

УДК 532.58

© 2002 г. А.А. Коробкин

ПРОНИКАНИЕ В ЖИДКОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

В рамках приближения Вагнера строится точное решение задачи о входе в идеальную и несжимаемую жидкость эллиптического параболоида с переменной скоростью. Показано, что область контакта жидкости с телом является эллиптической для произвольного закона погружения. Определены нагрузки, действующие на свободно падающее трехмерное тело при его ударе о поверхность жидкости. Показано, что максимальное ускорение проникающего тела определяется единственным параметром, зависящим от условий удара и формы тела.

Экспериментальные исследования [1, 2] показывают, что нагрузки, действующие на погружающееся затупленное тело со стороны жидкости, достигают своих максимальных значений при достаточно малых глубинах проникания.

Течение жидкости на начальном этапе проникания определяется с помощью подхода, развитого Вагнером [3] и заключающегося в редукции сложной исходной задачи гидродинамики к задаче об ударе по поверхности жидкости плавающего диска, форма и размер которого меняются со временем. Неизвестная форма диска определяется в каждый момент времени из условия непрерывного сопряжения свободной и твердой частей границы жидкости (условие Вагнера). Можно показать, что условие Вагнера равносильно условию конечности перемещений жидких частиц [4]. Формально уравнения и граничные условия теории Вагнера получаются с помощью линеаризации уравнений и граничных условий исходной нелинейной задачи, записанной относительно потенциала скоростей, при малых отношениях глубины проникания к горизонтальному размеру области контакта. Границы применимости теории Вагнера подробно проанализированы в [2, 5].

Другая приближенная теория проникания была предложена Карманом [6]. В рамках подхода Кармана изменение смоченной части проникающего тела за счет встречного подъема свободной границы жидкости не учитывается. При этом область контакта совпадает с сечением движущегося тела плоскостью $z' = 0$ и считается известной.

Подход Вагнера хорошо зарекомендовал себя при решении практических задач [2]. Однако задача Вагнера с неизвестной линией раздела типа краевых условий остается достаточно сложной. Задача Вагнера нелинейна, несмотря на то, что уравнения движения и краевые условия линеаризованы.

Особенность задач проникания заключается в том, что область контакта тела с жидкостью заранее неизвестна и должна быть определена вместе с течением жидкости и формой ее свободной границы. До недавнего времени все рассмотрения даже в рамках подхода Вагнера ограничивались случаем плоских или осесимметричных тел. Случай эллиптического параболоида является достаточно общим, так как форма произвольного затупленного тела может быть приближенно заменена эллиптическим параболоидом вблизи точки первоначального контакта с жидкостью. Такая приближенная замена оправдана при малых глубинах проникания.

В рамках приближения Вагнера задача о входе в воду эллиптического параболоида с постоянной скоростью была рассмотрена ранее [7]. Предполагалось, что область контакта имеет форму эллипса в каждый момент времени. Построенное решение удовлетворяет условию на свободной границе жидкости только приближенно. Было показано [8], что задача Вагнера имеет автомодельные решения при скоростях проникания, изменяющихся во времени по степенному закону, для тел, форма поверхности которых описывается положительными и однородными функциями. Утверждается [8], что для эллиптического параболоида решение задачи Вагнера является автомодельным, но область контакта будет отличной от эллиптической. Это

утверждение связано с тем, что метод обратной задачи, предложенный в [8] для исследования процессов проникания, привел к громоздким формулам, подробный анализ которых проведен не был. Метод обратной задачи, в рамках которого требуется определить форму тела по заданной скорости проникания и форме области контакта, получил дальнейшее развитие [9]. Достаточно подробно был рассмотрен случай эллиптической области контакта. Показано [9], что для эллиптического параболоида, проникающего в жидкое полупространство с постоянной скоростью или постоянным ускорением, область контакта эллиптическая. Была исследована [9] точность приближенных результатов [7]; показано, в частности, что сила сопротивления, вычисленная с помощью приближенных формул, практически совпадает со своим точным значением [9] при всех удлинениях проникающего эллиптического параболоида.

Ниже показано, что метод, предложенный в [7], позволяет построить точное решение задачи Вагнера для эллиптического параболоида, проникающего в жидкое полупространство с произвольной скоростью. Решение получено в предположении, что область контакта имеет форму эллипса в каждый момент времени. Вопрос о единственности решения задачи Вагнера не рассматривается. Построенное решение используется для оценки максимальных перегрузок, испытываемых выпуклым телом конечных размеров при его свободном падении на поверхность жидкости и последующем проникании в нее.

1. Постановка задачи. Рассматривается трехмерная задача об ударе эллиптическим параболоидом по свободной границе идеальной несжимаемой жидкости. В начальный момент времени ($t' = 0$) жидкость занимает полупространство $z' < 0$ и покоится, твердое тело касается свободной поверхности жидкости $z' = 0$ в единственной точке, которая принимается за начало декартовой системы координат $Ox'y'z'$. Начальная скорость тела V_0 задана. Тело движется вертикально вниз под действием силы тяжести и силы сопротивления со стороны жидкости. Масса тела M и его главные радиусы кривизны R_x и R_y считаются заданными. Весомостью жидкости и поверхностным натяжением пренебрегаем. Требуется определить течение жидкости и силу сопротивления на начальном этапе погружения.

Задача рассматривается в безразмерных переменных (от соответствующих размерных переменных они отличаются отсутствием штриха). Оси координат Ox и Oy ориентированы таким образом, что радиусы кривизны R_x и R_y эллиптического параболоида в сечениях $y = 0$ и $x = 0$ соответственно удовлетворяют неравенству $R_y \geq R_x$. Примем за масштаб длины величину R_x и за масштаб времени – отношение R_x/V_0 , где $V_0 = U'(0)$ – скорость тела в момент удара. В безразмерных переменных положение тела описывается уравнением

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2)y^2 - h(t) \quad (1.1)$$

где $\varepsilon = \sqrt{1 - R_x/R_y}$ – эксцентриситет горизонтальных сечений эллиптического параболоида и $h(t)$ – безразмерная глубина проникания, $h' = R_x h$. Размерная скорость проникания $U'(t')$ равна $V_0 v(t)$, где $v(t) = dh/dt$ и $t = t'V_0/R_x$.

