

УДК 531.36:534.1

© 2002 г. В.Н. Пилипчук

### НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К НЕГЛАДКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЖЕСТКИМИ БАРЬЕРАМИ

Обсуждаются две различные реализации идеи негладких преобразований переменных для систем с жесткими барьерами (связями). Показано, что негладкое преобразование пространства и негладкое преобразование времени взаимно дополняют друг друга. Они также могут быть применены к одной и той же системе совместно, образуя композицию.

Для систем с абсолютно жесткими неударяющими связями был предложен [1, 2] и документирован в монографии [3] метод негладкого преобразования координат (далее ПП – преобразование пространства). С другой стороны, позже было показано, что для специального класса колебательных систем без каких-либо связей может быть введено негладкое преобразование времени (ПВ) в форме пилообразного синуса ([4], "осциллирующее время"). Поскольку пилообразный синус необратим на всем периоде, прямое введение пилообразного времени, как и любого другого периодического времени, требует соответствующей временной симметрии периодического процесса. Это ограничение было снято [5] путем специальной комплексификации координат. Отметим, что ПВ наследует абстрактную составляющую идеи преобразования переменных посредством негладких функций и во многих случаях оперирует теми же кусочно-линейными функциями, что и ПП. Кроме того, предыстория построения ПВ обусловлена попыткой адаптировать ПП для специального случая "ослабленных связей", именно сильно нелинейного осциллятора со степенной характеристикой, которая эквивалентна жестким неударяющим связям в предельном случае бесконечно большого показателя степени [6]. Тем не менее далее будет показано, что ПП и ПВ различны как по физическому смыслу и математической формулировке, так и по классам систем и динамическим режимов, для которых эти методы предназначены в первую очередь. В более подробных терминах:

1) ПП развертывает пространство и не затрагивает времени, в то время как ПВ свертывает время, генерируя специальные алгебраические структуры (гиперболические числа) в пространстве;

2) с точки зрения механики жесткие барьеры представляют цель применения ПП, создавая, с другой стороны, неблагоприятные ситуации для итерационных алгоритмов, часто следующих за ПВ;

3) ПП, главным образом, не зависит от динамических режимов, в то время как ПВ требует периодичности или по крайней мере осциллируемости процесса;

4) преобразованные согласно ПП и ПВ уравнения существенно различаются по форме, поскольку ПП есть сильно нелинейное преобразование пространства, тогда как ПВ генерирует линейное преобразование координат;

5) с теоретико-функциональной точки зрения, ПП действует на функцию (образ), в то время как ПВ преобразует аргумент (прообраз).

Тем не менее метод ПВ был применен [7, 8] к системе с жесткими связями после ее предварительной обработки. Возможно, в результате некоторого противоречия со вторым из перечисленных выше замечаний ПВ сопровождалось ссылкой на работы [1, 2], в то время как работа [5] квалифицирована как имеющая дело с "виброударными системами". (На самом деле, в заметке [5] "виброударные системы" не рассматривались, а в [1, 2] преобразование времени не вводилось.) Вероятное объяснение состоит в том, что в работах [7, 8] были рассмотрены только периодические режимы, когда действие барьеров можно описать сингулярными периодиче-

скими функциями, явно зависящими от времени. (Заметим, что похожий прием моделирования рассматривался также ранее [9] с более общей точки зрения, безотносительно к каким-либо преобразованиям переменных.) После такого предварительного этапа применение ПВ позволяет исключить сингулярные функции времени и сформулировать краевую задачу относительно новой временной переменной [10].

Основной результат данной работы сформулирован далее в разд. 3, где предлагается композиция двух преобразований ПВ  $\circ$  ПП, что по-существу иллюстрирует их взаимно-дополнительный характер. В разд. 1 и 2 приводится предварительная иллюстрация каждого из преобразований в отдельности для наиболее простых физических объектов.

**1. Преобразование пространства.** Рассмотрим линейный осциллятор между двумя абсолютно жесткими барьерами под действием внешней гармонической нагрузки. Представим приведенный (на единицу массы) лагранжиан и уравнение связей в виде (точка означает производную по времени)

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{\omega_0^2}{2} x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

где смысл параметров и переменных поясняется формой лагранжиана; барьеры предполагаются идеально упругими, так что коэффициент восстановления равен единице.

