

УДК 531.391:62–50

© 2002 г.

Ф.Л. Черноусько

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается поступательное прямолинейное движение системы двух твердых тел по горизонтальной плоскости. Между телами и плоскостью действуют силы сухого трения, а управление осуществляется посредством внутренних сил взаимодействия между телами. Построено периодическое движение, при котором система перемещается вдоль прямой. Найдены оптимальные параметры системы и закона управления, соответствующие максимальной средней скорости перемещения системы как целого.

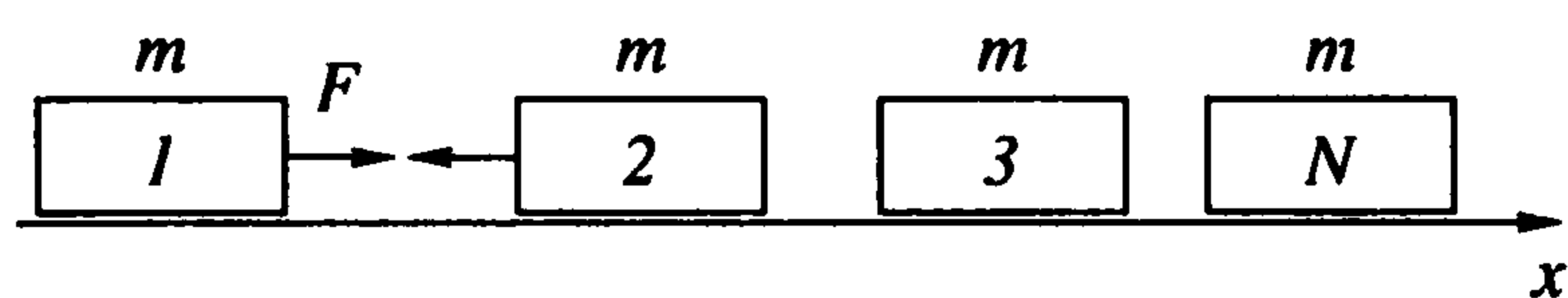
1. Введение. Прежде чем переходить к формальной постановке задачи, обсудим возможности перемещения системы за счет внутренних сил при наличии сухого трения.

Рассмотрим систему из N одинаковых твердых тел массы m , лежащих на горизонтальной плоскости (фиг. 1). Между телами и плоскостью действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона; коэффициент трения тел о плоскость обозначим через k . Соседние тела могут взаимодействовать друг с другом посредством внутренних сил F . При определенных условиях данная система может перемещаться вдоль прямой x .

