

УДК 531.36:534.1

© 2002 г. А.П. Маркеев

**ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ТРАЕКТОРИЙ
В ОКРЕСТНОСТИ ОРБИТАЛЬНО НЕУСТОЙЧИВОГО
ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ**

Рассматривается автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы. Предполагается, что в системе существует периодическое движение и реализуется резонанс второго порядка (параметрический резонанс). Невозмущенное периодическое движение орбитально устойчиво или неустойчиво. Однако даже при наличии неустойчивости траектории возмущенного движения могут оставаться в ограниченной окрестности невозмущенной траектории для всех значений времени. Для случая, когда функция Гамильтона зависит от малого параметра, дается асимптотическая оценка размеров этой окрестности. Результаты применяются в задаче о нелокальной устойчивости быстрых плоских вращений тяжелого твердого тела в случае Ковалевской и в задаче об устойчивости периодических движений Пуанкаре первого рода ограниченной задачи трех тел в одном частном случае резонанса второго порядка.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Пусть она имеет периодическое движение и в окрестности траектории, отвечающей этому движению, функция Гамильтона Γ аналитична. Период без ограничения общности считаем равным 2π .

Канонически сопряженные переменные ξ_i, η_i (ξ_i – координаты, η_i – импульсы; $i = 1, 2$) можно [1] выбрать так, что решение, соответствующее невозмущенному движению, запишется в виде

$$\xi_1(t) = t + \xi_1(0), \quad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0 \quad (1.1)$$

а функция Гамильтона будет 2π -периодической по координате ξ_1 .

Задача об орбитальной устойчивости невозмущенного периодического движения эквивалентна задаче об устойчивости по отношению к возмущениям величин η_1, ξ_2, η_2 .

Пусть функция Гамильтона зависит от параметра ε и аналитична при достаточно малых его значениях. Будем также считать, что при $\varepsilon = 0$ функция Γ не зависит от ξ_1 .

Два характеристических показателя линеаризованных уравнений возмущенного движения всегда равны нулю. Относительно двух других предположим, что при $\varepsilon = 0$ они являются чисто мнимыми величинами $\pm i\omega$, причем величина 2ω близка к нечетному числу $2n + 1$. Положим

$$2n + 1 - 2\omega = 2\varepsilon\alpha \quad (1.2)$$

При наличии этого резонанса второго порядка (параметрического резонанса) невозмущенное периодическое движение может быть орбитально устойчивым или неустойчивым, причем неустойчивость может обнаруживаться уже в линеаризованных уравнениях возмущенного движения. Однако упомянутая неустойчивость может оказаться всего лишь локальной, так как траектории возмущенного движения не обязательно уходят неограниченно далеко от траектории невозмущенного движения.

Они могут вечно оставаться в некоторой ограниченной (но не бесконечно малой) ее окрестности. Основная цель данной работы состоит в получении оценок размеров этой окрестности.

2. Нормальная форма гамильтониана возмущенного движения и ее упрощение. Представим функцию Гамильтона Γ возмущенного движения в виде ряда по степеням $\eta_1, \xi_2, \eta_2, \varepsilon$. А затем при помощи 2π -периодической по φ_1 аналитической по $\eta_1, \xi_2, \eta_2, \varepsilon$ канонической замены переменных $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \rightarrow \varphi_1, r_1, q_2, p_2$ уничтожим в квадратичной относительно q_2, p_2 части гамильтониана все нерезонансные члены, полностью уничтожим члены третьей, а также (при $\varepsilon = 0$) и пятой степени относительно $|r_1|^{\frac{1}{2}}, q_2, p_2$, а члены четвертой степени приведем к такой форме, когда при $\varepsilon = 0$ они зависят только от r_1 и комбинации $q_2^2 + p_2^2$. Нормализованный таким образом гамильтониан возмущенного движения обозначим через H . Он имеет следующий вид (см. [2]):