Согласно идее ПП, связи исключаются заменой координаты

$$x(t) \rightarrow l(t): \quad x = S(l) \quad (1.2)$$

где  $S$  – пилообразный кусочно-линейный синус с единичной амплитудой и периодом, равным четырем. В результате имеет место соотношение  $[dS(l)/dl]^2 = 1$  по меньшей мере для почти всех  $l$ , а неравенство в (1.1) выполняется автоматически. Подставляя выражение (1.2) в систему (1.1), получим преобразованную систему, в которой связи уже отсутствуют, но пространство конфигураций становится бесконечным:

$$L = \frac{1}{2} \dot{l}^2 - \frac{\omega_0^2}{2} S^2(l), \quad -\infty < l < \infty \quad (1.3)$$

Заметим, что для удобства дальнейших сопоставлений нормализация периода и обозначения изменены, по сравнению с оригинальными работами [1, 2]. Кроме этого, первоначальная версия преобразования была сформулирована в терминах ньютоновой механики, хотя преобразование лагранжиана было представлено также В.Ф. Журавлевым в одной из дискуссий. Последняя формулировка позволяет избежать введения так называемых "ударных членов" в уравнения движения. В самом деле, основная роль ПП как раз и состоит в том, чтобы корректно записать дифференциальное уравнение движения для системы со связями, т.е. уравнение, верное на всем временном интервале движения.

Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{l} + \omega_0^2 (dS(l)/dl) S(l) = 0 \quad (1.4)$$

Это сильно нелинейная система, характеристика которой имеет периодическую последовательность разрывов первого рода, порожденную особенностями производной  $dS(l)/dl$ . Такие особенности укладываются однако в рамках теории обобщенных функций, трактующей равенства как интегральные тождества. В самом деле, уравнение (1.4) следует из вариационного принципа

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L[l(t), \dot{l}(t)] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \ddot{l}(t) + \omega_0^2 \frac{dS(l)}{dl} S(l) \right] \delta l dt = 0$$

т.е. на промежуточном этапе вывода уравнение движения имеет форму интегрального тождества. При этом левая часть уравнения движения (1.4) рассматривается как сила, производящая нулевую работу на перемещениях  $\delta l$ . Суть такого обобщенного подхода

состоит в том, что сама сила не обязана быть равной нулю в каждой отдельно взятой точке  $t$ . Таким образом, обобщенная трактовка уравнений движения позволяет исключить из рассмотрения те моменты времени, в которых производная  $dS(l(t))/dl(t)$  не имеет определенного смысла.

**2. Преобразование времени.** С другой стороны, рассмотрим тот же пример (1.1), но снимем пока ограничение на координату  $x(t)$  и начнем с уравнения в ньютоновой форме

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.1)$$

Обратим внимание на отсутствие какой-либо негладкости как в уравнении, так и в его очевидном решении. Тем не менее негладкое (пилообразное) преобразование времени вполне применимо и записывается в форме

$$t \rightarrow \tau: \quad \tau = S(\omega t) \quad (2.2)$$

$$x = X(\tau) + Y(\tau)e, \quad e^2 = 1; \quad e = dS(\omega t)/d(\omega t) \quad (2.3)$$

где масштабный множитель  $\omega$  при старой временной переменной подлежит определению, а также введено обозначение для прямоугольного косинуса, выраженного через обобщенную производную пилообразного синуса. Если функция  $x(t)$  задана, то функции  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  известны ([5], замечание 1); в противном случае их следует найти из преобразованной задачи.

