случай, когда Ω^ε представляет собой ловушку – область, гомеоморфную шаровому слою, в котором прорезан узкий канал связи (фигура). А именно пусть Ω^{in} и Ω – односвязные ограниченные области в $\mathbb{R}^3$, $\overline{\Omega^{\text{in}}} \subset \Omega$, $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, $\partial\Omega^{\text{in}(\text{ex})} \in C^\infty$. Предполагается, что Ω^{in} в окрестности начала координат совпадает с полупространством $x_3 > 0$, область Ω^{ex} в окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, -h)$, $h > 0$ совпадает с полупространством $x_3 < -h$, а отрезок $[0, -h]$ на оси Ox_3 не содержит точек из $\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}$. Далее, пусть ω – ограниченная область на плоскости $x_3 = 0$ с гладкой границей и $\omega_\varepsilon = \{\mathbf{x}: \mathbf{x}\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Области Ω^{in} и Ω^{ex} являются соответственно внутренностью и внешностью резонатора $\Omega_\varepsilon = \Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}} \cup \kappa_\varepsilon$, где $\kappa_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times [0, -h]$ – канал связи. Краевую задачу (1.1) будем называть возмущенной, а под предельной внутренней (внешней) задачей будем понимать краевую задачу Неймана для уравнений Гельмгольца в области Ω^{in} (в области Ω^{ex}).

Известно (см., например, [1]), что для вещественных k возмущенная задача и предельная внешняя задача однозначно разрешимы и их решения допускают аналитические продолжения в комплексную плоскость, которые имеют дискретные (при фиксированном ε) множества полюсов Σ_ε и Σ^{ex} соответственно, лежащее ниже вещественной оси. С другой стороны, было показано [2], что в Σ_ε есть две серии полюсов с малыми мнимыми частями, первая из которых при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к множеству Σ^{in} собственных частот (корней из собственных значений) предельной внутренней задачи, а вто-



рая – к множеству $\Sigma^{\text{ch}} = \{m\pi/h\}_{m=1}^\infty$, порождаемому наличием канала связи конечной длины $h > 0$. Было показано [3], что полюсы, сходящиеся к $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, где Σ_1^{in} – множество простых собственных частот предельной внутренней задачи, вызывают резонансные явления в задаче рассеяния, заключающиеся в том, что при k , близких к k_0 , решение задачи (1.1) неограниченно растет в области Ω^{in} . Этот эффект назовем внутренним резонансом.

Из полученных ранее результатов [4, 5] следует, что резонансные явления наблюдаются и при вещественных частотах, близких к нулю и к $\Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, причем было показано [5], что если в области Ω^{ex} качественное поведение решений задачи (1.1) для частот, близких к $\Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$ и $\Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, одинаково: решение возмущенной задачи отличается от решения предельной внешней задачи на $O(1)$ (этот эффект будем называть внешним резонансом), то внутри ловушки (т.е. в области Ω^{in}) решение задачи рассеяния при частотах, близких к $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, ограничено, а при частотах, близких к $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, имеет порядок ε^{-2} . Таким образом, в первом случае отсутствует внутренний резонанс. Такое различие в поведении решений объясняется тем, что в первом случае соответствующая квазисобственная функция (вычет решения в полюсе) сосредоточена в κ_ε , а во втором случае – в Ω^{in} . Ниже исследуется влияние полюсов с малой мнимой частью на рассеяние плоской волны на Ω^ε в критическом случае, когда предельное значение k_0 этих полюсов принадлежит $\Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$. Заметим, что такая ситуация достигается при фиксированной области Ω^{in} изменением длины h канала связи.

2. Формулировка результатов. Ниже будут построены асимптотики двух полюсов $\tau_\varepsilon^{(1)}$ и $\tau_\varepsilon^{(2)}$, сходящихся к

$$k_0 = \pi m / h \in \Sigma^{\text{ch}} \cap \Sigma_1^{\text{in}} \quad (2.1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, и, в частности, будет показано, что

$$\tau_\varepsilon^{(n)} = k_0 + \varepsilon \tau_1^{(n)} + \varepsilon^2 \tau_2^{(n)} + \dots$$

где

$$\tau_1^{(n)} = -\frac{|\omega| \psi_0}{T^{(n)}}, \quad \text{Im } \tau_2^{(n)} = -\frac{(k_0 |\omega| \psi_0)^2 \sigma(k_0)}{T^{(n)^2} + h |\omega| \psi_0^2} \quad (2.2)$$

$$T^{(n)} = k_0 q_0(\omega) + (-1)^n \sqrt{(k_0 q_0(\omega))^2 + h |\omega| \psi_0^2 / 2}, \quad \psi_0 = \psi(0)$$

$$\sigma(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r=R} |G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}, k)|^2 ds > 0$$

$q_0(\omega)$ – некоторая вещественная постоянная, которая зависит только от геометрии области ω и будет определена в следующем разделе (см. формулы (3.27)), $\sigma(k)$ – поперечное сечение [6] функции Грина $G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}, k)$ предельной внешней задачи, $\psi(\mathbf{x})$ – нормированная в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственная функция предельной внутренней задачи, соответствующая собственной частоте k_0 .