В рамках приближения Вагнера течение жидкости, вызванное прониканием в нее тела, описывается потенциалом скоростей $\phi(x, y, z, t)$, который удовлетворяет соотношениям

$$\Delta\phi = 0 \quad (z < 0) \quad (1.2)$$

$$\phi = 0 \quad (z = 0, \quad (x, y) \notin D(t)) \quad (1.3)$$

$$\phi_z = -v(t) \quad (z = 0, \quad (x, y) \in D(t)) \quad (1.4)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \phi \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty) \quad (1.5)$$

Здесь $D(t)$ – область контакта, на которой выполняется линеаризованное условие непротекания (1.4). Часть плоскости $z = 0$ вне области контакта соответствует свободной границе жидкости, давление на которой остается постоянным во все время движения. Гидродинамическое давление определяется в теории Вагнера линеаризованным

интегралом Коши – Лагранжа $p(x, y, z, t) = -\varphi_t(x, y, z, t)$. Соответственно условие (1.3) является линеаризованным динамическим условием на свободной границе жидкости. Форма свободной границы $z = \eta(x, y, t)$ находится из линеаризованного кинематического условия

$$\eta_t = \varphi_z(x, y, 0, t) \quad (z = 0, (x, y) \notin D(t)) \quad (1.6)$$

Условие непрерывного сопряжения свободной и твердой частей границы жидкости приводит к уравнению для определения формы области контакта

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2)y^2 - h(t) = \eta(x, y, t) \quad ((x, y) \in \Gamma(t)) \quad (1.7)$$

где $\Gamma(t)$ – граница области контакта (линия контакта).

Решение задачи Вагнера (1.2)–(1.7) ищется в классе функций, описывающих течения с конечной кинетической энергией. Это означает, что потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$ – непрерывная вплоть до границы $z = 0$ функция, а скорость жидких частиц $\nabla\varphi$ имеет не более чем корневую особенность на линии контакта $\Gamma(t)$. В соответствии с основными гипотезами [2, 5], приводящими к задаче Вагнера, можно ожидать, что решение задачи (1.2)–(1.7) правильно описывает начальный этап процесса, когда глубина погружения $h(t)$ намного меньше размера области $D(t)$.

Задача погружения даже после линеаризации уравнений движения и граничных условий остается нелинейной и очень сложной. Одна из трудностей исследования этой задачи связана с особенностью производных решения на движущейся линии смены типа краевого условия $\Gamma(t)$. Чтобы регуляризовать задачу Вагнера, определим потенциал перемещений

$$\phi(x, y, z, t) = \int_0^t \varphi(x, y, z, \tau) d\tau \quad (1.8)$$

Градиент потенциала перемещений дает вектор перемещений жидких частиц $\mathbf{X} = \nabla\phi$, $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$. Потенциал перемещений широко используется в линейной динамической теории упругости (см., например, [10, 11]). Ясно, что гладкость потенциала перемещений по временной переменной t на единицу больше, чем гладкость $\varphi(x, y, z, t)$. Менее очевиден тот факт, что интегрирование по времени в (1.8) приводит к повышению гладкости и по пространственным переменным x, y, z . Преобразование (1.8) является сглаживающим, так как особенности потенциала скорости сосредоточены на линии $\Gamma(t)$, перемещающейся по плоскости $z = 0$.

Краевая задача для потенциала перемещений

$$\Delta\phi = 0 \quad (z < 0) \quad (1.9)$$

$$\phi = 0 \quad (z = 0, (x, y) \notin D(t)) \quad (1.10)$$

$$\phi_z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2)y^2 - h(t) \quad (z = 0, (x, y) \in D(t)) \quad (1.11)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \phi \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty) \quad (1.12)$$

получается из соотношений (1.2)–(1.5) их интегрированием по времени с учетом кинематического условия (1.6) и условия Вагнера (1.7). Детали этой процедуры описаны ранее [12]. Заметим, что время t входит в задачу (1.9)–(1.12) как параметр, т.е. потенциал перемещений в отличие от потенциала скоростей может быть определен в каждый момент времени независимо от предшествующей истории процесса. Задача (1.9)–(1.12) была получена [7] с помощью лагранжевого подхода к описанию течения жидкости. Задача имеет тот же вид, что и (1.2)–(1.5), однако теперь условие непротекания (1.11) явно зависит от формы погружающегося тела, а условие Вагнера (1.7) преобразуется в ограничение на класс искомых функций

$$\phi \in C^2(R_-^3) \cup C^1(\bar{R}_-^3) \quad (1.13)$$

где $R_-^3 = \{x, y, z | z < 0\}$ и $\bar{R}_-^3 = \{x, y, z | z \leq 0\}$. Условие (1.13) означает, что требуется

определить решение задачи со смешанными краевыми условиями (1.9)–(1.12), которое описывает течение жидкости с непрерывным вплоть до границы полем перемещений жидких частиц.

В задаче (1.9)–(1.13) достаточно определить границу $\Gamma(t)$ области контакта $D(t)$ и значение потенциала перемещений $\phi(x, y, 0, t)$ в этой области. Краевая задача (1.9)–(1.12) может быть сведена к сингулярному интегральному уравнению первого рода относительно величины $\bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{yy}$, где $\bar{\phi}(x, y, t) = \phi(x, y, 0, t)$. После решения этого интегрального уравнения функция $\bar{\phi}$ определяется как решение уравнения Пуассона при следующих граничных условиях:

$$\bar{\phi} = 0, \quad \partial \bar{\phi} / \partial n = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma(t)) \quad (1.14)$$

которые вытекают из (1.13) и условия на свободной поверхности (1.10). Здесь $\partial \bar{\phi} / \partial n$ – нормальная производная искомой функции на плоской кривой $\Gamma(t)$. Видно, что одно из условий (1.14) служит для восстановления функции $\bar{\phi}(x, y, t)$ при заданной области $D(t)$, а второе – для определения геометрии этой области, обеспечивающей требуемую гладкость решения.