В ряде случаев, к которым относится и уравнение (2.1), справедливо однокомпонентное представление для решения, например следующее:

$$x = X(\tau) \quad (2.4)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (2.1) дает соотношение (штрих означает производную по  $\tau$ )

$$\omega^2 \left[ X'' + X' \frac{de(\omega t)}{d(\omega t)} \right] + \omega_0^2 X = 0 \quad (2.5)$$

и, в конечном счете, краевую задачу в новой временной переменной (ср. с результатом ПП (1.4))

$$\omega^2 X'' + \omega_0^2 X = 0 \quad (2.6)$$

$$X'(\pm 1) = 0 \quad (2.7)$$

где краевые условия служат для исключения периодического сингулярного члена в уравнении (2.5), содержащего производную

$$\frac{de(\omega t)}{d(\omega t)} = \frac{d^2 S(\omega t)}{d(\omega t)^2} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega t + 1 - 4k) - \delta(\omega t - 1 - 4k)]$$

Собственные значения задачи (2.6), (2.7) определяются соотношением

$$\omega = \frac{2\omega_0}{j\pi}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

и однопараметрическое семейство решений для гармонического осциллятора (2.1) приобретает вид

$$x = X(\tau) = A \sin\left(\frac{j\pi\tau}{2} + \varphi_j\right), \quad \varphi_j = \frac{\pi}{4}[1 + (-1)^j] \quad (2.9)$$

где  $A$  – произвольная амплитуда,  $\tau = S(\omega t)$  – пилообразное "осциллирующее время".

Эффект квантования параметра  $\omega$  в данном случае не имеет значения, поскольку для любого  $j$  имеет место следующее тождество по  $t$ :

$$\sin\left[\frac{j\pi}{2}S\left(\frac{2\omega_0 t}{j\pi}\right) + \varphi_j\right] = \sin(\omega_0 t + \varphi_j), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.10)$$

(Такое квантование, однако, может приобрести физический смысл при рассмотрении комбинационных резонансов в случае нелинейных вынужденных колебаний.)

Общее решение может быть получено либо путем введения постоянного фазового сдвига, отвечающего инвариантности уравнения относительно группы трансляций по исходному времени, или же путем использования общей формы представления для разыскиваемого решения (2.3). В последнем случае общее решение имеет вид

$$x = A \sin\left(\frac{j\pi\tau}{2} + \varphi_j\right) + B \cos\left(\frac{j\pi\tau}{2} - \varphi_j\right) e \quad (2.11)$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные. Последнее выражение поясняет типы временной симметрии  $X$ - и  $Y$ -компонент в общем представлении для периодической функции (2.3).

Выясним, может ли ПВ быть непосредственно применимо к системе со связями (1.1). Формально для этого следует просто добавить ограничение  $-1 \leq X(\tau) \leq 1$  к краевой задаче (2.6), (2.7), поскольку в данном случае пространственная координата вообще не участвует в преобразовании. Таким образом, ПВ применимо, однако (в отличие от ПП) связи остаются неустраненными.

**3. Композиция пространственного и временного преобразований.** Покажем теперь, что система, преобразованная согласно ПП, допускает дальнейшее преобразование по методу ПВ. Все существенные особенности соответствующей композиции могут быть вполне проиллюстрированы на нелинейном осцилляторе, помещенном между двумя идеально упругими и абсолютно жесткими барьерами и подверженном периодическому внешнему воздействию. Дифференциальное уравнение движения между барьерами запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + f(x) = F \sin(\Omega t + \alpha) \quad (3.1)$$

а условие связей представим, как и прежде, в форме

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (3.2)$$

На первом этапе сделаем в уравнении (3.1) замену (1.2). Согласно идее ПП, появляющийся при этом сингулярный член  $(d^2S(l)/dl^2)\dot{l}^2$  следует просто отбросить вместе с условием (3.2), поскольку только он в ускорении может быть обусловлен реакцией связей (ударами). После этого результат преобразования принимает вид

$$\ddot{l} + 2\zeta\dot{l} + f(S(l))dS(l)/dl = F \sin(\Omega t + \alpha)dS(l)/dl \quad (3.3)$$

где  $l(t)$  – новая координата системы ( $-\infty < l < \infty$ ).

Приступая ко второму этапу, отметим, что исходная версия ПВ (2.3) может быть реализована только на множестве периодических решений. Поэтому ПВ следует скорее рассматривать как преобразование динамических режимов, а не самой системы. Таким образом, предположим, что движение периодически и имеет базовую частоту  $\Omega$ , т.е. такую же, как и внешнее воздействие.