$$\begin{aligned} H = & r_1 + \frac{1}{2}\lambda(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\varepsilon[\kappa_1 \sin 2\varphi - \kappa_2 \cos 2\varphi](q_2^2 - p_2^2) + \varepsilon[\kappa_1 \cos 2\varphi + \\ & + \kappa_2 \sin 2\varphi]q_2 p_2 + c_{20}r_1^2 + \frac{1}{2}c_{11}r_1(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}c_{02}(q_2^2 + p_2^2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_4^{(k)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_5^{(k)} + O_6 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\varphi = \frac{1}{2}(2n+1)\varphi_1$, $H_4^{(k)}$ и $H_5^{(k)}$ – формы четвертой и пятой степеней относительно $|r_1|^{\frac{1}{2}}, q_2, p_2$ с 2π -периодическими по φ_1 коэффициентами, через O_6 обозначена совокупность членов, степень которых относительно $|r_1|^{\frac{1}{2}}, q_2, p_2$ не ниже шестой. Величины $\lambda, \kappa_1, \kappa_2, c_{20}, c_{11}, c_{02}$ – постоянные коэффициенты, причем $\lambda, \kappa_1, \kappa_2$ представимы сходящимися рядами

$$\lambda = \omega + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon^2\lambda^{(2)} + \dots, \quad \kappa_i = \kappa_i^{(1)} + \varepsilon\kappa_i^{(2)} + \dots, \quad i = 1, 2$$

Формулы для нахождения величин $c_{ij}, \kappa_i^{(1)}$ по коэффициентам разложения исходного гамильтониана Γ в ряд получены ранее [2].

Если теперь сделать каноническое преобразование

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1, \quad r_1 = \tilde{r}_1 - \frac{1}{4}(2n+1)(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) \quad (2.2)$$

$$q_2 = \tilde{q}_2 \cos \varphi + \tilde{p}_2 \sin \varphi, \quad p_2 = -\tilde{q}_2 \sin \varphi + \tilde{p}_2 \cos \varphi$$

то получим гамильтониан

$$\begin{aligned} H = & \tilde{r}_1 - \frac{1}{2}\varepsilon\delta(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) + \frac{1}{2}\varepsilon[2\kappa_1\tilde{q}_2\tilde{p}_2 + \kappa_2(\tilde{p}_2^2 - \tilde{q}_2^2)] + a_{20}\tilde{r}_1^2 + \frac{1}{2}a_{11}\tilde{r}_1(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) + \\ & + \frac{1}{4}a_{02}(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{H}_4^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{H}_5^{(k)} + O_6 \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{H}_4^{(k)}, \tilde{H}_5^{(k)}$ – формы $H_4^{(k)}, H_5^{(k)}$ из (2.1), выраженные через новые переменные, а

$$\delta = \alpha - \lambda^{(1)} - \varepsilon\lambda^{(2)} - \dots, \quad a_{20} = c_{20}$$

$$a_{11} = c_{11} - (2n+1)c_{20}, \quad a_{02} = c_{20}(n+1/2)^2 - c_{11}(n+1/2) + c_{02}$$

Еще одно каноническое преобразование (с валентностью $a_{02}(\varepsilon\kappa)^{-1}$)

$$\tilde{\varphi}_1 = \sigma w_1, \quad \tilde{r}_1 = \varepsilon\kappa |a_{02}|^{-1} I_1 \quad (2.3)$$

$$\tilde{q}_2 = (2\varepsilon\kappa |a_{02}|^{-1} \rho_2)^{1/2} \sin(\psi + \psi_0), \quad \tilde{p}_2 = (2\varepsilon\kappa |a_{02}|^{-1} \rho_2)^{1/2} \cos(\psi + \psi_0)$$

где

$$\kappa = (\kappa_1^{(1)^2} + \kappa_2^{(1)^2})^{1/2}, \quad \kappa_1^{(1)} = \kappa \sin 2\psi_0, \quad \kappa_2^{(1)} = \kappa \cos 2\psi_0, \quad \psi = \sigma\theta_2 + 1/4(1 - \sigma)\pi,$$

$$\sigma = \text{sign} a_{02}$$

и переход к новой независимой переменной $\rho = \kappa t$ приводят к уравнениям возмущенного движения с гамильтонианом

$$H = H^{(0)}(I_1) + \varepsilon H^{(1)}(I_1, \rho_2, \theta_2) + \varepsilon^2 H^{(2)}(I_1, \rho_2, w_1, \theta_2; \varepsilon^{1/2}) \quad (2.4)$$