Из определения $T^{(n)}$ и выражений (2.2) следует, что $\tau_1^{(1)} \neq \tau_2^{(2)}$, $\text{Im } \tau_1^{(n)} = 0$ и $\text{Im } \tau_2^{(n)} < 0$. Так как полюсы $\tau_\epsilon^{(n)}$ аналитического продолжения решения задачи (1.1) находятся на расстоянии $|\text{Im } \tau_\epsilon^{(n)}|$ от вещественной оси, а само решение рассматривается для вещественных частот k , то, очевидно, это решение испытывает наибольшее влияние полюса при вещественных частотах $k^{(n)}(\epsilon) = \text{Re } \tau_\epsilon^{(n)} + O(\text{Im } \tau_\epsilon^{(n)})$. Такие частоты назовем пиковыми и будем исследовать асимптотику $U^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{k}^{(n)}(\epsilon))$ при

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{k}^{(n)}(\epsilon) = \mathbf{k}_0, \quad |\mathbf{k}^{(n)}(\epsilon)| = k^{(n)}(\epsilon)$$

Очевидно, $|\mathbf{k}_0| = k_0$. В силу соотношений (2.2) пиковые частоты определяются равенствами

$$k^{(n)}(\epsilon) = \text{Re } \tau_\epsilon^{(n)} + \epsilon^2 t \quad (2.3)$$

где t – произвольное вещественное число.

Обозначим через $U^0(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ полную волну, возникающую при рассеянии плоской волны $U_0(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ на Ω (т.е. сумму $U_0(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ и решения предельной внешней задачи). Будет показано, что, если выполнено соотношение (2.1), то при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} U^\epsilon(\mathbf{x}; \mathbf{k}^{(n)}(\epsilon)) &\sim \epsilon^{-1} C^{(n)}(t) T^{(n)} \psi(\mathbf{x}) / \psi_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{in}} \\ U^\epsilon(\mathbf{x}; \mathbf{k}^{(n)}(\epsilon)) &\sim \epsilon^{-2} C^{(n)}(t) \sin(k_0 x_3), \quad \mathbf{x} \in \kappa_\epsilon \\ U^\epsilon(\mathbf{x}; \mathbf{k}^{(n)}(\epsilon)) &\sim (-1)^m k_0 |\omega| C^{(n)}(t) G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) + U^0(\mathbf{x}; \mathbf{k}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ex}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$C^{(n)}(t) = \frac{(-1)^m k_0 |\omega| \psi_0^2 U^0(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0)}{2k_0(i\tilde{\tau}_2^{(n)} - t)(T^{(n)^2} + h|\omega| \psi_0^2 / 2)}, \quad \tilde{\tau}_2^{(n)} = \text{Im } \tau_2^{(n)}$$

Из соотношений (2.4) следует, что в обоих случаях (т.е. для $n = 1$ и $n = 2$) при пиковых частотах наблюдается как внешний, так и внутренний резонанс.

3. Построение асимптотик полюсов. Рассмотрим краевую задачу с источником

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u_\epsilon &= F, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\epsilon; \quad \partial u_\epsilon / \partial \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_\epsilon \\ u_\epsilon &= O(r^{-1}), \quad \partial u_\epsilon / \partial r - iku_\epsilon = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.1)$$

Следуя описанному ранее подходу [4] и принимая во внимание, что, как известно [7], совокупная кратность вычетов в полюсах, сходящихся к $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$, равна двум, можно показать, что в этом случае аналитическое продолжение решения краевой задачи (3.1) при k , близких к k_0 , имеет вид

$$u_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \sum_{n=1}^2 \frac{\Psi_\epsilon^{(n)}(\mathbf{x})}{k^2 - \tau_\epsilon^{(n)^2}} \int_{\Omega_\epsilon} F(\mathbf{y}) \Psi_\epsilon^{(n)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \tilde{u}_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (3.2)$$