Введем пилообразное время согласно соотношениям

$$\tau = S(\omega t), \quad l = X(\tau) + Y(\tau)e, \quad \omega = (2/\pi)\Omega \quad (3.4)$$

(появление коэффициента  $2/\pi$  обусловлено различной нормировкой периода пилообразного и обычного синуса).

Функция внешней нагрузки должна быть выражена также через новый аргумент следующим образом:

$$F \sin(\Omega t + \alpha) = F \cos \alpha \sin \frac{\pi \tau}{2} + F \sin \alpha \cos \frac{\pi \tau}{2} e \quad (3.5)$$

Последнее выражение может быть получено либо путем подходящей модификации решения (2.11), либо применением соответствующего замечания в общей форме [5], касающегося любой периодической функции. Далее, подставляя выражения (3.4) и (3.5) в уравнение (3.3) и следуя в схеме ПВ, получим

$$\begin{aligned} \omega^2 X'' + 2\zeta \omega Y' + R_f(X, Y) + [\omega^2 Y'' + 2\zeta \omega X' + I_f(X, Y)]e + \\ + \omega^2 X' \frac{de(\omega t)}{d(\omega t)} = R_F(X, Y, \tau) + I_F(X, Y, \tau)e \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} R_f(X, Y) \\ I_f(X, Y) \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{dS(X+Y)}{d(X+Y)} f[S(X+Y)] \pm \frac{dS(X-Y)}{d(X-Y)} f[S(X-Y)] \right\} \\ \left. \begin{aligned} R_F(X, Y, \tau) \\ I_F(X, Y, \tau) \end{aligned} \right\} &= \frac{F}{2} \left\{ \frac{dS(X+Y)}{d(X+Y)} \sin\left(\frac{\pi \tau}{2} + \alpha\right) \pm \frac{dS(X-Y)}{d(X-Y)} \sin\left(\frac{\pi \tau}{2} - \alpha\right) \right\} \end{aligned}$$

и необходимое условие непрерывности для  $l(t)$  имеет вид

$$Y(\pm 1) = 0 \quad (3.7)$$

При выводе уравнения (3.6) существенно использованы алгебраические свойства выражений, обеспечиваемые соотношением  $e^2 = 1$ . Подчеркнутый сингулярный член подлежит исключению за счет необходимого условия дифференцируемости  $l(t)$ , имеющего форму (2.7).

Заметим, что если бы внешняя нагрузка содержала периодическую серию импульсов, выраженную через  $de(\omega t)/d(\omega t)$ , то подчеркнутый в уравнении (3.6) член позволил бы ее исключить; в последнем случае краевые условия (2.7) были бы неоднородными.

Далее, оставшиеся  $E$ - и  $I$ -части уравнения (3.6) дают систему

$$\begin{aligned} \omega^2 X'' + 2\zeta \omega Y' + R_f(X, Y) &= R_F(X, Y, \tau) \\ \omega^2 Y'' + 2\zeta \omega X' + I_f(X, Y) &= I_F(X, Y, \tau) \end{aligned} \quad (3.8)$$