После того как решение задачи (1.9)–(1.13) построено, потенциал скоростей $\phi(x, y, z, t)$ и гидродинамическое давление $p(x, y, z, t)$ восстанавливаются по формулам

$$\phi = \phi_t, \quad p = -\phi_{tt} \quad (z \leq 0) \quad (1.15)$$

Скорость тела $u(t)$ и глубина $h(t)$ его погружения определяются с помощью второго закона Ньютона, который в безразмерных переменных дает

$$u_t = \beta - \gamma F(t), \quad h_t = u(t) \quad (t > 0); \quad u(0) = 1, \quad h(0) = 0 \quad (1.16)$$

Здесь

$$\beta = \frac{gR_x}{V_0^2}, \quad \gamma = \frac{\rho_0 R_x^3}{M}, \quad F(t) = \int \int_{D(t)} p(x, y, 0, t) dx dy \quad (1.17)$$

(ρ_0 – плотность жидкости, M – масса тела, $F(t)$ – безразмерная сила сопротивления, действующая на погружающееся тело со стороны жидкости). Решая задачу (1.16) при учете соотношений (1.13), (1.15) и (1.17), получаем

$$u(t) = 1 + \beta t + \gamma \int \int_{D(t)} \phi(x, y, 0, t) dx dy \quad (1.18)$$

$$h(t) = t + \frac{1}{2} \beta t^2 + \gamma \int \int_{D(t)} \phi(x, y, 0, t) dx dy \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) следует присоединить к задаче Вагнера (1.9)–(1.13) и рассматривать их совместно.

Задача (1.9)–(1.13), (1.19) даже для наиболее простой трехмерной формы проникающего тела остается достаточно сложной. Решение задачи ищется в предположении, что область контакта $D(t)$ – эллиптическая. Вопрос о единственности такого решения остается открытым.

2. Эллиптическая область контакта. Пусть граница $\Gamma(t)$ области контакта описывается уравнением

$$x^2/a^2(t) + y^2/b^2(t) = 1 \quad (2.1)$$

где полуоси эллипса $a(t)$ и $b(t)$ подлежат определению. Предполагается, что эксцен-

триситет $e = \sqrt{1 - a^2(t)/b^2(t)}$ эллипса (2.1) не зависит от времени. Решение задачи (1.19)–(1.13), (1.19), (2.1) ищется в виде

$$\phi = b^3(t)\Phi(\lambda, \mu, \nu), \quad b(t) = b_0\sqrt{h(t)} \quad (2.2)$$

$$\lambda = x/b(t), \quad \mu = y/b(t), \quad \nu = z/b(t), \quad a(t) = \sqrt{1 - e^2} b(t)$$

Постоянные e и b_0 должны быть определены в ходе решения задачи.

Краевая задача для новой искомой функции $\Phi(\lambda, \mu, \nu)$ имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\nu < 0) \quad (2.3)$$

$$\Phi = 0 \quad (\nu = 0, \quad (\lambda, \mu) \notin D_0, \quad D_0 = \{(\lambda, \mu) \mid (1 - e^2)^{-1}\lambda^2 + \mu^2 < 1\}) \quad (2.4)$$

$$\Phi_\nu = \frac{1}{2}(\lambda^2 + (1 - e^2)\mu^2) - b_0^{-2} \quad (\nu = 0, \quad (\lambda, \mu) \in D_0) \quad (2.5)$$

$$\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \Phi \rightarrow 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \rightarrow \infty) \quad (2.6)$$

$$\Phi \in C^2(R_-^3) \cup C^1(\bar{R}_-^3) \quad (2.7)$$

Задача (2.3)–(2.7) содержит единственный параметр e , который зависит от формы тела, и две неизвестные величины: b_0 и e , которые следует рассматривать как функции от e , где $0 \leq e < 1$. Важно отметить, что решение задачи (2.3)–(2.7) зависит не от закона движения тела, а только от его формы. Решение задачи (2.3)–(2.6), которое приближенно удовлетворяет условию на свободной границе (2.4) и точно – соотношениям (2.3), (2.5) и (2.6), построено ранее [7], оно заведомо не удовлетворяет ограничению (2.7). Ниже будет построено точное решение задачи (2.3)–(2.7).

Рассмотрим вертикальную компоненту вектора перемещений $Z(\lambda, \mu, \nu) = \Phi_\nu(\lambda, \mu, \nu)$. Эта функция – гармоническая в нижнем полупространстве, задана в области контакта D_0 и ее нормальная производная $Z_\nu(\lambda, \mu, 0)$ равна нулю на свободной границе жидкости, $\nu = 0$, $(\lambda, \mu) \notin D_0$, что является следствием уравнения (2.3) и условия (2.4). Кроме того, $(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)Z(\lambda, \mu, \nu) \rightarrow 0$ на бесконечности, что следует из (2.6). Продолжая функцию Z четным образом в верхнее полупространство, приходим к задаче Дирихле вне эллиптического диска D_0 . Решение последней задачи было построено [7] с помощью функций Ламе и имеет вид (символ $\Sigma_\pm$ означает суммирование членов с верхним и нижним знаком)

$$Z(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{\pm} L_{\pm} \left(\frac{\lambda^2}{\alpha_{\pm} - e^2} + \frac{\mu^2}{\alpha_{\pm}} + \frac{\nu^2}{\alpha_{\pm} - 1} - 1 \right) \frac{\sigma_{\pm}(\rho)}{\sigma_{\pm}(1)} \quad (2.8)$$

при выполнении условия

$$b_0 = \sqrt{6/(2 - e^2 - e^2)} \quad (2.9)$$

Здесь

$$L_{\pm} = \frac{\alpha_{\pm}(\alpha_{\pm} - e^2)(e^2 - \alpha_{\mp}e^2)}{2e^2(\alpha_{\pm} - \alpha_{\mp})}, \quad \alpha_{\pm} = \frac{1}{3}(1 + e^2 \pm \sqrt{1 - e^2 + e^4}) \quad (2.10)$$

$$\sigma_{\pm}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{(\rho^2 - \alpha_{\pm})^2 \sqrt{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}}$$

где $\rho = \rho(\lambda, \mu, \nu)$ – максимальный по величине корень кубического относительно ρ^2 уравнения

$$\frac{\lambda^2}{\rho^2 - e^2} + \frac{\mu^2}{\rho^2} + \frac{\nu^2}{\rho^2 - 1} = 1 \quad (2.11)$$

При этом $\rho = 1$ соответствует области контакта D_0 и $\rho > 1$ на свободной границе. Решение (2.8) непрерывно вплоть до границы эллиптического диска D_0 . Это решение не единственно, так как параметр e остается неопределенным.