где при $\epsilon \rightarrow 0$ функция $\tilde{u}_\epsilon$ ограничена, и если к тому же $\text{supp } F \subset \Omega^{\text{ex}}$, то $\tilde{u}_\epsilon$ сходится к решению u_0 предельной внешней задачи в Ω^{ex} и к нулю вне Ω^{ex} (по норме L_2 на любом

компакте). Квазисобственные функции $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ при фиксированном ε удовлетворяют уравнениям

$$(\Delta + \tau_\varepsilon^{(n)^2})\Psi_\varepsilon^{(n)} = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon$$

однородному граничному условию Неймана на $\partial\Omega_\varepsilon$ и экспоненциально растут на бесконечности, а при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{в } \Omega^{\text{ex}}$$

(по норме L_2 на любом компакте) и

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) \rightarrow \alpha^{(n)}\psi(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega^{\text{in}}$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) - \varepsilon^{-1}\beta^{(n)}\sqrt{\frac{2}{h|\omega|}}\sin(k_0x_n) \rightarrow 0 \quad \text{в } \kappa_\varepsilon \quad (3.3)$$

где $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$ – некоторые вещественные числа, нормированные равенством

$$\alpha^{(n)^2} + \beta^{(n)^2} = 1 \quad (3.4)$$

Замечания. 1°. Условия (3.3), (3.4) означают, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ норма $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ в $L_2(\Omega^{\text{in}} \cup \kappa_\varepsilon)$ стремится к единице. Сам же вид главных членов асимптотик (3.3) представляет линейную комбинацию главных членов асимптотик квазисобственных функций, соответствующих случаям $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ и $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, рассмотренным ранее [5]. В обоих этих случаях существует по одному полюсу и одной квазисобственной функции (т.е. вместо сингулярной суммы по n в правой части соотношения (3.2) имеется лишь одно сингулярное слагаемое), но первому случаю соответствуют значения $\alpha = 1, \beta = 0$, а второму – $\alpha = 0, \beta = 1$ в соотношениях (3.3).

2°. Ясно, что задача рассеяния плоской волны сводится к краевой задаче (3.1). В свою очередь, для того чтобы получить главные члены асимптотик решения задачи (3.1) из представления (3.2), достаточно знать значения $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$ и главные (ненулевые) члены асимптотики $\text{Im}\tau_\varepsilon^{(n)}$ и $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ в Ω^{ex} . Определение значений этих параметров и является основной целью настоящего раздела.

Обозначим через $G^{\text{in}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ функцию Грина предельной внутренней задачи и положим

$$\Psi_\varepsilon^{\text{in}}(\mathbf{x}, k) = (k_0^2 - k^2)(a_0 + \varepsilon L_1^{\text{in}}(D_y) + \varepsilon^2 L_2^{\text{in}}(D_y))G^{\text{in}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)|_{y=0}$$

$$\Psi_\varepsilon^{\text{ex}}(\mathbf{x}, k) = (\varepsilon b_1 + \varepsilon^2 L_1^{\text{ex}}(D_y))G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)|_{y=x_0}$$

$$L_1^{\text{in}}(D_y) = \sum_{q=1}^2 a_{1q} \frac{\partial}{\partial y_q}, \quad L_2^{\text{in}}(D_y) = \sum_{j=1}^2 \sum_{q=1}^j a_{2jq} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_q} + \sum_{q=1}^2 a_{2q} \frac{\partial}{\partial y_q} \quad (3.5)$$

$$L_1^{\text{ex}}(D_y) = b_2 + \sum_{q=2}^2 b_{2q} \frac{\partial}{\partial y_q}$$

$$\Psi_\varepsilon^{\text{ch}}(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-1}w_{-1}(x_3) + w_0(x_3) + \varepsilon w_1(x_3)$$

где

$$w_{-1}(t) = c_{-1} \sin(k_0 t) \quad (3.6)$$

а $a_0, a_{jm}, a_{2jm}, h_{jm}, c_{-1}$ и $w_0(t), w_1(t)$ – пока произвольные постоянные и функции соот-

ветственно. По определению функция $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(\mathbf{x}, k)$ (функция $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(\mathbf{x}, k)$) удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)\psi_\varepsilon^{\text{in}} = 0$ в области Ω^{in} (уравнению $(\Delta + k^2)\psi_\varepsilon^{\text{ex}} = 0$ в области Ω^{ex}) и однородному граничному условию Неймана на $\partial\Omega^{\text{in}} \setminus \{0\}$ (на $\partial\Omega^{\text{ex}} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$) и

$$\psi_\varepsilon^{\text{in}}(\mathbf{x}, k) = a_0 \psi_0 \psi(\mathbf{x}) + o(1) \quad \text{при} \quad k \rightarrow k_0 \quad \text{в} \quad \overline{\Omega^{\text{in}}} \setminus \{0\} \quad (3.7)$$