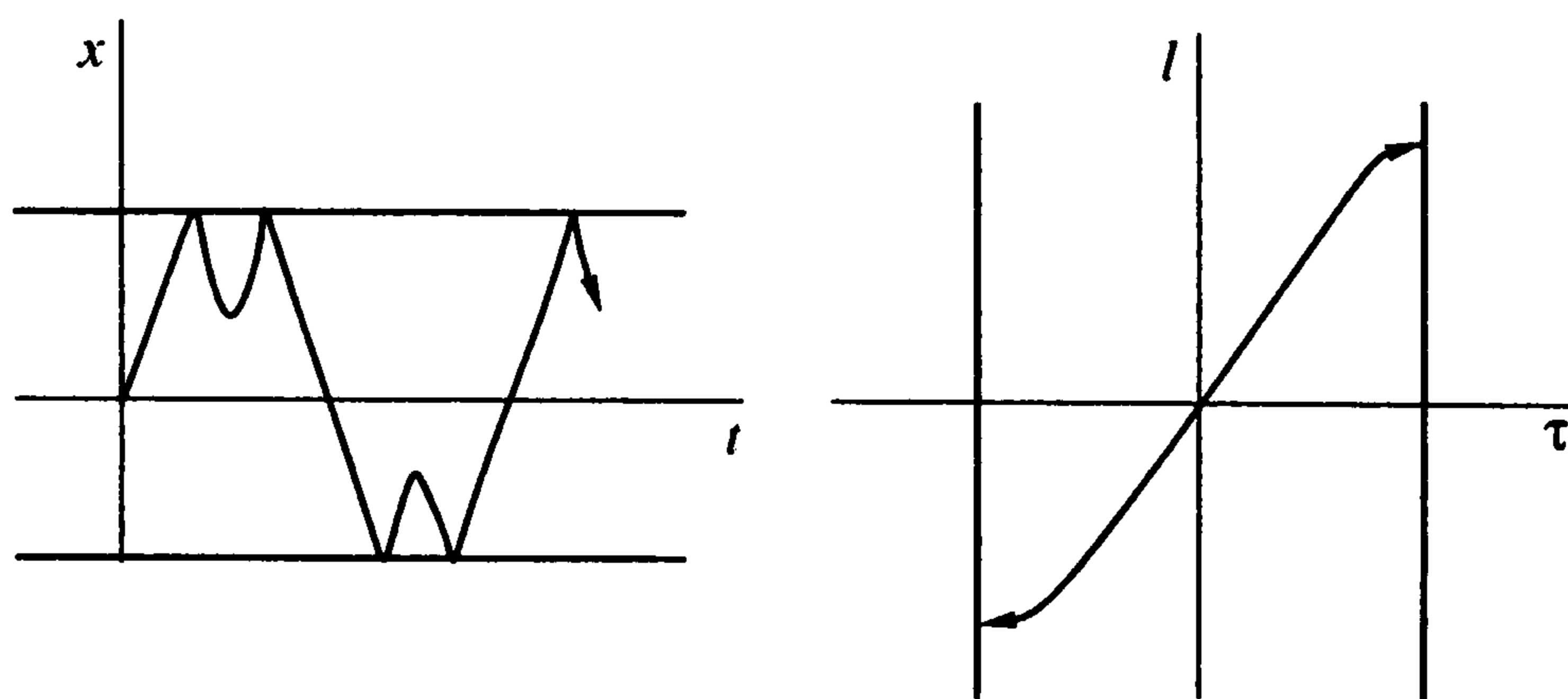
которая вместе с краевыми условиями (3.7) и (2.7) и представляет конечный результат композиции преобразований ПВ  $\circ$  ПП. На фиг. 1 дана соответствующая физико-геометрическая трактовка этой суперпозиции, где слева показаны исходные пространственно-временные координаты, а справа – результат последовательного применения двух преобразований.

Если решение этой краевой задачи получено, то в исходных переменных уравнения (3.1) решение выражается так:

$$x(t) = S[X(S(\omega t)) + Y(S(\omega t))dS(\omega t)/d(\omega t)] \quad (3.9)$$

В частном случае нулевого демпфирования ( $\zeta = 0$ ) и нечетной характеристики осциллятора ( $f(-x) = -f(x)$ ) краевая задача может быть представлена в существенно более простом виде

$$\omega^2 X'' + \frac{dS(X)}{dX} f[S(X)] = F \frac{dS(X)}{dX} \sin \frac{\pi \tau}{2}, \quad Y \equiv 0; \quad X'(1) = 0, \quad X(-\tau) = -X(\tau) \quad (3.10)$$



Фиг. 1

если  $\alpha = 0$ , либо в виде

$$\omega^2 Y'' + \frac{dS(Y)}{dY} f[S(Y)] = F \frac{dS(Y)}{dY} \cos \frac{\pi \tau}{2}, \quad X \equiv 0; \quad Y(1) = 0, \quad Y(-\tau) = Y(\tau) \quad (3.11)$$

если  $\alpha = \pi/2$ .