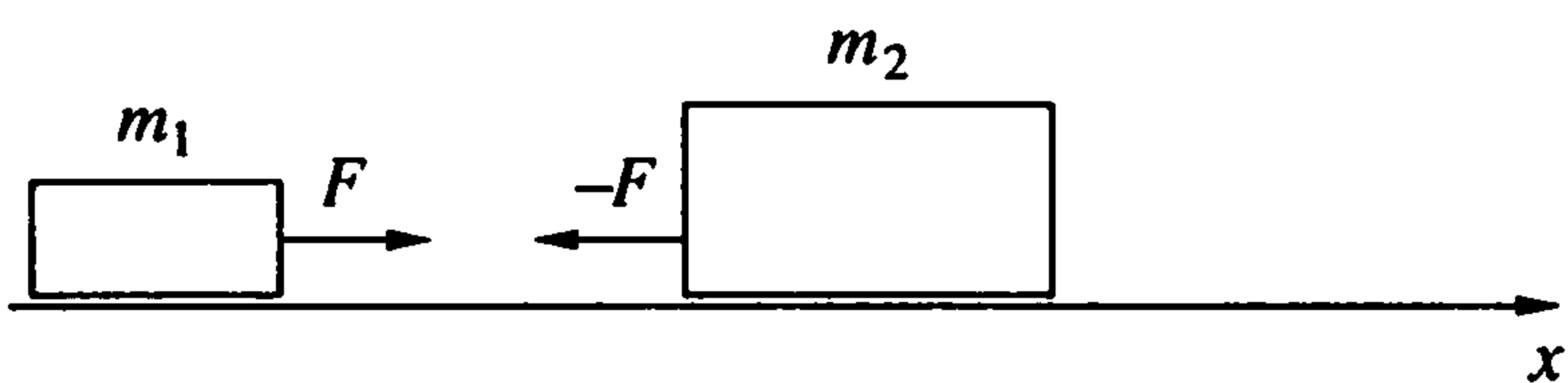
Опишем один простейший способ перемещения. В начальный момент все массы покоятся. Сначала масса 1 перемещается вдоль оси x на некоторое расстояние Δx , меньшее, чем расстояние между массами 1 и 2, и останавливается. При этом все остальные массы покоятся. Движение массы 1 состоит из фазы разгона, в которой сила F взаимодействия между массами 1 и 2 превосходит силу трения ($F > mgk$), и фазы торможения, в которой $F < mgk$. Здесь g – ускорение силы тяжести. Остальные массы должны при этом взаимодействовать друг с другом и останутся в состоянии покоя при условии, что в течение всего движения массы 1 выполнено неравенство $|F| \leq (N-1)mgk$. Далее масса 2 перемещается на расстояние Δx точно таким же образом, как прежде масса 1, а все остальные массы покоятся. При этом сумма сил, с которыми соседние покоящиеся массы 1 и 3 действуют на массу 2, должна быть больше mgk в фазе разгона и меньше mgk в фазе торможения. Продолжая описанный процесс поочередного перемещения масс, закончим его перемещением массы N на расстояние Δx . В результате, вся система переместится на расстояние Δx , после чего процесс можно повторить любое число раз. Описанное периодическое движение возможно, если сила взаимодействия двух соседних масс может изменяться в пределах

$$mgk < |F| \leq (N-1)mgk \quad (1.1)$$

Отметим, что волновые способы перемещения тел при наличии сил сухого трения рассматривались в [1, 2]. Из неравенств (1.1) следует, что данный способ перемещения применим лишь при $N \geq 3$. Поэтому представляет интерес исследование возможностей перемещения простейшей двухмассовой системы.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему из двух взаимодействующих твердых тел массы m_1 и m_2 , которые могут перемещаться вдоль оси x по горизонтальной плоскости (фиг. 2). Между телами и плоскостью действуют силы сухого трения, подчиняющиеся закону Кулона. Коэффициенты трения для масс m_1 и m_2 равны соответственно k_1 и k_2 . Силу, с которой масса m_2 действует на массу m_1 , обозначим через F ; тогда масса m_1 действует на массу m_2 с силой $-F$.

Предполагаем, что расстояние L между массами может изменяться в пределах $L_0 - \eta \leq L \leq L_0$, где L_0 – начальное расстояние, $\eta \leq L_0$ – величина, на которую допустимо сближение масс по сравнению с начальным состоянием, т.е. ход или размах допустимого относительного движения.

Обозначим через x_i смещение массы m_i из ее исходного положения, а через v_i – ее скорость, $i = 1, 2$. Расстояние между массами равно $L_0 + x_2 - x_1$. Имеем

$$\dot{x}_i = v_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Уравнения движения масс m_1, m_2 с учетом закона Кулона запишем в виде

$$\begin{aligned} m_1 \dot{v}_1 &= F - m_1 g k_1 \operatorname{sign} v_1 \quad \text{при } v_1 \neq 0, \quad |F| \leq m_1 g k_1 \quad \text{при } v_1 = 0 \\ m_2 \dot{v}_2 &= -F - m_2 g k_2 \operatorname{sign} v_2 \quad \text{при } v_2 \neq 0, \quad |F| \leq m_2 g k_2 \quad \text{при } v_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ обе массы покоятся и находятся на максимально допустимом расстоянии L_0 друг от друга.