где

$$H^{(0)} = \sigma\kappa^{-1} I_1, \quad H^{(1)} = -v\rho_2 + \rho_2 \cos 2\theta + \rho_2^2 + b_{11} I_1 \rho_2 + b_{20} I_1^2 \quad (2.5)$$

$$v = \sigma(\alpha - \lambda^{(1)})\kappa^{-1}, \quad b_{11} = a_{11}a_{02}^{-1}, \quad b_{20} = a_{20}a_{02}^{-1}$$

Отметим, что величина I_1 может иметь любой знак, а $\rho_2 \geq 0$. Функция $H^{(2)}$ 4π -периодична по w_1 , 2π -периодична по θ_2 и при $\rho_2 > 0$ аналитична по всем своим аргументам.

При выполнении неравенств $-1 < v \leq 1$ периодическое движение (1.1) орбитально неустойчиво, а при $v \leq -1$ или $v > 1$ устойчиво [2].

3. О приближенной системе. Если в гамильтониане (2.4) отбросить последнее слагаемое, то придем к приближенной системе с гамильтонианом $H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)}$. В этой системе величина I_1 постоянна ($I_1 = I_1(0)$), а переменные θ_2 , ρ_2 описываются уравнениями

$$\frac{d\theta_2}{d\tau} = \varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_2}, \quad \frac{d\rho_2}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} \quad (3.1)$$