Следует обратить внимание на то, что суперпозиция решений, соответствующих этим частным случаям, по формуле (3.9) не верна в силу нелинейности задачи.

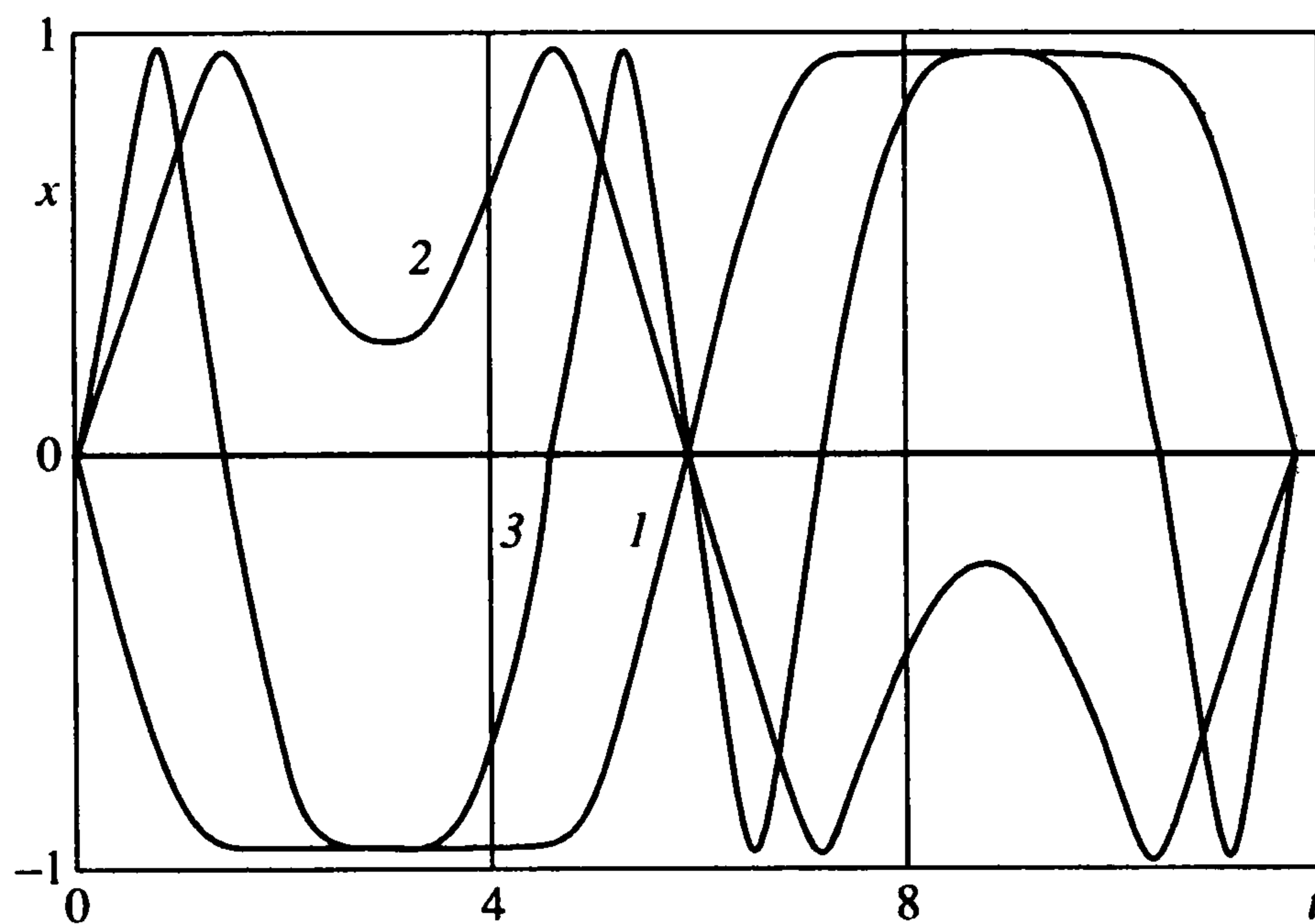
Проблема существования и единственности решений для полученной выше нелинейной краевой задачи должна быть адресована к соответствующему разделу математической теории. Примеры же конструктивных итерационных процедур для явных аналитических решений приводятся в цитируемых здесь публикациях. Другой из возможных следующих за преобразованием этапов состоит в записи задачи в интегральной форме и применении стандартных численных кодов. Наконец, численные решения могут быть получены непосредственно применением метода пристрелки. Заметим при этом, что преобразованная задача формулируется на отрезке  $-1 \leq \tau \leq 1$ , что соответствует половине периода в терминах исходного времени. (В общем случае это достигается, к сожалению, за счет увеличения числа уравнений вдвое.)