Чтобы найти граничное значение $\bar{\Phi}(\lambda, \mu) = \Phi(\lambda, \mu, 0)$ искомой функции, перепишем уравнение (2.3) в виде

$$\Phi_{\lambda\lambda} + \Phi_{\mu\mu} = -Z_v(\lambda, \mu, v) \quad (v < 0) \quad (2.12)$$

и рассмотрим его предел при $v \rightarrow 0$ отдельно в области контакта, $(\lambda, \mu) \in D_0$, и на свободной границе. На свободной границе правая часть в (2.12) равна нулю, а в области контакта ее предельное при $v \rightarrow 0$ значение вычисляется с помощью формул (2.8)–(2.11). Имеем

$$\lim_{v \rightarrow 0} Z_v(\lambda, \mu, v) = \sum_{\pm} L_{\pm} \left(\frac{\lambda^2}{\alpha_{\pm} - e^2} + \frac{\mu^2}{\alpha_{\pm}} - 1 \right) \frac{1}{\sigma_{\pm}(1)} \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{d\sigma_{\pm}}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \quad ((\lambda, \mu) \in D_0)$$

где производная $\partial \rho / \partial v$ вычисляется с помощью уравнения (2.11). Получаем

$$\lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{d\sigma_{\pm}}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) = \frac{1}{g(\lambda, \mu, e)(1 - \alpha_{\pm})^2 \sqrt{1 - e^2}}, \quad g(\lambda, \mu, e) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{1 - e^2} - \mu^2 \right)^{1/2}$$

что позволяет записать уравнение для $\bar{\Phi}(\lambda, \mu)$ в виде

$$\bar{\Phi}_{\lambda\lambda} + \bar{\Phi}_{\mu\mu} = f(\lambda, \mu) \quad ((\lambda, \mu) \in D_0) \quad (2.13)$$

где

$$f(\lambda, \mu) = -\frac{C_1 \lambda^2 + C_2 \mu^2 - C_3}{g(\lambda, \mu, e)}, \quad C_1 = a_0[\alpha_+ a_+ - \alpha_- a_-] \quad (2.14)$$

$$C_2 = a_0[(\alpha_+ - e^2)a_+ - (\alpha_- - e^2)a_-], \quad C_3 = a_0[\alpha_+(\alpha_+ - e^2)a_+ - \alpha_-(\alpha_- - e^2)a_-]$$

$$a_0^{-1} = 2e^2(\alpha_+ - a_-)\sqrt{1 - e^2}, \quad a_{\pm} = \frac{e^2 - \alpha_{\mp} e^2}{\sigma_{\pm}(1)(1 - \alpha_{\pm})^2}$$

Функция $\bar{\Phi}(\lambda, \mu)$ будет удовлетворять условию на свободной границе (2.4) и условию (2.7), т.е. будет непрерывно дифференцируемой при всех значениях λ и μ , тогда и только тогда, когда

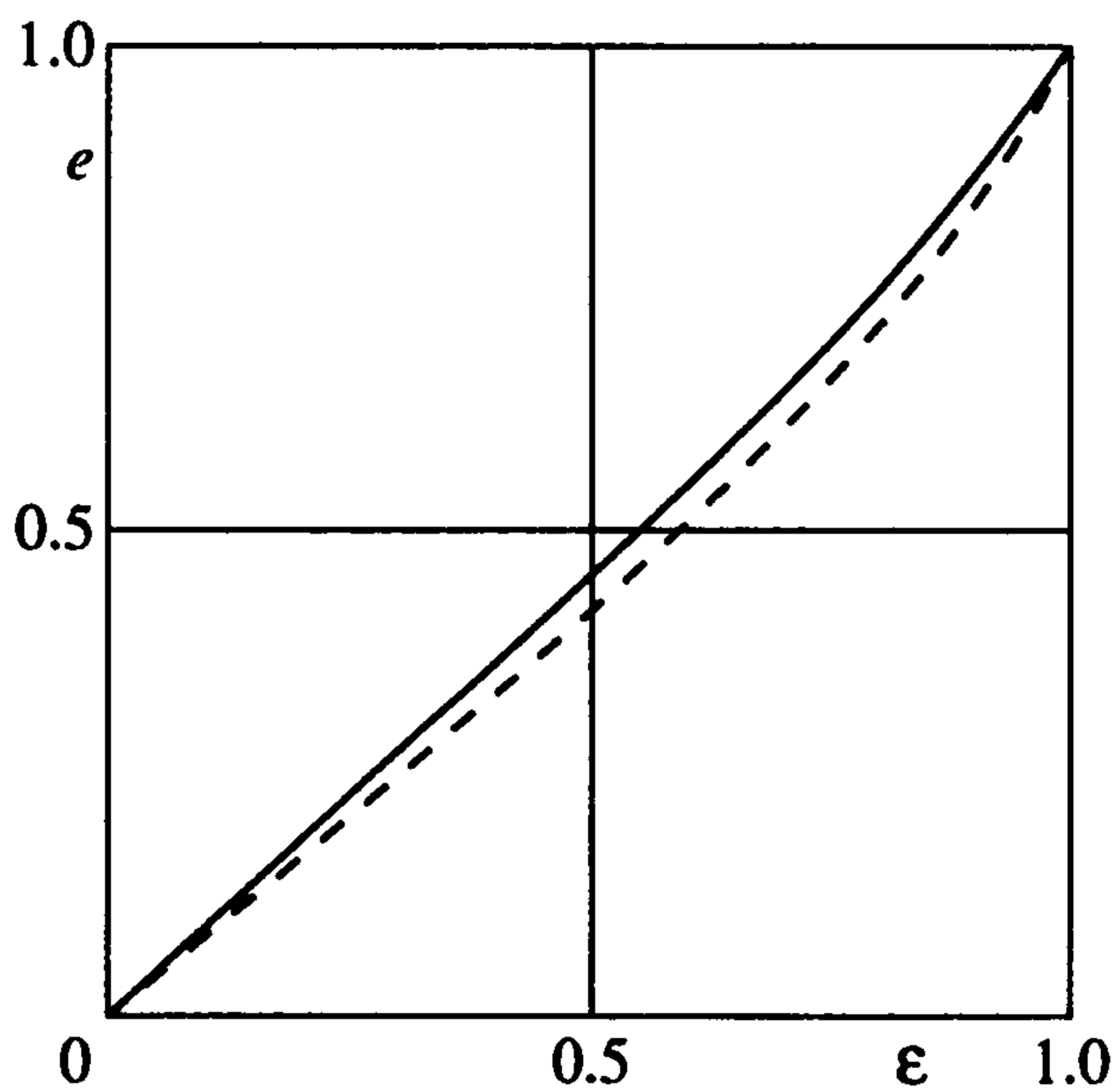
$$\bar{\Phi} = 0, \quad \partial \bar{\Phi} / \partial n = 0 \quad ((\lambda, \mu) \in \Gamma_0), \quad (2.15)$$

где Γ_0 – граница области D_0 и $\partial \bar{\Phi} / \partial n$ – нормальная производная искомой функции на Γ_0 .