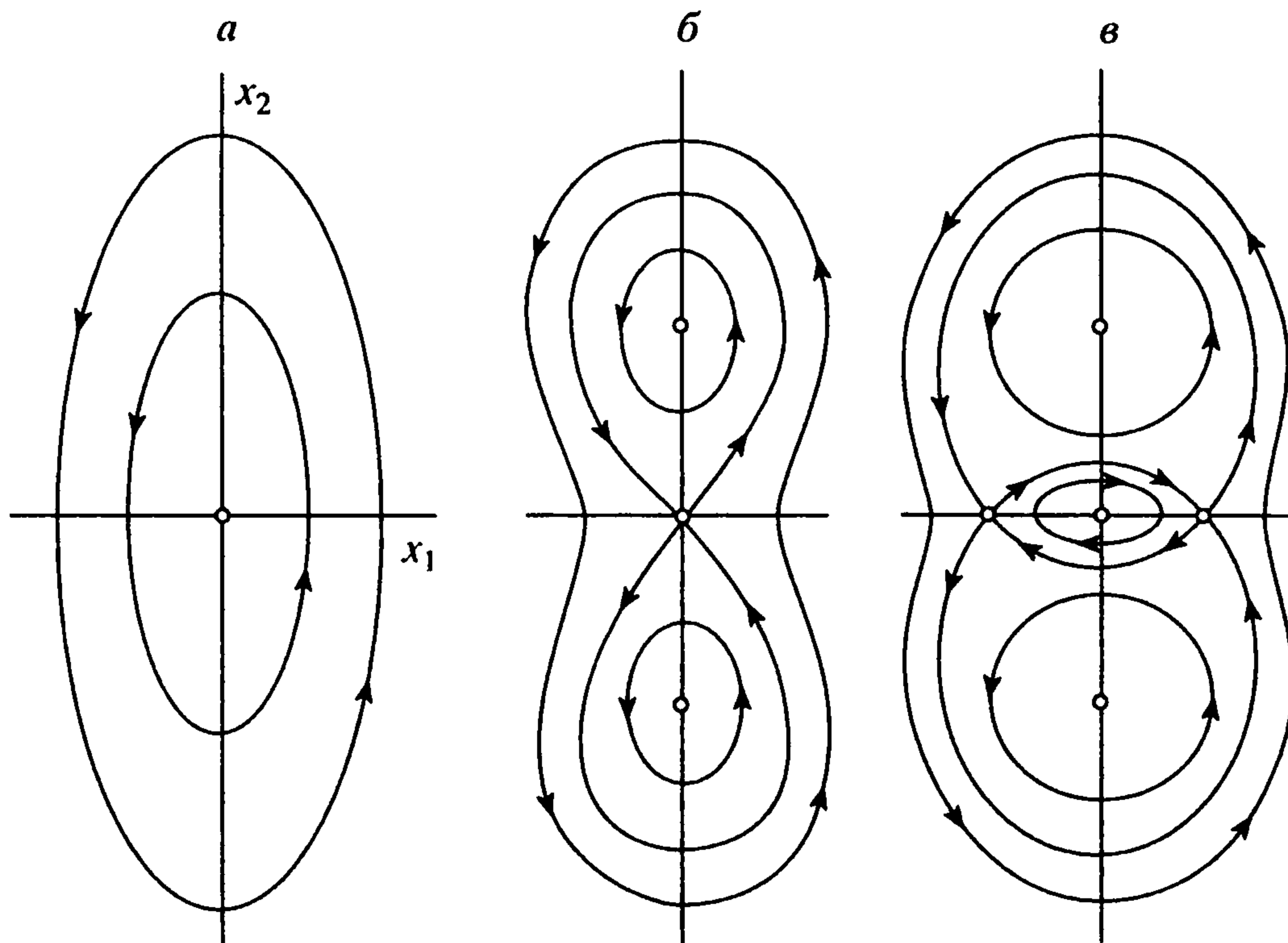
где

$$\gamma = -\tilde{v}\rho_2 + \rho_2 \cos 2\theta_2 + \rho_2^2, \quad \tilde{v} = v - b_{11} I_1 \quad (3.2)$$

В гамильтониане (2.4) величину v можно трактовать, как параметр, характеризующий "резонансную расстройку". Величина $\tilde{v}$ в функции (3.2) также играет роль резонансной расстройки. Но в отличие от величины v , зависящей только от параметров исследуемой системы, величина $\tilde{v}$ зависит еще и от начальных условий (от $I_1(0)$). При $b_{11} \neq 0$ выбором величины $I_1(0)$ резонансную расстройку можно увеличить, уменьшить или даже совсем уничтожить.

Система уравнений (3.1) подробно исследована ранее (см. [3, 4]) и приведенную там библиографию). Ее траектории при различных значениях параметра $\tilde{v}$ могут быть качественно различными, т.е. наличие степени свободы, соответствующей переменным w_1 , I_1 , оказывает существенное влияние на поведение решений $\theta_2(\tau)$, $\rho_2(\tau)$ системы (3.1).

Фазовые портреты системы (3.1) в плоскости x_1, x_2 , где $x_1 = (2\rho_2)^{1/2} \cos \theta_2$, $x_2 = (2\rho_2)^{1/2} \sin \theta_2$, показаны на фиг. 1, а-в для случаев $\tilde{v} \leq -1$, $-1 < \tilde{v} \leq 1$, $\tilde{v} > 1$ соответственно. В зависимости от значения $\tilde{v}$ в системе может быть одна, три или



Фиг. 1

пять особых точек. Особая точка, для которой $x_1 = x_2 = 0$, существует при любом значении $\tilde{v}$. Она отвечает невозмущенному периодическому движению (1.1).

В дальнейшем будем интересоваться только теми областями плоскости x_1, x_2 , которые заполнены траекториями, охватывающими все особые точки системы (3.1). При любом значении $\tilde{v}$ этим траекториям отвечают положительные значения постоянной h интеграла

$$\chi(\rho_2, \theta_2) = h \quad (3.3)$$

Из приведенного ранее анализа [3, 4] следует, что если в начальный момент $\tau = 0$ выполняется условие

$$\rho_2(0) < \frac{1}{2}[\tilde{v} - 1 + \sqrt{(\tilde{v} - 1)^2 + a}] \quad (3.4)$$

то при всех $\tau \geq 0$ справедливо неравенство

$$\rho_2(\tau) < \frac{1}{2}[\tilde{v} + 1 + \sqrt{(\tilde{v} + 1)^2 + a}] \quad (3.5)$$

В неравенствах (3.4) и (3.5) a – положительный параметр ($a = 4h$, где h – постоянная интеграла (3.3), соответствующая замкнутой траектории, охватывающей все особые точки системы (3.1); правые части неравенств (3.4) и (3.5) равны минимальному и максимальному значениям величины ρ_2 на этой траектории).