Главные члены асимптотик полюсов и соответствующих квазисобственных функций будем искать в виде

$$\tau_\varepsilon \approx k_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 \tau_2 \quad (3.8)$$

$$\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \approx \psi_\varepsilon^{\text{in}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon) \quad \text{в} \quad \Omega^{\text{in}} \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \quad (3.9)$$

$$\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \approx \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon) \quad \text{в} \quad \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \quad (3.10)$$

$$\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \approx \psi_\varepsilon^{\text{ch}}(\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \kappa_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2})) \quad (3.11)$$

Здесь и далее $S^{\text{in}}(R)$ и $S^{\text{ex}}(R)$ – шары радиуса R с центрами в 0 и $\mathbf{x}_0$ соответственно, а индекс n соответствия n -му полюсу будем для краткости записи опускать (по возможности). Из соотношений (3.5)–(3.9), (3.11) следует, что условия нормировки (3.3), (3.4) имеют вид

$$(a_0 \psi_0)^2 + \frac{1}{2} c_{-1}^2 h |\omega| = 1 \quad (3.12)$$

Таким образом, получено первое уравнение для коэффициентов a_0 и c_{-1} .

Очевидно, что функция (3.5) удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на стенках канала связи κ_ε . Подставляя соотношения (3.8), (3.11) (3.5) в уравнение $(\Delta + \tau_\varepsilon^2)\Psi_\varepsilon = 0$ при $\mathbf{x} \in \kappa_\varepsilon$, получаем уравнения для коэффициентов w_j

$$w_j''(x_3) + k_0^2 w_j(x_3) + \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i w_{j-i}(x_3) = 0, \quad -h < x_3 < 0$$

где

$$\lambda_1 = 2k_0 \tau_1, \quad \lambda_2 = \tau_1^2 + 2k_0 \tau_2 \quad (3.13)$$

Легко видеть, что решениями этих уравнений являются функция (3.6) и функции

$$\begin{aligned} w_0(x_3) &= c_{-1} \tau_1 x_3 \cos(k_0 x_3) + c_0 \cos(k_0 x_3) + A \sin(k_0 x_3) \\ w_1(x_3) &= c_{-1} \left(-\frac{1}{2} \tau_1^2 x_3^2 \sin(k_0 x_3) + \tau_2 x_3 \cos(k_0 x_3) \right) - \tau_1 c_0 x_3 \sin(k_0 x_3) + \\ &+ A \tau_1 x_3 \cos(k_0 x_3) + c_1 \cos(k_0 x_3) + B \sin(k_0 x_3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

при любых постоянных c_0, c_1, A и B .

Неизвестные постоянные a_j, b_j и c_j будем определять методом сращиваемых асимптотических разложений [8], вводя в окрестности концов канала связи κ_ε (в $S^{\text{in}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon$) и $S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}) \cap \Omega_\varepsilon$) внутренние разложения и сращивая их с разложениями (3.9) и (3.11) на одном конце канала и с разложениями (3.10) и (3.11) на другом

конце канала. Из определения $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$, асимптотик функции G^{in} в нуле и функции G^{ex} при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0$ (см., например, [5]) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{in}}(\mathbf{x}, k) = & a_0 \left(\psi_0 \left(\psi_0 + \sum_{q=1}^2 \psi_q x_q \right) + (k_0^2 - k^2) \left(\frac{1}{2\pi r} + g^{\text{in}} \right) \right) + \\ & + \varepsilon \left(\psi_0 \sum_{q=1}^2 a_{1q} \psi_q - \frac{k_0^2 - k^2}{2\pi} L_1^{\text{in}}(D_x) \frac{1}{r} \right) + \varepsilon^2 \frac{k_0^2 - k^2}{2\pi} \tilde{L}_2^{\text{in}}(D_x) \frac{1}{r} + \\ & + O((r + \varepsilon + |k - k_0|)(r + \varepsilon)) \quad \text{при } k \rightarrow k_0, \quad \mathbf{x} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(\mathbf{x}, k) = & \varepsilon b_1 \left(\frac{1}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + g^{\text{ex}} \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{2\pi} \tilde{L}_1^{\text{ex}}(D_x) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \\ & + O(\varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \varepsilon^2) \quad \text{при } k \rightarrow k_0, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2^{\text{in}}(D_x) = & \sum_{j=1}^2 \sum_{q=1}^j a_{2jq} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_q} - \sum_{q=1}^2 a_{2q} \frac{\partial}{\partial x_q}, \quad \tilde{L}_1^{\text{ex}}(D_x) = b_2 - \sum_{q=1}^2 b_{2q} \frac{\partial}{\partial x_q} \\ g^{\text{in}} = & \lim_{k \rightarrow k_0} \left(G^{\text{in}}(\mathbf{x}, 0, k) - \frac{\psi_0^2}{k_0^2 - k^2} - \frac{1}{2\pi r} \right) \Big|_{\mathbf{x}=0} \\ g^{\text{ex}} = & \left(G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k_0) - \frac{1}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\text{Im } g^{\text{in}} = 0, \quad \text{Im } g^{\text{ex}} = k_0 \sigma(k_0) \quad (3.17)$$