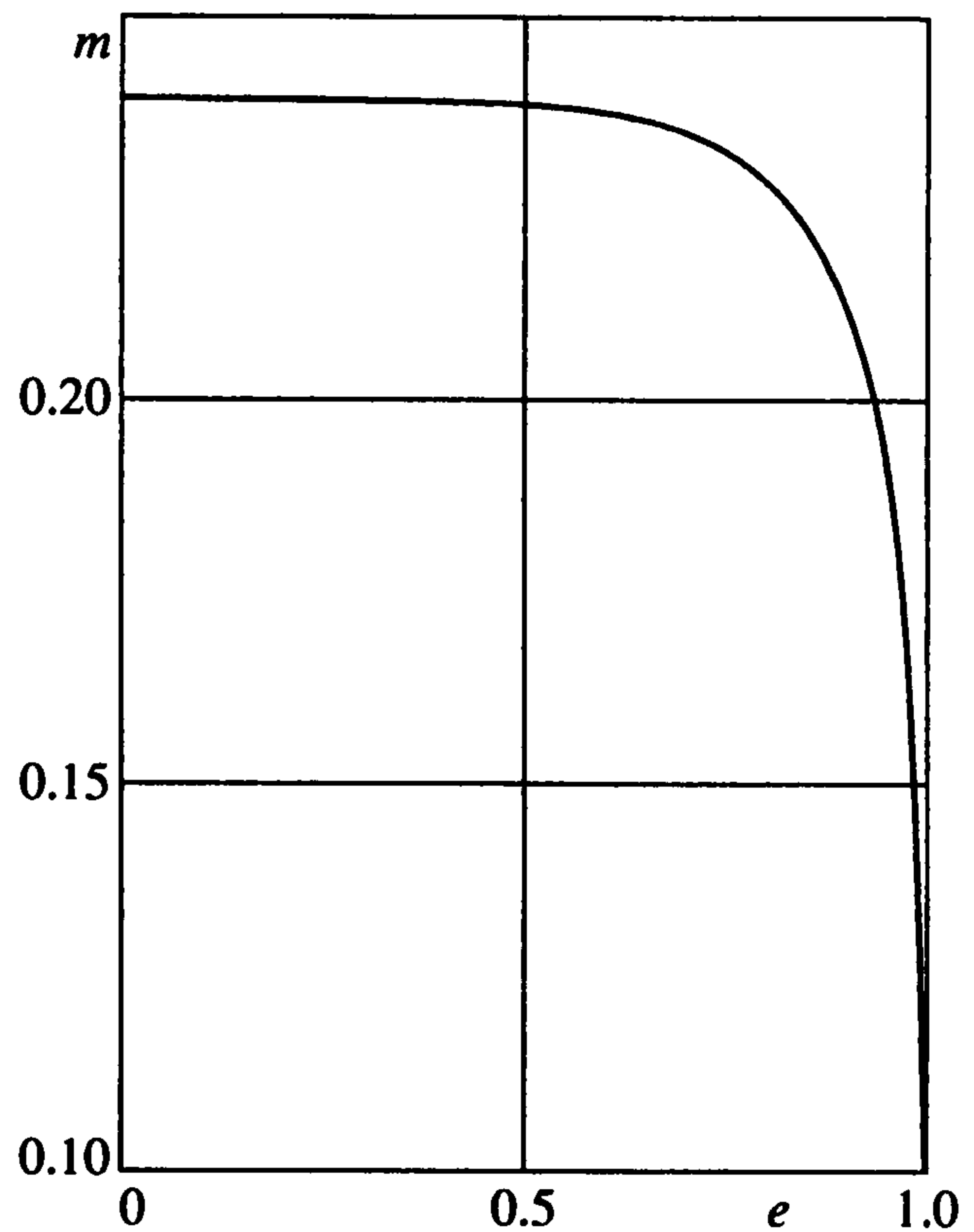
Краевая задача (2.13)–(2.15) относительно функции $\bar{\Phi}(\lambda, \mu)$ в области контакта является переопределенной, и ее решение существует только при выполнении некоторого дополнительного условия. Для вывода этого условия умножим обе части уравнения (2.13) на произвольную гармоническую функцию $\omega(\lambda, \mu)$ и проинтегрируем результат по области D_0 с учетом формулы Грина и граничных условий (2.15). Получаем

$$\iint_{D_0} f(\lambda, \mu) \omega(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0 \quad (2.16)$$

Таким образом, для разрешимости задачи (2.13)–(2.15) необходимо, чтобы функция $f(\lambda, \mu)$ была ортогональна любой гармонической функции.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим две гармонические и линейно независимые функции $\omega_1(\lambda, \mu) = 1$ и $\omega_2(\lambda, \mu) = \lambda^2 - \mu^2$. Подставляя эти функции в интеграл (2.16) и вычисляя интегралы с учетом формул (2.14), находим

$$C_1(1 - e^2) + C_2 = 3C_3 \quad (2.17)$$

$$(1 - e^2)(2 - 3e^2)C_1 - (2 + e^2)C_2 + 5e^2C_3 = 0$$

Можно проверить, что первое равенство (2.17) выполняется тождественно в силу второго, третьего и четвертого соотношений (2.14), а второе равенство (2.17) приводит к уравнению

$$\varepsilon^2 = e^2 \frac{M_+(e)/M_-(e) - 1}{\alpha_+ M_+(e)/M_-(e) - \alpha_-} \quad (2.18)$$

$$M_{\pm}(e) = [2(2 - e^2)\alpha_{\mp} + e^2 - 3]\sigma_{\pm}(1)(1 - \alpha_{\pm})^2$$

которое служит для определения эксцентриситета области контакта e в зависимости от эксцентриситета эллиптического параболоида ε .

График функции $e = e(\varepsilon)$ представлен на фиг. 1 сплошной линией. Штриховой линией показана приближенная зависимость $\varepsilon = e / \sqrt{\alpha_+(e)}$, полученная ранее [7].