4. Переменные действие – угол. Возвратимся теперь к точным уравнениям возмущенного движения, задаваемым гамильтонианом (2.4). Запишем его в новых переменных I_i, w_i ($i = 1, 2$), являющихся для приближенной системы переменными действие – угол. Так как в приближенной системе w_1 – циклическая координата, то одной из пар этих переменных будет пара I_1, w_1 . Гамильтониан (2.4), записанный в переменных I_i, w_i , обозначим через F :

$$F = F^{(0)}(I_1) + \epsilon F^{(1)}(I_1, I_2) + \epsilon^2 F^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2; \epsilon^{1/2}) \quad (4.1)$$

Здесь $F^{(0)}$ – это функция $H^{(0)}$ из (2.5),

$$F^{(1)} = b_{20}I_1^2 + \Phi(I_1, I_2)$$

а Φ – функция (3.2), записанная в новых переменных; она является обратной к функции

$$I_2(h) = \frac{1}{2\pi} \oint \rho_2(\theta_2, h) d\theta \quad (4.2)$$

где ρ_2 – значение импульса ρ_2 на траекториях приближенной системы при $h > 0$; зависимость ρ_2 от I_1 в (4.2) не отмечена.

Функция F 4π -периодична по w_1 и 2π -периодична по w_2 , а при $I_2 > 0$ аналитична относительно $I_1, I_2, w_1, w_2, \varepsilon^{1/2}$.

5. Отсутствие эволюции переменных I_1, I_2 . Гамильтониан (4.1) при $\varepsilon = 0$ зависит только от одной из переменных "действие" (от I_1), поэтому имеет место собственное вырождение [5]. Однако при $0 < \varepsilon \ll 1$ вырождение снимается, и в возмущенной системе переменные I_1, I_2 вечно остаются вблизи своих начальных значений. Действительно, можно проверить (см. ниже), что гамильтониан (4.1) удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial F^{(1)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0 \quad (5.1)$$

поэтому [5] для большинства начальных условий в возмущенной системе движение будет условно-периодическим. Только доля $O(\exp(-c_1\varepsilon^{-1}))$, где $c_1 = \text{const} > 0$, фазового пространства не заполнена условно-периодическими траекториями. При этом для всех начальных условий величины $I_i(\tau)$ ($i = 1, 2$) близки к их начальным значениям:

$$|I_i(\tau) - I_i(0)| < c_2\varepsilon \quad (c_2 = \text{const}) \quad (5.2)$$

Выполнимость первого из условий (5.1) сразу следует из (2.5) и (4.1), так как $\partial F^{(0)}/\partial I_1 = \sigma\varkappa^{-1} \neq 0$. Второе неравенство в (5.1) также справедливо, так как величина $\partial F^{(1)}/\partial I_2$ есть поделенная на ε частота движения по рассматриваемой замкнутой траектории фиг. 1, которая, очевидно, отлична от нуля. Для величины $\partial^2 F^{(1)}/\partial I_2^2$, входящей в третье из условий (5.1), из соотношений (3.3) и (4.2) можно получить следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial I_2^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial I_2} \right)^3 \oint \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho_2} \right)^{-3} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho_2^2} d\theta_2 \quad (5.3)$$

На рассматриваемых замкнутых траекториях, охватывающих на фиг. 1 все особые точки системы (3.1), подинтегральное выражение в (5.3) положительно. Отсюда следует выполнение третьего из условий (5.1). Справедливость утверждения об отсутствии эволюции величин I_1, I_2 показана.