Требуется построить кусочно-постоянный закон изменения управляющей силы $F(t)$, при котором обе массы за время T перемещаются на одно и то же расстояние ξ и в конце движения снова приходят в состояние покоя. При этом расстояние между массами должно все время лежать в заданных пределах, что можно выразить неравенством

$$0 \leq x_1(t) - x_2(t) \leq \eta, \quad t \in [0, T] \quad (2.3)$$

где $\eta > 0$ – заданная постоянная. Искомое движение найдем в виде последовательности следующих четырех этапов.

1. Масса m_1 движется ускоренно вперед, масса m_2 покоится.
2. Масса m_1 движется замедленно вперед, масса m_2 движется ускоренно вперед.
3. Масса m_1 движется ускоренно назад, масса m_2 движется ускоренно вперед.
4. Масса m_1 движется замедленно назад, масса m_2 движется замедленно вперед.

Поясним смысл введенных этапов. Будем рассматривать массу m_2 как основную, а m_1 – как меньшую, вспомогательную ($m_1 < m_2$). Так как в начальный момент массы находятся на наибольшем допустимом расстоянии друг от друга, то на первом этапе они сближаются, но так, чтобы не вызвать движения массы m_2 назад. Основное продвижение вперед массы m_2 происходит на втором и третьем этапах за счет сильного отталкивания масс. На четвертом этапе массы тормозятся так, чтобы одновременно остановиться на расстоянии друг от друга, равном исходному. Заметим, что основная масса m_2 в отличие от вспомогательной нигде не перемещается назад. Поэтому данная схема движения представляется рациональной. В дальнейшем считаем выполненным неравенство $m_1 < m_2$.

Обозначим через τ_i длительности этапов, а через F_i постоянные значения управляющей силы на этих этапах, $i = 1, 2, 3, 4$. Различие между этапами 2 и 3 состоит лишь в изменении знака скорости (но не ускорения) одной массы m_1 . Будем поэтому для упрощения полагать, что управляющая сила на этих этапах сохраняется неизменной: $F_2 = F_3$. Для выполнения отмеченных выше свойств движений необходимо, чтобы постоянные F_i удовлетворяли неравенствам

$$m_1 g k_1 < F_1 < m_2 g k_2, \quad F_2 < -m_2 g k_2, \quad F_4 > -m_1 g k_1 \quad (2.4)$$

Чтобы искомое движение удовлетворяло всем наложенным выше условиям, нужно, чтобы введенные параметры были подчинены ряду соотношений. Проведем расчет всех этапов движения и получим эти соотношения.

3. Расчет движения. Проинтегрируем уравнения (2.1), (2.2) последовательно на всех этапах движения, учитывая неравенства (2.4) и удовлетворяя условиям непрерывности координат x_1, x_2 и скоростей v_1, v_2 на границах этапов. В момент $t = 0$ имеем начальные условия

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad v_1(0) = v_2(0) = 0 \quad (3.1)$$

Для первого этапа получим, с учетом условий (3.1),

$$\begin{aligned} v_1(t) &= (F_1 m_1^{-1} - g k_1) t, \quad x_1(t) = (F_1 m_1^{-1} - g k_1) t^2 / 2 \\ v_2(t) &= 0, \quad x_2(t) = 0, \quad t \in [0, \tau_1] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для второго этапа имеем

$$\begin{aligned} v_1(t) &= (F_2 m_1^{-1} - g k_1)(t - \tau_1) + (F_1 m_1^{-1} - g k_1) \tau_1 \\ x_1(t) &= (F_2 m_1^{-1} - g k_1)(t - \tau_1)^2 / 2 + (F_1 m_1^{-1} - g k_1) \tau_1 (t - \tau_1) + (F_1 m_1^{-1} - g k_1) \tau_1^2 / 2 \\ v_2(t) &= -(F_2 m_2^{-1} + g k_2)(t - \tau_1) \\ x_2(t) &= -(F_2 m_2^{-1} + g k_2)(t - \tau_1)^2 / 2, \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Так как в конце второго этапа скорость v_1 должна обращаться в нуль, имеем условие

$$v_1(\tau_1 + \tau_2) = (F_2 m_1^{-1} - g k_1) \tau_2 + (F_1 m_1^{-1} - g k_1) \tau_1 = 0 \quad (3.4)$$