В зависимости от выбора схемы вычислений может возникнуть необходимость сглаживания особенностей пилообразного синуса. Это может быть сделано, например, путем рассмотрения гладкого семейства функций

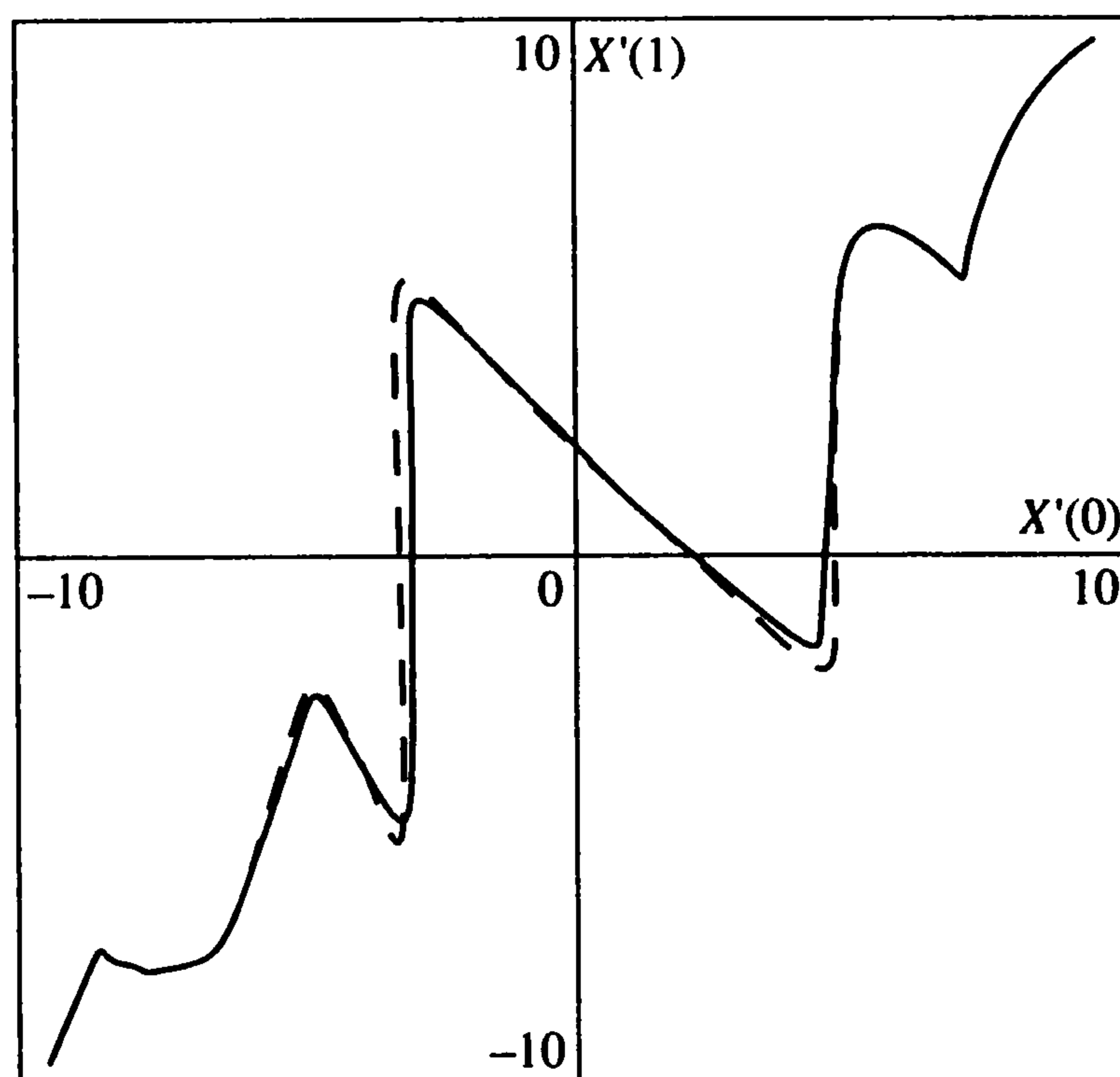
$$S_\eta(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\eta \sin \frac{\pi t}{2}\right), \quad 0 < \eta \leq 1 \quad (3.12)$$