6. Оценки величин $r_1(t)$ и $q_2^2(t) + p_2^2(t)$ в случае $b_{11} = 0$. Из неравенства (5.2) и формул замен переменных (2.2) и (2.3) следует, что при всех $t > 0$ справедливы равенства

$$r_1 + \frac{1}{4}(2n+1)(q_2^2 + p_2^2) = \varepsilon\kappa |a_{02}|^{-1} I_1 = \varepsilon\kappa |a_{02}|^{-1} (I_1(0) + O(\varepsilon)) \quad (6.1)$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что величина $r_1 + \frac{1}{4}(2n+1)(q_2^2 + p_2^2)$ является "почти интегралом" уравнений возмущенного движения в том смысле, что она при всех $t > 0$ отличается от своего начального значения на величину, порядок которой относительно ε не меньше двух, если только $r_1(0)$ и $q_2^2(0) + p_2^2(0)$ имеют порядок не меньше единицы.

При наличии соотношения (6.1) получение оценки величины окрестности, в которой находятся траектории возмущенного движения, сводится к нахождению оценок величины $q_2^2(t) + p_2^2(t)$.

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент b_{11} в гамильтониане (2.4) равен нулю. В этом случае, согласно второму равенству (3.2), имеем $\tilde{v} = v$. Тогда, учитывая, что для всех начальных условий $I_2(t) = I_2(0) + O(\epsilon)$ (см. неравенство (5.2)), из формул (2.3) и неравенств (3.4), (3.5) получаем, что если

$$q_2^2(0) + p_2^2(0) < \epsilon \kappa |a_{02}|^{-1} [v - 1 + \sqrt{(v - 1)^2 + a} - \delta_1] \quad (6.2)$$

то при всех $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$q_2^2(t) + p_2^2(t) < \epsilon \kappa |a_{02}|^{-1} [v + 1 + \sqrt{(v + 1)^2 + a} + \delta_2] \quad (6.3)$$

Здесь δ_i – положительные величины порядка $\chi = \epsilon^{1-\beta}$ ($0 < \beta < 1$).

Неравенства (6.2), (6.3) задают однопараметрическое семейство оценок. Параметром служит величина a .

7. О нелокальной устойчивости быстрых плоских вращений твердого тела в случае Ковалевской. Рассмотрим твердое тело веса mg , движущееся вокруг неподвижной точки O . Оси связанной с телом системы координат $Oxuz$ направим по главным осям инерции для точки O . Соответствующие главные моменты инерции обозначим через A, B, C . Пусть геометрия масс тела отвечает случаю Ковалевской. Тогда, полагая $B = C = 2A$, можно считать, что центр тяжести лежит на оси Oz . Расстояние от центра тяжести до неподвижной точки O обозначим через l .

Постоянную величину проекции кинетического момента тела на вертикаль полагаем равной нулю. Тело может совершать маятникообразные вращения вокруг оси Ox , занимающей неизменное горизонтальное положение. Пусть средняя угловая скорость Ω этого вращения настолько велика, что безразмерную величину $\epsilon = mgl/(A\Omega^2)$ можно считать малым параметром. Ранее показано [6, 7], что упомянутые плоские вращения твердого тела в случае Ковалевской орбитально неустойчивы. Оценку величины окрестности плоского вращения, в которой всегда остаются траектории возмущенного движения тела, можно получить, используя тот факт, что уравнения движения вполне интегрируемы (с использованием интеграла Ковалевской). Здесь для иллюстрации алгоритма разд. 6 получим эту оценку при достаточно малых ϵ .

В качестве канонически сопряженных переменных примем переменные Андуайе [8]. Обезразмеренные при помощи множителя $A\Omega$ обобщенные импульсы обозначим через R_1, R_2 (R_1 – модуль кинетического момента, R_2 – его проекция на ось Oz), соответствующие обобщенные координаты обозначим через ψ_1, ψ_2 , в качестве независимой переменной примем величину $\tau = \Omega t$. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{4}(R_1^2 - R_2^2)(1 + \sin^2 \psi_2) + \frac{1}{4}R_2^2 - \epsilon \sqrt{1 - R_2^2 / R_1^2} \cos \psi_1 \quad (7.1)$$