Интегрируя уравнения (2.1), (2.2) на третьем этапе и удовлетворяя, помимо условий непрерывности координат и скоростей, также условию (3.4), получим

$$\begin{aligned} v_1(t) &= (F_2 m_1^{-1} + g k_1)(t - \tau_1 - \tau_2) \\ x_1(t) &= (F_2 m_1^{-1} + g k_1)(t - \tau_1 - \tau_2)^2 / 2 + (F_2 m_1^{-1} - g k_1) \tau_2^2 / 2 + (F_1 m_1^{-1} - g k_1) \tau_1 (\tau_2 + \tau_1 / 2) \\ v_2(t) &= -(F_2 m_2^{-1} + g k_2)(t - \tau_1) \\ x_2(t) &= -(F_2 m_2^{-1} + g k_2)(t - \tau_1)^2 / 2, \quad t \in [\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Наконец, для четвертого этапа имеем

$$\begin{aligned} v_1(t) &= (F_4 m_1^{-1} + g k_1)(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + (F_2 m_1^{-1} + g k_1) \tau_3 \\ x_1(t) &= (F_4 m_1^{-1} + g k_1)(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)^2 / 2 + (F_2 m_1^{-1} + g k_1) \tau_3 (t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \\ &+ (F_2 m_1^{-1} + g k_1) \tau_3^2 / 2 + (F_2 m_1^{-1} - g k_1) \tau_2^2 / 2 + (F_1 m_1^{-1} - g k_1) \tau_1 (\tau_2 + \tau_1 / 2) \\ v_2(t) &= -(F_4 m_2^{-1} + g k_2)(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) - (F_2 m_2^{-1} + g k_2)(\tau_2 + \tau_3) \\ x_2(t) &= -(F_4 m_2^{-1} + g k_2)(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)^2 / 2 - (F_2 m_2^{-1} + g k_2)(\tau_2 + \tau_3)^2 / 2 - \\ &- (F_2 m_2^{-1} + g k_2)(\tau_2 + \tau_3)(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3), \quad t \in [\tau_1 + \tau_2 + \tau_3, T] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Длительность всего движения T выражается в виде

$$T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \quad (3.7)$$

В конце движения скорости обоих тел должны равняться нулю, а их смещения должны быть равны ξ :

$$v_1(T) = v_2(T) = 0, \quad x_1(T) = x_2(T) = \xi \quad (3.8)$$

Формулы (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) дают полное описание всего движения. Введенные параметры F_1, F_2, F_4 и τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) должны удовлетворять условиям (3.4), (3.7) и (3.8).

Для упрощения дальнейших выкладок введем безразмерные параметры

$$F_1 = m_1 g k_1 f_1, \quad F_2 = -m_1 g k_1 f, \quad F_4 = m_1 g k_1 f_4 \quad (3.9)$$

$$v = m_2 k_2 (m_1 k_1)^{-1}, \quad \mu = m_1 / m_2 < 1$$

В терминах параметров f_1, f_2, f_4, v неравенства (2.4) примут вид

$$1 < f_1 < v, \quad f > v, \quad f_4 > -1 \quad (3.10)$$

Условие (3.4) после замены (3.9) запишется в виде

$$(f_1 - 1)\tau_1 - (f + 1)\tau_2 = 0 \quad (3.11)$$

Подставим решения (3.6) для v_1 и v_2 в первые два условия (3.8) и упростим их, используя равенства (3.7) и (3.9). Получим

$$\begin{aligned} (f_4 + 1)\tau_4 - (f - 1)\tau_3 &= 0 \\ -(f_4 + v)\tau_4 + (f - v)(\tau_2 + \tau_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из трех линейных уравнений (3.11) и (3.12) выразим длительности всех этапов через τ_1

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{f_1 - 1}{f + 1} \tau_1, \quad \tau_3 = \frac{(f - v)(f_1 - 1)(f_4 + 1)}{(f + 1)(f + f_4)(v - 1)} \tau_1 \\ \tau_4 &= \frac{(f - 1)(f - v)(f_1 - 1)}{(f + 1)(f + f_4)(v - 1)} \tau_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя соотношения (3.13) в (3.7), выразим τ_1 через T

$$\tau_1 = \frac{(f + 1)(v - 1)T}{f(f_1 - 1) + f(v - 1) + v - f_1} \quad (3.14)$$

Заметим, что числители и знаменатели всех формул (3.13) и (3.14) положительны в силу неравенств (3.10).