Первое из этих равенств сразу следует из вещественности функции Грина предельной внутренней задачи при вещественных k^2 , а второе – хорошо известно (см., например, [9]).

Переписывая асимптотики $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ch}}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow 0$ во внутренних переменных $\mathbf{X} = \mathbf{x}\varepsilon^{-1}$, при учете соотношений (3.8), (3.15) и (3.5), (3.6), (3.14) получаем, что при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho = |\mathbf{X}| < 2\varepsilon^{-1/2}$)

$$\psi_\varepsilon^{\text{in}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon) = V_0^{\text{in}}(\mathbf{X}) + \varepsilon V_1^{\text{in}}(\mathbf{X}) + O(\varepsilon^2 \rho^2) \quad (3.18)$$

$$\psi_\varepsilon^{\text{ch}}(\mathbf{x}) = W_0^{\text{in}}(\mathbf{X}) + \varepsilon W_1^{\text{in}}(\mathbf{X}) + O(\varepsilon^2 X_3^3)$$

где

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in}}(\mathbf{X}) = & a_0 \psi_0^2 + \frac{k_0 \tau_1}{\pi} \left(-a_0 + \sum_{q=1}^2 a_{1q} \frac{\partial}{\partial X_q} - \sum_{j=1}^2 \sum_{q=1}^j a_{2jq} \frac{\partial^2}{\partial X_j \partial X_q} \right) \frac{1}{\rho} \\ V_1^{\text{in}}(\mathbf{X}) = & a_0 \psi_0 \sum_{q=1}^2 \psi_q X_q + \left(\psi_0 \sum_{q=1}^2 a_{1q} \psi_q - a_0 2k_0 \tau_1 g^{\text{in}} \right) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \left(a_0 (\tau_1^2 - 2k_0 \tau_2) + \sum_{q=1}^2 ((\tau_1^2 + 2k_0 \tau_2) a_{1q} + 2k_0 \tau_1 a_{2q}) \frac{\partial}{\partial X_q} \right) \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$W_0^{\text{in}}(\mathbf{X}) = c_{-1} k_0 X_3 + c_0$$

$$W_1^{\text{in}}(\mathbf{X}) = (c_{-1} \tau_1 + A k_0) X_3 + c_1$$

Аналогично, переписывая асимптотики $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ch}}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ в переменных $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\varepsilon^{-1}$, при учете соотношений (3.8), (3.16) и (3.5), (3.6), (3.14) получаем, что при $\varepsilon^{1/2} < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$)

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon) = V_0^{\text{ex}}(\mathbf{X}) + \varepsilon V_1^{\text{ex}}(\mathbf{X}) + O(\varepsilon^2 \rho^2) \quad (3.20)$$

$$\psi_\varepsilon^{\text{ch}}(\mathbf{x}) = W_0^{\text{ex}}(\mathbf{X}) + \varepsilon W_1^{\text{ex}}(\mathbf{X}) + O(\varepsilon^2 X_3^3)$$

где

$$V_0^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \left(b_1 - \sum_{q=1}^2 b_{2q} \frac{\partial}{\partial X_q} \right) \frac{1}{\rho}$$

$$V_1^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = b_1 g^{\text{ex}} + \frac{b_2}{2\pi} \frac{1}{\rho} \quad (3.21)$$

$$W_0^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = (-1)^{m+1} (c_{-1} k_0 X_3 + c_{-1} \tau_1 h - c_0)$$

$$W_1^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = (-1)^{m+1} ((c_{-1} \tau_1 + A k_0) X_3 + c_{-1} \tau_2 h + A \tau_1 h - c_1)$$