На рассматриваемых вращениях тела $\psi_2 = \pi/2, R_2 = 0$, а изменение переменных ψ_1, R_1 описывается уравнениями с гамильтонианом $h_0 = \frac{1}{2}R_1^2 - \epsilon \cos \psi_1$. В переменных x_1, X_1 , вводимых [4] каноническим преобразованием

$$\psi_1 = x_1 + \epsilon X_1^{-2} \sin x_1 + O(\epsilon^2), \quad R_1 = X_1 + \epsilon X_1^{-1} \cos x_1 + O(\epsilon^2)$$

имеем $h_0 = \frac{1}{2}X_1^2 + O(\epsilon^2)$, а изучаемое плоское вращение тела задается равенствами

$$x_1(\tau) = (1 + O(\epsilon^2))\tau + x_1(0), \quad X_1 = 1, \quad \psi_2 = \pi/2, \quad R_2 = 0$$

Введем возмущения Y_1, x_2, Y_2 по формулам

$$X_1 = 1 - Y_1, \quad \psi_2 = \pi/2 + x_2, \quad R_2 = -Y_2$$

Гамильтониан возмущенного движения запишется в виде ряда

$$H = Y_1 + \frac{1}{4}(x_2^2 + Y_2^2) + \frac{1}{2}\epsilon \cos x_1(x_2^2 - Y_2^2) - \frac{1}{12}(x_2^4 + 3x_2^2 Y_2^2 + 6Y_1 x_2^2 + 6Y_1^2) + \dots \quad (7.2)$$

где многоточием обозначена совокупность членов выше пятой степени относительно $|Y_1|^{1/2}, x_2, Y_2$. В членах второй и четвертой степеней в разложении (7.2) отброшены ненужные в дальнейшем слагаемые, порядок которых относительно ϵ не меньше второго и первого соответственно. Из равенства (7.2) видно, что имеет место резонанс второго порядка, причем в обозначениях разд. 1 имеем $\omega = 1/2, n = 0, \alpha = 0$.

Каноническая замена переменных по формулам

$$x_1 = x'_1, \quad Y_1 = Y'_1 - \frac{1}{4}\epsilon \cos x'_1(x_2'^2 - Y_2'^2)$$

$$x_2 = x'_2 - \frac{1}{2}\epsilon \sin x'_1 Y'_2, \quad Y_2 = Y'_2 - \frac{1}{2}\epsilon \sin x'_1 x'_2$$

приводит первые три слагаемые в (7.2) (они соответствуют линейризованным уравнениям возмущенного движения) к нормальной форме. Еще одна близкая к тождественной нелинейная замена переменных $x'_1, x'_2, Y'_1, Y'_2 \rightarrow \phi_1, q_2, r_1, p_2$ типа преобразования Биркгофа приводит к нормальной форме члены четвертой степени относительно $|Y'_1|^{1/2}, x'_2, Y'_2$. В результате придем к гамильтониану (2.1), в котором

$$\kappa_1^{(1)} = 0, \quad \kappa_2^{(1)} = -1/2, \quad \lambda^{(1)} = 0, \quad c_{20} = c_{11} = 2c_{02} = -1/2.$$

По формулам разд. 2 находим, что $\kappa = 1/2, \nu = 0, b_{11} = 0$. И, согласно соотношениям (6.2) и (6.3), получаем, что если при $t = 0$ выполняется неравенство

$$q_2^2(0) + p_2^2(0) < 4\epsilon(\sqrt{1+a} - 1 - \delta_1)$$

то при всех t справедлива оценка

$$q_2^2(t) + p_2^2(t) < 4\epsilon(\sqrt{1+a} + 1 + \delta_2)$$

Из (6.1) теперь следует, что

$$|r_1(t) - r_1(0)| < 2\epsilon(\sqrt{1+a} + O(\chi))$$

8. Оценки в случае $b_{11} \neq 0$. При $b_{11} \neq 0$ оценки, задаваемые неравенствами (6.2), (6.3), остаются справедливыми. Только величина ν в этих неравенствах должна быть заменена на величину $\tilde{\nu}$, определяемую вторым равенством (3.2).