Теперь подставим решения (3.6) для x_1 и x_2 в последние два условия (3.8). После упрощений с использованием соотношений (3.7), (3.9) и (3.13) получим

$$\begin{aligned} \xi &= A(f_1 - 1)[(f + f_4)(f + f_1)(f + 1)(v - 1)^2 - (f_4 + 1)(f_1 - 1)(f - 1)(f - v)^2] \\ \xi &= A\mu(f_4 + v)(f_1 - 1)^2(f - 1)^2(f - v) \\ A &= (gk_1\tau_1^2 / 2)(f + f_4)^{-1}(f + 1)^{-2}(v - 1)^{-2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Рассматриваемое движение должно удовлетворять еще условию (2.3). Из описания этапов движения 1–4 в разд. 2 следует, что массы m_1 и m_2 на этапе 1 сближаются,

а на этапах 3 и 4 удаляются друг от друга. Следовательно, наибольшее сближение масс происходит на этапе 2. Найдем минимальное расстояние между массами. Так как расстояние между массами равно $L_0 + x_2 - x_1$, то искомый минимум, т.е. максимум разности $x_1 - x_2$, достигается при условии $v_1 = v_2$, в которое нужно подставить выражения для v_1 и v_2 из решения (3.3) для этапа 2. Отсюда найдем единственный момент времени t_1 , при котором достигается сближение на минимальное расстояние

$$t_1 = \tau_1 + \theta, \quad \theta = \frac{(f_1 - 1)\tau_1}{f + 1 + \mu(f - v)} \quad (3.16)$$

Подставим равенства (3.16) в формулы для x_1 и x_2 из (3.3) и приравняем максимальную разность $x_1(t_1) - x_2(t_1)$ заданной величине η из условия (2.3). Получим

$$\eta = \frac{gk_1\tau_1^2}{2} \frac{(f_1 - 1)(f_1 + f + \mu f - \mu v)}{f + 1 + \mu(f - v)} \quad (3.17)$$

Полученные формулы позволяют решать различные варианты задач о движении двухмассовой системы. Рассмотрим некоторые из них.

1°. Пусть заданы параметры системы (массы m_1, m_2 и коэффициенты k_1, k_2), величины полного смещения ξ и допустимый размах относительного движения η , а также полная длительность цикла движения T . Требуется найти остальные характеристики движения f, f_1, f_4 и τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Уравнения (3.15), (3.17), в которые нужно подставить выражение для τ_1 из (3.14), образуют систему трех алгебраических уравнений для трех неизвестных f, f_1 и f_4 . Эта система довольно громоздка и зависит от ряда параметров, и ее решение должно удовлетворять неравенствам (3.10). Единственное упрощение состоит в том, что любое из уравнений (3.15) линейно относительно f_4 , так что система сводится к системе двух алгебраических уравнений для f и f_1 . Получив искомое решение каким-либо численным методом, можно затем определить длительности этапов τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) по формулам (3.13), (3.14).

2°. Другой вариант постановки задачи предполагает, что помимо параметров системы m_1, m_2, k_1, k_2 заданы параметры первого этапа движения τ_1 и f_1 , а также величина η . Требуется найти остальные параметры движения ($f, f_4, \tau_2, \tau_3, \tau_4, T, \xi$). Эта задача решается просто: из линейного относительно f уравнения (3.17) находим f , затем, исключая ξ из уравнений (3.15), получим линейное уравнение для f_4 . Определим f_4 , а затем и ξ . Длительности временных интервалов $\tau_2, \tau_3, \tau_4, T$ находим из соотношений (3.13), (3.14). В этом случае все искомые величины определяются однозначно в явном виде. Необходимо лишь проверить неравенства (3.10).