Учитывая равенства (2.17), первую формулу (2.14) представим в виде

$$f(\lambda, \mu) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \right) (-N(e)g^3(\lambda, \mu, e)), \quad N(e) = \frac{C_3(1 - e^2)}{3(2 - e^2)} \quad (2.19)$$

который наглядно показывает, что равенство (2.18) гарантирует выполнение условия (2.16) с произвольной гармонической функцией $\omega(\lambda, \mu)$.

Уравнение (2.13), где $f(\lambda, \mu)$ заменяется по формуле (2.19), и краевые условия (2.15) дают

$$\bar{\Phi}(\lambda, \mu) = -N(e)g^3(\lambda, \mu, e) \quad (2.20)$$

что завершает построение решения задачи (2.3)–(2.7).

Формулы (2.2) и (2.20) позволяют представить потенциал перемещений в области контакта в виде

$$\phi(x, y, 0, t) = -N(e)b^3(t) \left[1 - \frac{x^2}{a^2(t)} - \frac{y^2}{b^2(t)} \right]^{3/2}$$

Потенциал скоростей в области контакта находится с помощью соотношений (1.15), (1.16) и (2.2)

$$\varphi(x, y, 0, t) = -\frac{9N(e)}{(2 - e^2 - \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} a(t) v(t) \left[1 - \frac{x^2}{a^2(t)} - \frac{y^2}{b^2(t)} \right]^{1/2} \quad (2.21)$$

Последнюю формулу можно получить, рассматривая решение задачи (1.2)–(1.5) для эллиптической области контакта (2.1) как предел решения классической задачи о движении эллипсоида в неограниченной жидкости [13] при стремлении одной из полуосей эллипсоида к нулю. Предельное решение совпадает с (2.21) при

$$N(e) = 1/9 \sqrt{1 - e^2} (2 - e^2 - \varepsilon^2) / E(e)$$

где $E(e)$ – эллиптический интеграл первого рода. Расчеты подтвердили выполнение этого равенства, однако его строгое доказательство затруднено, что связано со сложным видом функции $N(e)$. Указанное равенство используется ниже для представления результатов в более компактной форме.

В частности, присоединенная масса расширяющегося эллиптического диска (2.1) находится в размерных переменных с помощью формулы (2.21) в виде

$$M_a(t) = (2\pi/3)\rho_0[a'(t)]^2 b'(t) / E(e)$$

т.е. равна половине массы жидкости в эллипсоиде с полуосями a' , b' и $a'/E(e)$, где $a' = R_x a$ и $b' = R_y b$. Среди эллиптических дисков с одинаковой площадью ($\pi a' b' = S$) наибольшую присоединенную массу имеет круговой диск ($e = 0$). Присоединенная масса эллиптического диска

$$M_a = \rho_0 S^{3/2} m(e), \quad m(e) = 2(1 - e^2)^{1/4} / (3\sqrt{\pi} E(e))$$

монотонно убывает с увеличением его эксцентриситета e (фиг. 2). Значение $m(0) = 4/(3\pi^{3/2})$ соответствует круговому диску. Видно, что $m(e)$ значительно отличается от $m(0)$ только для очень вытянутых эллиптических дисков. Вычисления показывают, что отношение $(m(0) - m(e))/m(0)$ положительно и не превышает 0.001 при $e < 0.368$ ($\varepsilon < 0.4$), не превышает 0.01 при $e < 0.6$ ($\varepsilon < 0.66$) и не превышает 0.1 при $e < 0.885$ ($\varepsilon < 0.92$). Следовательно, для расчета присоединенной массы эллиптического диска можно приближенно пользоваться правилом: присоединенная масса эллиптического диска мало отличается от присоединенной массы кругового диска той же площади. Можно ожидать, что перегрузки, испытываемые осесимметричным телом при ударе о воду, могут быть уменьшены сплющиванием тела в одном из горизонтальных направлений без изменения его объема.

Действительно, рассмотрим параболоид вращения $z' = (x'^2 + y'^2)/(2R)$ и эллиптический параболоид $z' = x'^2/(2R_x) + y'^2/(2R_y)$, где $R_x = R\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $R_y = R/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $0 \leq \varepsilon < 1$, площади поперечных сечений которых совпадают. При погружении этих параболоидов в жидкость с постоянной скоростью V_0 на них действуют гидродинамические силы $F'(t', 0)$ и $F'(t', \varepsilon)$ соответственно. С помощью третьей формулы (1.17) находим

$$F'(t', \varepsilon) = \chi(\varepsilon) F'(t', 0)$$

$$\chi(\varepsilon) = \frac{\pi\sqrt{2}}{E(e)} (1 - \varepsilon^2)^{1/4} \frac{1 - e^2}{1 - \varepsilon^2} \left[1 + \frac{1 - e^2}{1 - \varepsilon^2} \right]^{-3/2}$$

Расчеты показывают, что $\chi(0) = 1$ и функция $\chi(\epsilon)$ монотонно убывает с ростом ϵ . Следовательно, сила сопротивления уменьшается при эллиптической деформации поперечного сечения проникающего тела вращения. Аналогичное свойство присуще и сопротивлению эквивалентных тел в сверхзвуковом потоке [14]. Необходимо отметить, что заметное уменьшение силы сопротивления наблюдается только при значительных деформациях, когда величина ϵ близка к единице: на 5% при $\epsilon = 0.83$ и на 10% при $\epsilon = 0.9$.

В рамках приближения Кармана [2] (без учета встречного подъема свободной границы) течение жидкости описывается решением задачи (1.2)–(1.5), где область контакта совпадает с поперечным сечением проникающего тела (1.1) плоскостью $z = 0$, т.е.

$$D_K(t) = \left\{ x, y \left| \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon^2)y^2 < h(t) \right. \right\}$$

Индексом K помечаются величины, относящиеся к приближению Кармана.

Распределение потенциала скоростей по области $D_K(t)$ дается формулой

$$\varphi_K(x, y, 0, t) = -\frac{v(t)}{E(\epsilon)} [2h(t) - x^2 - (1 - \epsilon^2)y^2]^{1/2}$$

которая позволяет найти силу сопротивления, действующую на проникающее тело со стороны жидкости и составить уравнение движения тела. Ожидается, что на нагрузки, испытываемые телом при погружении, подход Вагнера дает ограничение сверху, а подход Кармана – снизу.