Принимая во внимание равенства (3.18), (3.20) и следуя методу сращиваемых асимптотических разложений, в окрестности концов канала связи будем искать асимптотики квазисобственных функций в виде

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) = \nu_0^{\text{in}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \nu_1^{\text{in}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \cap S^{\text{in}}(2\varepsilon^{1/2}) \quad (3.22)$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) = \nu_0^{\text{ex}} \left(\frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \nu_1^{\text{ex}} \left(\frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \cap S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}) \quad (3.23)$$

где

$$\nu_j^{\text{in}}(\mathbf{X}) = V_j^{\text{in}}(\mathbf{X}) + O(\rho^{-4+j}), \quad \nu_j^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = V_j^{\text{ex}}(\mathbf{X}) + O(\rho^{-3+j}), \quad X_3 \geq 0 \quad (3.24)$$

$$\nu_j^{\text{in}}(\mathbf{X}) = W_j^{\text{in}}(\mathbf{X}) + o(1), \quad \nu_j^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = V_j^{\text{ex}}(\mathbf{X}) + o(1), \quad X_3 < 0$$

при $\rho \rightarrow \infty$.

Подставляя выражения (3.8) и (3.22) (выражения (3.8) и (3.23)) в уравнение $(\Delta + \tau_\varepsilon^2) \Psi_\varepsilon^{(n)} = 0$ в Ω_ε , требуя для функций (3.22) (для функции (3.23)) выполнения однородных граничных условий на $\partial\Omega_\varepsilon$ и переходя к внутренним переменным $\mathbf{X} = \mathbf{x}\varepsilon^{-1}$ (к внутренним переменным $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\varepsilon^{-1}$), получаем краевые задачи для ν_j^{in} (для ν_j^{ex})

$$\Delta \nu_j^{\text{in(ex)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \gamma_\omega; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nu_j^{\text{in(ex)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\gamma_\omega \quad (3.25)$$

где

$$\gamma_\omega = \{\mathbf{X} : X_3 > 0\} \cup \{\mathbf{X} : (X_1, X_2) \in \omega, -\infty < X_3 \leq 0\}$$

Было показано [4], что существуют решения Z_q краевой задачи (3.25), имеющие асимптотики

$$Z_0(\mathbf{X}) = \left(-\frac{|\omega|}{2\pi} + \sum_{i=1}^2 d_{0i}(\omega) \frac{\partial}{\partial X_i} + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^i d_{0is}(\omega) \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_s} \right) \frac{1}{\rho} + O(\rho^{-4}) \quad (3.26)$$

$$Z_j(\mathbf{X}) = X_j + \sum_{i=1}^2 d_{ji}(\omega) \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{1}{\rho} \right) + O(\rho^{-3}), \quad j = 1, 2$$

при $\rho \rightarrow \infty$, $X_3 \geq 0$ и асимптотики

$$Z_0(\mathbf{X}) = X_3 + q_0(\omega) + O(e^{\mu X_3}), \quad Z_j(\mathbf{X}) = q_j(\omega) + O(e^{\mu X_3}), \quad j = 1, 2 \quad (3.27)$$

при $\rho \rightarrow \infty$, $X_3 < 0$, где $\mu > 0$ – вторая собственная частота двумерной задачи Неймана для $-\Delta$ в ω , а коэффициенты $d_{i,t}$, $d_{i,t,s}$, $q_i(\omega)$ зависят от геометрии области ω .

Положим

$$v_0^{\text{in}}(\mathbf{X}) = c_{-1}k_0Z_0(\mathbf{X}) + a_0\psi_0^2$$

$$v_1^{\text{in}}(\mathbf{X}) = (c_{-1}\tau_1 + Ak_0)Z_0(\mathbf{X}) + a_0\psi_0 \sum_{q=1}^2 \psi_q Z_q(\mathbf{X}) + \left(\psi_0 \sum_{q=1}^2 a_{1q}\psi_q - a_0 2k_0\tau_1 g^{\text{in}} \right) \quad (3.28)$$

$$v_0^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = (-1)^{m+1} c_{-1}k_0Z_0(\mathbf{X})$$

$$v_1^{\text{ex}}(\mathbf{X}) = (-1)^{m+1} (c_{-1}\tau_1 + Ak_0)Z_0(\mathbf{X}) + b_1 g^{\text{ex}}$$