3°. Начальные и граничные условия (3.1), (3.8) показывают, что построенное движение можно повторять неограниченное число раз. При этом управляющая сила и скорость движения будут изменяться периодически с периодом T , а смещения обоих тел будут получать равные приращения ξ за цикл движения. Поэтому естественно поставить вопрос о максимизации средней скорости перемещения всей системы, равной

$$v = \xi/T \quad (3.18)$$

Эта задача исследуется ниже.

4. Оптимизация. Сначала зафиксируем все параметры системы (m_1, m_2, k_1, k_2) и величину допустимого размаха относительного движения η . Будем искать параметры ξ, T, f, f_1, f_4 и τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), при которых реализуется максимальная средняя скорость движения.

Эту задачу решим при одном упрощающем предположении: величина силы F_2 на втором и третьем этапах неограниченно велика. Это допущение довольно естественно: на этих этапах происходит основное перемещение массы m_2 , и на величину $-F_2$ толкающей силы нет ограничения сверху (см. (2.4)). В этом случае движение на этапах 2 и 3 сводится к импульсу, величина которого конечна.

Согласно соотношениям (3.9), (3.13), имеем

$$f \rightarrow \infty, \quad \tau_2 \rightarrow 0, \quad \tau_3 \rightarrow 0, \quad f(\tau_2 + \tau_3) \rightarrow \frac{(f_1 - 1)(f_4 + v)}{v - 1} \tau_1 = q \quad (4.1)$$

Величина q представляет собой, с точностью до множителя $m_1 g k_1$, величину импульса, которыми обмениваются массы m_1 и m_2 на втором и третьем этапах движения.

Из соотношений (3.13) и (3.14) при условиях (4.1) имеем

$$\tau_1 = \frac{(v - 1)T}{f_1 + v - 2}, \quad \tau_4 = \frac{(f_1 - 1)T}{f_1 + v - 2} \quad (4.2)$$

Соотношения (3.15) и (3.16) также упрощаются при $f \rightarrow \infty$ и дают

$$\xi = \frac{g k_1 \tau_1^2 (f_1 - 1) [(v - 1)^2 - (f_4 + 1)(f_1 - 1)]}{2(v - 1)^2} \quad (4.3)$$

$$\xi = \frac{g k_1 \tau_1^2 \mu (f_4 + v)(f_1 - 1)^2}{2(v - 1)^2}, \quad \eta = \frac{g k_1 \tau_1^2 (f_1 - 1)}{2}$$

Исключая ξ из первых двух уравнений (4.3), найдем

$$f_4 = \frac{(v - 1)^2 - (f_1 - 1)(1 + \mu v)}{(f_1 - 1)(1 + \mu)} \quad (4.4)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если выполнены неравенства $\mu < 1$ и $1 < f_1 < v$ из (3.9), (3.10), то для f_4 из (4.4) выполнено условие $f_4 > -1$ из (3.10). Подставляя f_4 из (4.4) во второе равенство (4.3), будем иметь

$$\xi = \frac{g k_1 \tau_1^2 \mu (f_1 - 1)(f_1 + v - 2)}{2(v - 1)(1 + \mu)} \quad (4.5)$$

В выражение (3.18) для средней скорости v подставим ξ из (4.5) и T из первого равенства (4.2). Получим

$$v = \frac{g k_1 \tau_1 \mu (f_1 - 1)}{2(1 + \mu)} \quad (4.6)$$

Подставляя еще в (4.6) величину τ_1 , выраженную из последнего соотношения (4.3), будем иметь окончательно

$$v = \left[\frac{g k_1 \eta (f_1 - 1)}{2} \right]^{1/2} \frac{\mu}{1 + \mu} \quad (4.7)$$