3. Перегрузки, действующие на проникающее в воду тело. Подставляя выражения (2.2) и (2.20) в уравнение (1.19), находим

$$h(t) = t + \frac{1}{2}\beta t^2 - \gamma q(\epsilon)h^{5/2}(t) \quad (3.1)$$

$$q(\epsilon) = \frac{8\sqrt{6}\pi}{5} \frac{1 - e^2(\epsilon)}{E(e)[2 - e^2 - \epsilon^2]^{3/2}} \quad (3.2)$$

Функция $q(\epsilon)$ зависит только от формы тела и неограниченно возрастает при $\epsilon \rightarrow 1$. График функции $k(\epsilon) = q(0)/q(\epsilon)$ представлен на фиг. 3.

Вид уравнения движения (3.1) показывает, что в рамках приближения Вагнера закон погружения в воду эллиптического параболоида будет таким же, как и для шара радиуса R_x с массой $k(\epsilon)M$, где $k(\epsilon) < 1$.

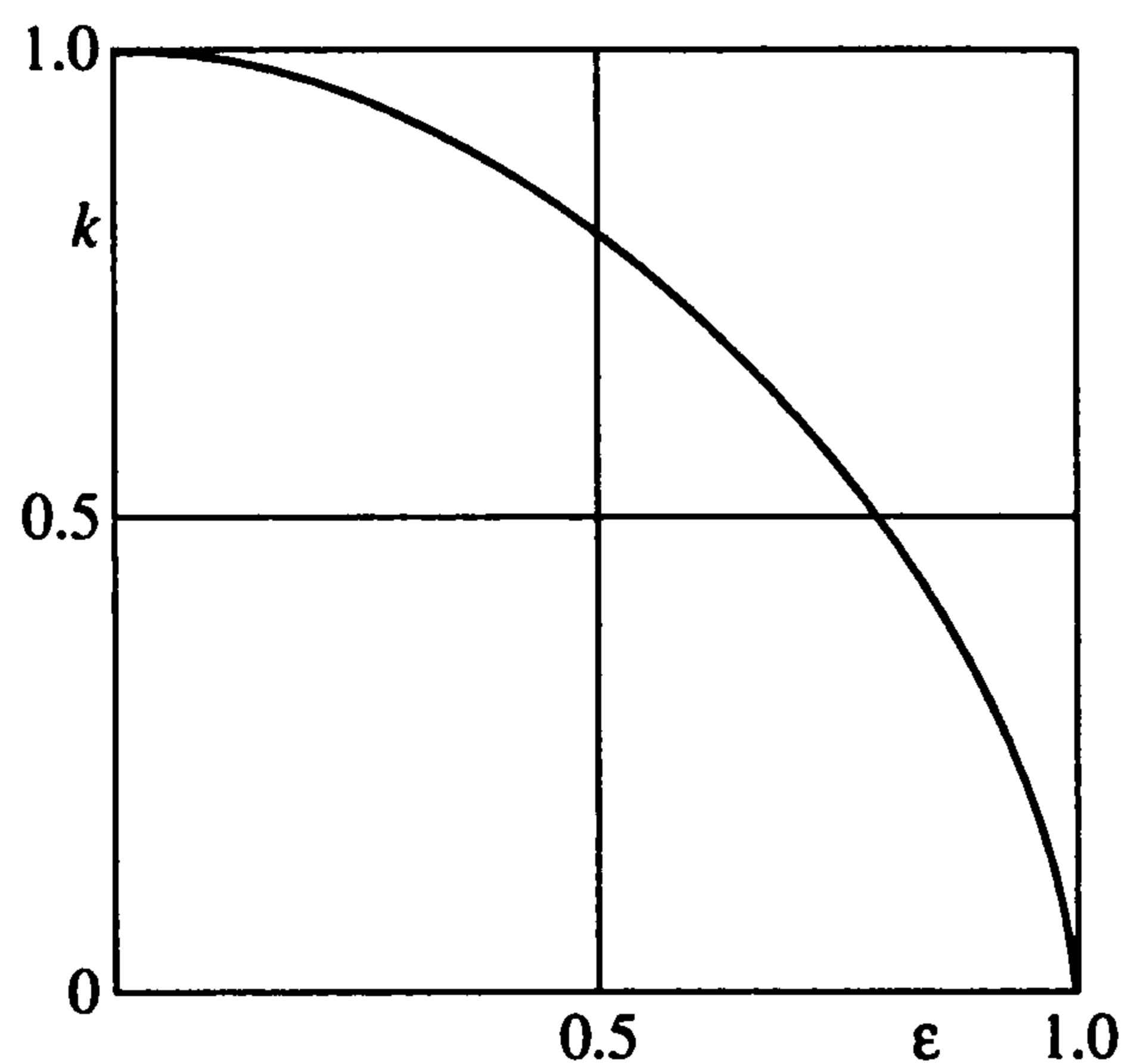
Уравнение (3.1) можно представить в более простом виде, если ввести растянутые переменные $s = (\gamma q)^{2/3}h$, $\tau = (\gamma q)^{2/3}t$ и параметр $\alpha = \beta(\gamma q)^{-2/3}/2$. Получаем квадратное уравнение