Из соотношений (3.19), (3.21) и (3.26)–(3.28) следует, что необходимым и достаточным условием выполнения равенств (3.24) являются равенства

$$c_{-1}k_0q_0(\omega) + a_0\psi_0^2 = c_0, \quad c_{-1}|\omega|/2 = \tau_1 a_0 \quad (3.29)$$

$$(c_{-1}\tau_1 + Ak_0)q_0(\omega) + \psi_0 \sum_{j=1}^2 (q_j(\omega)a_0 + a_{1j})\psi_j - 2a_0k_0\tau_1 g^{\text{in}} = c_1 \quad (3.30)$$

$$(c_{-1}\tau_1 + Ak_0)|\omega| = a_0(\tau_1^2 + 2k_0\tau_2) \quad (3.31)$$

$$c_{-1}k_0q_0(\omega) = c_{-1}\tau_1 h - c_0, \quad (-1)^m c_{-1}k_0|\omega| = b_1 \quad (3.32)$$

$$(c_{-1}\tau_1 + Ak_0)q_0(\omega) + (-1)^{m+1} b_1 g^{\text{ex}} = c_{-1}\tau_2 h + A\tau_1 h - c_1 \quad (3.33)$$

$$c_{-1}d_{0t}(\omega) = \frac{\tau_1}{\pi} a_{1t}, \quad c_{-1}d_{0ts}(\omega) = -\frac{\tau_1}{\pi} a_{2ts} \quad (3.34)$$

$$(c_{-1}\tau_1 + Ak_0)d_{0t}(\omega) + a_0\psi_0 \sum_{q=1}^2 \psi_q d_{qt}(\omega) = \frac{1}{2\pi} ((\tau_1^2 + 2k_0\tau_2)a_{1t} + 2k_0\tau_1 a_{2t}) \quad (3.35)$$

$$(-1)^m (c_{-1}\tau_1 + Ak_0)|\omega| = b_2 \quad (3.36)$$

Разрешая уравнения (3.12), (3.29), (3.32), находим две серии значений $a_0^{(n)}$, $c_{-1}^{(n)}$, $\tau_1^{(n)}$, $b_1^{(n)}$, $c_1^{(n)}$ ($n = 1, 2$) и, в частности, получаем формулы

$$a_0^{(n)} = -\frac{T^{(n)}}{\psi_0 T_n}, \quad c_{-1}^{(n)} = \frac{\psi_0}{T_n}, \quad b_1^{(n)} = (-1)^m \frac{k_0 |\omega| \psi_0}{T_n} \quad (3.37)$$

$$T_n = \sqrt{T^{(n)^2} + h|\omega|\psi_0^2/2}$$

и (2.2) для $\tau_1^{(n)}$. Разрешая уравнения (3.34), (3.36), находим значения $a_{1t}^{(n)}$, $a_{2ts}^{(n)}$ и $b_2^{(n)}$. И наконец, из уравнений (3.30), (3.31), (3.33) и (3.35) определяем $A^{(n)}$, $\tau_2^{(n)}$, $c_1^{(n)}$, $a_{2t}^{(n)}$ и, в частности, получаем, что

$$\text{Im } \tau_2^{(n)} = -\frac{k_0 |\omega|^2 \psi_0^2}{T^{(n)^2} + h|\omega|\psi_0^2} \text{Im } g^{\text{ex}} \quad (3.38)$$

Из равенств (3.38) и (3.17) вытекает значение $\text{Im } \tau_e^{(n)}$ в формулах (2.2).

Подчеркнем, что выбрав коэффициенты $a_0^{(n)}$, $b_j^{(n)}$, $c_q^{(n)}$, $a_{jt}^{(n)}$, $a_{2ts}^{(n)}$ и $A^{(n)}$, удовлетворяющие равенствам (3.29)–(3.36), добились выполнения равенств (3.24). Таким образом, согласованы (в главном) асимптотические разложения (3.9) и (3.11) с функцией (3.22) в $S^{\text{in}}(2\varepsilon^{1/2}) \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2})$ и асимптотические разложения (3.10), (3.11) с функцией (3.23) в $S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}) \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})$.