При  $\eta = 1$  имеем пилообразный синус:  $S_1(t) = S(t)$ . Если же значение параметра  $\eta$  слегка меньше единицы, то функция  $S_\eta(t)$ , оставаясь в поточечном смысле близкой к пилообразной, становится гладкой. С физической точки зрения, подобный прием в некотором смысле может быть истолкован как ослабление жестких связей. Иными словами, барьеры уже нельзя считать абсолютно жесткими, что на самом деле более согласуется с действительностью.

В качестве примера рассмотрена краевая задача (3.10) для характеристики  $f(x) = x$  и следующих значений параметров:  $F = 1.2$ ,  $\Omega = 0.6$ ,  $\eta = 0.99$ . На фиг. 2 показаны три решения (кривые 1, 2 и 3), соответствующие трем различным значениям производной  $X'(0) = -3.09, 2.31$  и  $4.75$ , которые обеспечивают выполнение краевого условия  $X'(1) = 0$ ; это отвечает идее метода пристрелки. На фиг. 3 эти значения показаны как точки пересечений кривых с горизонтальной координатной осью. Соответствующие значения начальной скорости осциллятора могут быть вычислены так:  $\dot{x}(0) = (2\Omega/\pi)X'(0)$ . Для сравнения эти кривые показаны для значений  $\eta = 0.99$  (сплошная линия) и  $\eta = 0.9999$  (штриховая линия).



Фиг. 2



Фиг. 3

В заключение заметим, что негладкие преобразования пространственной и временной переменной, вообще говоря, не коммутативны, т.е. результат преобразований  $ПВ \circ ПП$  и  $ПП \circ ПВ$  различен по форме.

Автор благодарит И.В. Андрианова за предложение построить композицию обсуждаемых здесь преобразований, с тем чтобы проиллюстрировать их различие.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В.Ф. Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 30–34.
2. Журавлев В.Ф. Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 24–28.

3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
4. Пилипчук В.Н. К расчету сильно нелинейных систем, близких к виброударным // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 744–751.
5. Пилипчук В.Н. Преобразование колебательных систем при помощи пары негладких периодических функций // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 4. С. 37–40.
6. Веденова Е.Г., Маневич Л.И., Пилипчук В.Н. Нормальные колебания в струне с сосредоточенными массами на нелинейно-упругих опорах // ПММ. 1985. Т. 49. № 2. С. 203–211.
7. Manevitch L.I., Azeez M.A.F., Vakakis A.F. Exact solutions for a discrete system undergoing free vibroimpact oscillation // Dynamics of Vibroimpact Systems / Ed. V.I. Babitsky. EUROMECH Colloq. 386 Loughborough, England; B.: Springer, 1999.
8. Азиз М.А.Ф., Вакакис А.Ф., Маневич Л.И. Точные решения задачи о виброударных колебаниях дискретной системы с двумя степенями свободы // ПММ. 1994. Т. 63. Вып. 4. С. 549–553.
9. Zevin A.A. Localization of periodic oscillations in vibroimpact systems // XXXV Symposium "Modeling in Mechanics". Politechnika Slaska. Gliwice (Poland). 1996. № 2. P. 261–266.
10. Пилипчук В.Н. К расчету механических систем с импульсным возбуждением // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 223–232.

Детройт (шт. Мичиган, США)  
e-mail: pylyp@mel.eng.wayne.edu

Поступила в редакцию  
2.III.2000