$$\alpha\tau^2 + \tau = s^{5/2} + s \quad (3.3)$$

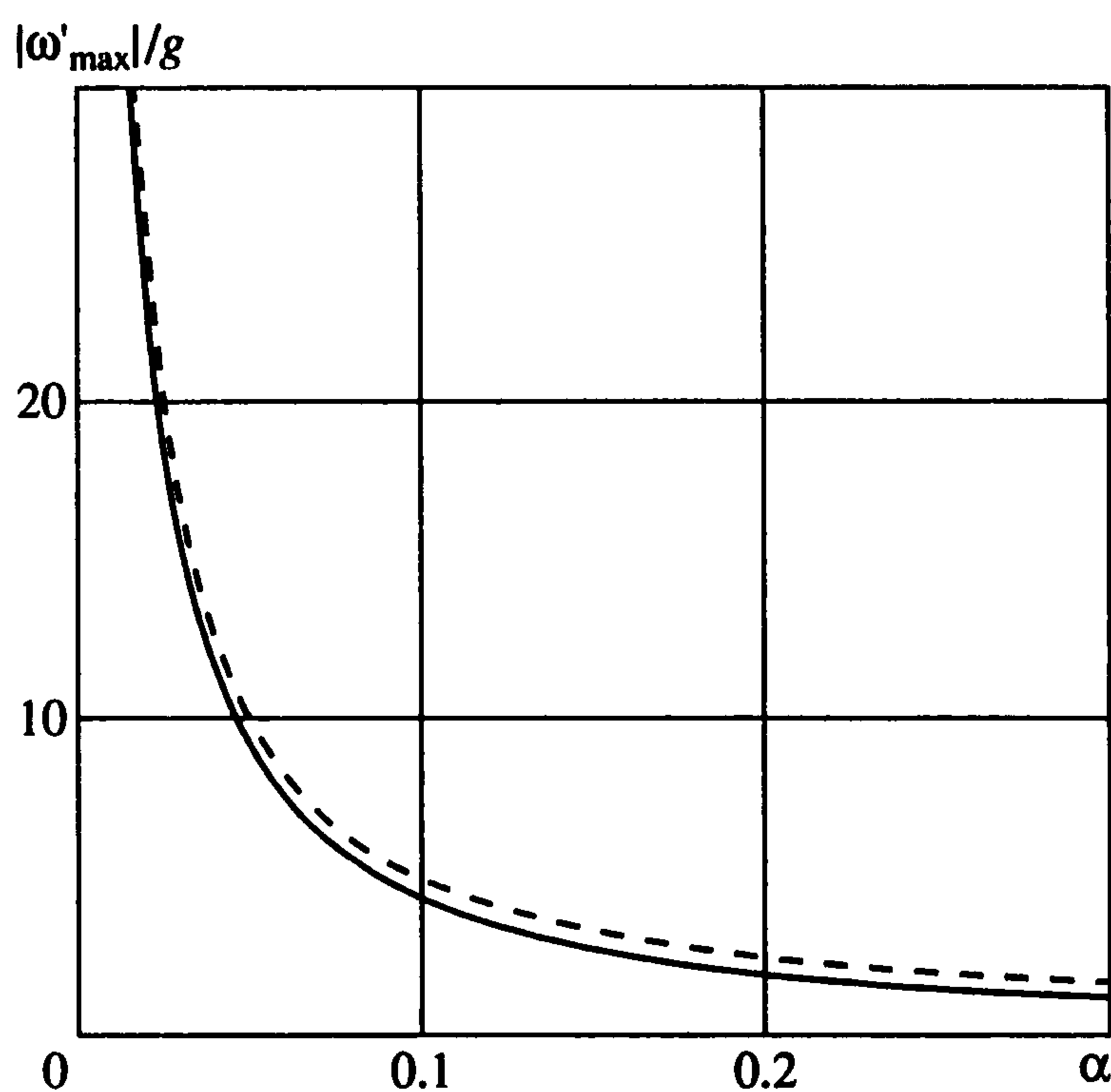
относительно $\tau = \tau(s)$, где $\tau(0) = 0$. В новых переменных вид функции $\tau(s)$ зависит от единственного параметра α , который характеризует влияние силы тяжести на движение тела. Размерное ускорение w' эллиптического параболоида при входе в воду дается формулой

$$\frac{w'}{g} = -\frac{\tau_{ss}(s)}{2\alpha\tau_s^3(s)} \quad (3.4)$$

Правая часть этого выражения зависит от параметра α и глубины проникания s . Соответственно максимальное ускорение проникающего тела $w'_{\max}$ зависит только



Фиг. 3



Фиг. 4

от α , что удобно при сопоставлении экспериментальных данных, полученных при разных условиях.

График зависимости отношения $|w'_{\max}|/g$ от α показан на фиг. 4 сплошной линией. Заметим, что

$$\frac{|w'_{\max}|}{g} \sim \frac{320}{243(20)^{1/3}} \alpha^{-1} \quad (\alpha \rightarrow 0) \quad (3.5)$$

Функция, стоящая в правой части асимптотической формулы (3.5), представлена на фиг. 4 штриховой линией. Формула (3.5) дает относительную ошибку менее 5% при $\alpha < 0.04$.

В осесимметричном случае $\varepsilon = 0$ и $q(0) = 8\sqrt{3}/5$. Расчеты по формуле (3.4) для условий экспериментов со свободно падающим на невозмущенную поверхность жидкости шаром [1], соответствующие $\alpha = 0.0396$ в принятых здесь обозначениях, дают $|w'_{\max}|/g \approx 11.65$. Экспериментальное значение этой же величины равно приблизительно 9.64.

Теоретические результаты, полученные в [1, 2], лучше согласуются с экспериментальными данными, однако применимы только к осесимметричным телам. В расчетах [1] предполагалось, что распределение потенциала скоростей по круговой области контакта верно описывается теорией Вагнера. Однако для вычисления силы сопротивления использовано полное уравнение Коши – Лагранжа, а не линеаризованное, как в настоящей работе. Такой подход применим и к задаче о входе в воду эллиптического параболоида. При этом уравнение движения тела будет намного сложнее, чем (3.3). Простая формула (3.5) может быть использована при планировании экспериментов для предварительной оценки перегрузок на проникающие в воду пространственные тела.

Автор благодарит В.В. Пухначева за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (000100839, 001596162) и Интеграционного гранта СО РАН № 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лотов А.Б.* Об ударе шара о поверхность воды // Учен. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 4. С. 22–30.
2. *Григолюк Э.И., Горшков А.Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (Удар и погружение). Л.: Судостроение, 1976. 199 с.
3. *Wagner H.* Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // ZAMM. 1932. V. 12. № 4. P. 193–215.
4. *Korobkin A.A., Pukhnachov V.V.* Initial stage of water impact // Ann. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 159–185.
5. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
6. *Karman T.* The impact of sea plane floats during landing // NASA. Techn. Notes. 1929. № 321. 8 p.
7. *Коробкин А.А.* Начальная асимптотика решения трехмерной задачи о входе затупленного тела в идеальную жидкость // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 4. С. 838–842.
8. *Бородич Ф.М.* Подобие в пространственной задаче проникания твердых тел в идеальную несжимаемую жидкость // ПМТФ. 1988. Т. 5. С. 127–132.
9. *Scolan Y.-M., Korobkin A.A.* Design of three-dimensional bodies subject to water impact // Proc. 15th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. Israel. 2000. P. 162–165.
10. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
11. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
12. *Howison S.D., Ockendon J.R., Wilson S.K.* Incompressible water-entry problems at small deadrise angles // J. Fluid Mech. 1991. V. 222. P. 215–230.
13. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
14. *Ferri A., Ness N., Kaplita T.T.* Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry // J. Aeronautical Sci. 1953. V. 20. № 8. P. 563–571.