Из соотношений (3.5)–(3.11) и (3.37) следует, что

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) &\approx c_{-1}^{(n)} T^{(n)} \Psi(\mathbf{x}) / \Psi_0 \quad \text{в } \Omega^{\text{in}} \setminus S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}) \\ \Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) &\approx \varepsilon(-1)^m k_0 |\omega| c_{-1}^{(n)} G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k_0) \quad \text{в } \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \\ \Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) &\approx \varepsilon^{-1} c_{-1}^{(n)} \sin(k_0 x_3) \quad \text{в } \kappa_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2}))\end{aligned}\tag{3.39}$$

4. Главные члены асимптотик решений для задач рассеяния. Из соотношений (3.39) и (3.2) следует, что для пиковых частот (2.3) главные члены асимптотик решения задачи (3.1) (т.е. задачи с внешним источником) имеют вид

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{k}^{(n)}(\varepsilon)) &\sim \varepsilon^{-1} c^{(n)}(t) T^{(n)} \Psi(\mathbf{x}) / \Psi_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{in}} \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{k}^{(n)}(\varepsilon)) &\sim \varepsilon^{-2} c^{(n)}(t) \sin(k_0 x_3), \quad \mathbf{x} \in \kappa_\varepsilon \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{k}^{(n)}(\varepsilon)) &\sim (-1)^m k_0 |\omega| c^{(n)}(t) G^{\text{ex}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}, k_0) + u_0(\mathbf{x}; \mathbf{k}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ex}}\end{aligned}\tag{4.1}$$

где

$$c^{(n)}(t) = \frac{(-1)^m k_0 |\omega| (c_{-1}^{(n)})^2 u_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0)}{2k_0(i\tilde{\tau}_2^{(n)} - t)}, \quad \tilde{\tau}_2^{(n)} = \text{Im } \tau_2^{(n)}$$

Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$; $L > 0$ – достаточно большое число, такое, что $\bar{\Omega} \subset S(L)$, $\delta > 0$. Очевидно, что функцию U^δ можно представить и в виде

$$U^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = U_0(\mathbf{x}, \mathbf{k})(1 - \chi(rL^{-1})) + u_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{k})\tag{4.2}$$

где u_ε – решение задачи (3.1), а u_0 – решение предельной внешней задачи в Ω^{ex} с правыми частями, равными

$$F = U^0 \Delta \chi + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_i}$$

Так как $\text{supp } F \in \Omega^{\text{ex}}$, то u_ε и u_0 – решения задач с внешним источником.

Из соотношений (4.1), в частности, следует, что

$$U^0(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = U_0(\mathbf{x}, \mathbf{k})(1 - \chi(rL^{-1})) + u_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad u_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0) = U^0(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0)\tag{4.3}$$

Подставляя соотношения (4.1) в выражение (4.2) и принимая во внимание равенства (4.3), получаем формулы (2.4) главных членов асимптотик полной волны для пиковых частот.

5. Заключительные замечания. В разд. 3 методом сращиваемых асимптотических разложений построены первые члены асимптотик полюсов и соответствующих квази-собственных функций. Построение остальных членов асимптотик (т.е. построение полного формального асимптотического разложения) проводится аналогично. В частности, при согласовании следующих членов разложения определяются постоянные b_{2q} в определении ψ^{ex} и B в выражениях (3.14). Введены же эти члены для того, чтобы

убедиться, что они не влияют на уравнения для определения главных параметров τ_j , a_0 , b_1 и c_{-1} . Для случаев $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ и $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$ построения полных асимптотик приведены ранее [4, 5]. Полное асимптотическое разложение представляет собой ряды по степеням ε , коэффициенты которых – производные функций Грина, причем порядок этих производных возрастает со степенью ε .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00139 и 00-15-96038) и Министерства образования (Е00-1.0-53).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin etc.: Springer, 1980. = *Санчес-Паленсиа Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
2. *Beale J.T.* Scattering frequencies of resonators // *Communic. Pure and Applied Math.* 1973. V. 26. № 4. P. 549–563.
3. *Арсеньев А.А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // *Ж. вычисл. математики и мат. физики.* 1976. Т. 16. № 3. С. 718–724.
4. *Гадыльшин Р.Р.* О полюсах акустического резонатора // *Функциональный анализ и его приложения.* 1993. Т. 27. Вып. 4. С. 3–16.
5. *Gadyl'shin R.R.* Asymptotics of scattering frequencies with small imaginary parts for acoustic resonator // *Mathematical Modelling and Numerical analysis.* 1994. V. 28. № 6. P. 761–780.
6. *Colton D., Kress R.* Integral Equation Methods in Scattering Theory. N.Y. etc.: Wiley, 1983. = *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
7. *Brown R., Hislop P.D., Martinez A.* Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions // *J. Different. Equat.* 1995. V. 115. № 2. P. 458–476.
8. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
9. *Гадыльшин Р.Р.* Метод сращиваемых асимптотических разложений в задаче об акустическом резонаторе Гельмгольца // *ПММ.* 1992. Т. 56. С. 412–418.

Уфа
e-mail: gadylshin@bspu.ru

Поступила в редакцию
24.V.2000