Из выражения (4.7) следует, что скорость v монотонно возрастает с ростом f_1 . Максимум v достигается на верхнем ограничении (3.10) для f_1 , т.е. в пределе при $f_1 \rightarrow v$. Используя еще формулы (4.1) – (4.4), (4.7), получим оптимальные значения всех параметров

$$\begin{aligned} f &\rightarrow \infty, \quad f_1 \rightarrow v, \quad f_4 = \frac{v - 2 - \mu v}{1 + \mu} \\ \tau_1 &= \tau_4 = T/2, \quad T = 2 \left[\frac{2\eta}{g k_1 (v - 1)} \right]^{1/2} \\ \xi &= \frac{2\eta\mu}{1 + \mu}, \quad v_{\max} = \left[\frac{g k_1 \eta (v - 1)}{2} \right]^{1/2} \frac{\mu}{1 + \mu} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Строго говоря, искомый максимум скорости $v_{\max}$ здесь недостижим, но может быть приближен сколь угодно точно при $f_1 \rightarrow v$.

Используя соотношения (3.9), преобразуем формулу (4.8) для $v_{\max}$ к размерным переменным

$$v_{\max} = [g\eta m_1(m_2 k_2 - m_1 k_1)/2]^{1/2} (m_1 + m_2)^{-1} \quad (4.9)$$

Исследуем влияние коэффициентов трения и соотношения масс на максимальную скорость перемещения. Если коэффициенты трения лежат в пределах

$$k^- \leq k_1 \leq k^+, \quad k^- \leq k_2 \leq k^+$$

где k^- и k^+ – заданные числа, то максимальная скорость достигается при $k_1 = k^-, k_2 = k^+$.

При фиксированных коэффициентах трения зависимость $v_{\max}$ из (4.9) от соотношения масс $\mu = m_2/m_1$ представим в виде

$$v_{\max} = [g\eta\varphi(\mu)/2]^{1/2}, \quad \varphi(\mu) = \mu(k_2 - \mu k_1)(1 + \mu)^{-2} \quad (4.10)$$

Функция $\varphi(\mu)$ имеет единственный максимум на интервале (0, 1) при

$$\mu = k_2(2k_1 + k_2)^{-1} < 1 \quad (4.11)$$

Соответствующее значение максимальной скорости (4.10) равно

$$v_{\max}^* = (g\eta)^{1/2} k_2 [8(k_1 + k_2)]^{-1/2} \quad (4.12)$$

В частном случае одинаковых коэффициентов трения для масс m_1 и m_2 , т.е. при $k_1 = k_2 = k$, имеем из (4.8) – (4.12)

$$\mu = m_1 / m_2 = 1/3, \quad v = 3, \quad f_1 = 3, \quad f_4 = 0$$

$$T = 2\eta^{1/2}(gk)^{-1/2}, \quad \xi = \eta/2, \quad v_{\max}^* = (g\eta k)^{1/2} / 4 \quad (4.13)$$

Таким образом, для оптимального движения получены простые и наглядные соотношения. Естественно, что для повышения средней скорости движения коэффициент трения k_2 основной массы следует увеличивать, а вспомогательной массы k_1 – уменьшать. Для отношения масс также получена простая формула (4.11). В случае равных коэффициентов трения вспомогательная масса должна быть втрое меньше основной, а полное смещение ξ за цикл оптимального движения оказывается вдвое меньше величины η допустимого размаха относительного движения. Напомним, однако, что все эти выводы получены при отсутствии ограничений на управляющую силу; более того, она предполагается бесконечно большой (импульсной) на одном из этапов движения. Накладывая ограничения на управляющие силы и решая численно полученные задачи оптимизации, можно получить более реалистические, хотя и менее наглядные результаты.

Рассмотренная двухмассовая система представляет интерес как простейшая механическая модель, способная перемещаться по плоскости при наличии сил трения за счет внутренних управляющих сил. Более эффективным движение такой системы будет при возможности рекуперации энергии, т.е. при наличии пружины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00201).

ЛИТЕРАТУРА

1. Добролюбов А.И. Бегущие волны деформации. Минск: Наука и техника, 1987. 142 с.
2. Черноусько Ф.Л. Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 518–531.

Москва

Поступила в редакцию
7.VI.2001