Учитывая, что, согласно неравенству (5.2), $I_1 = I_1(0) + O(\epsilon)$, второе равенство (3.2) можно записать в виде $\tilde{\nu} = \nu - b_{11}I_1(0) + O(\epsilon)$. Учтя формулы замен (2.2), (2.3) и введя обозначения

$$r_1(t) = \epsilon \kappa |a_{02}|^{-1} x(t), \quad q_2^2(t) + p_2^2(t) = \epsilon \kappa |a_{02}|^{-1} y(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (8.1)$$

получаем, что с погрешностью порядка ϵ

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}(x_0, y_0) = \nu - b_{11}[x_0 + \frac{1}{4}(2n+1)y_0] \quad (8.2)$$

Величина x может иметь любой знак, а $y \geq 0$.

Пусть параметры исследуемой материальной системы заданы. И, следовательно,

заданы величины n , v и b_{11} в правой части равенства (8.2). Зафиксируем теперь какое-либо положительное значение параметра a и рассмотрим неравенство

$$y_0 < \tilde{v} - 1 + \sqrt{(\tilde{v} - 1)^2 + a} \quad (8.3)$$

где $\tilde{v}$ задается формулой (8.2). В полуплоскости $y_0 \geq 0$ неравенство (8.3) выполняется в некоторой области G . Пусть начальные данные таковы, что $x_0 = x_0^*$, $y_0 = y_0^*$, причем точка (x_0^*, y_0^*) лежит в области G вместе со своей χ -окрестностью. Из неравенств (6.2) и (6.3) тогда следует, что для этих начальных данных траектория возмущенного движения такова, что при всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$y(t) < v^* + 1 + \sqrt{(v^* + 1)^2 + a} + \delta_2 \quad (8.4)$$

где v^* – значение функции $\tilde{v}$ из (8.2), вычисленное в точке (x_0^*, y_0^*) .

9. К вопросу об ограниченности траекторий астероидов в люке Гестии. Распределение астероидов по средним движениям внутри их основного пояса, расположенного между орбитами Марса и Юпитера, неравномерно: существуют интервалы распределения, в которых наблюдается разрежение или полное отсутствие астероидов [9]. Эти интервалы называют люками (или пустотами, щелями). Для люков в поясе астероидов отношение среднего движения астероида к среднему движению Юпитера близко к рациональному числу $l : s$. Для астероидов люка Гестии это отношение равно $3 : 1$. Число $l - s$ называют порядком резонанса, поэтому в случае астероидов люка Гестии имеет место изучаемый в данной работе резонанс второго порядка.

Будем моделировать орбиты астероидов при помощи периодических решений Пуанкаре первого рода круговой ограниченной задачи трех тел и, следуя разд. 8, получим оценку размеров области ограниченности возмущенных траекторий вблизи невозмущенных орбит Пуанкаре.

Единицы измерения выберем так, чтобы период обращения Юпитера, расстояние между Солнцем и Юпитером, а также сумма их масс равнялись единице. Массу Юпитера обозначим через ϵ . При $\epsilon = 0$ орбиты Пуанкаре переходят в круговые орбиты радиуса R_0 . Для астероидов люка Гестии $R_0 = 9^{-1/3} = 0.48075$. Семейство периодических решений Пуанкаре зависит (см., например, [10]) от одного существенного параметра h_1 (величина ϵh_1 с погрешностью порядка ϵ^2 равна разности постоянных интеграла энергии на орбите Пуанкаре и на порождающей круговой орбите). Нормальная форма (2.1) гамильтониана возмущенного движения в окрестности периодических движений Пуанкаре при резонансе второго порядка получена ранее [10]. Смысл величин r_1 , q_2 , p_2 описан в [10]. Можно сказать, что возмущения q_2 , p_2 характеризуют величину радиального смещения и радиальной скорости, а r_1 – величину возмущения трансверсальной скорости астероида в синодической системе координат.

Вычисления по приведенным в [10] формулам для коэффициентов нормальной формы показывают, что

$$\lambda = \frac{3}{2} + \epsilon(-0.23747 + 1.62253h_1) + O(\epsilon^2)$$

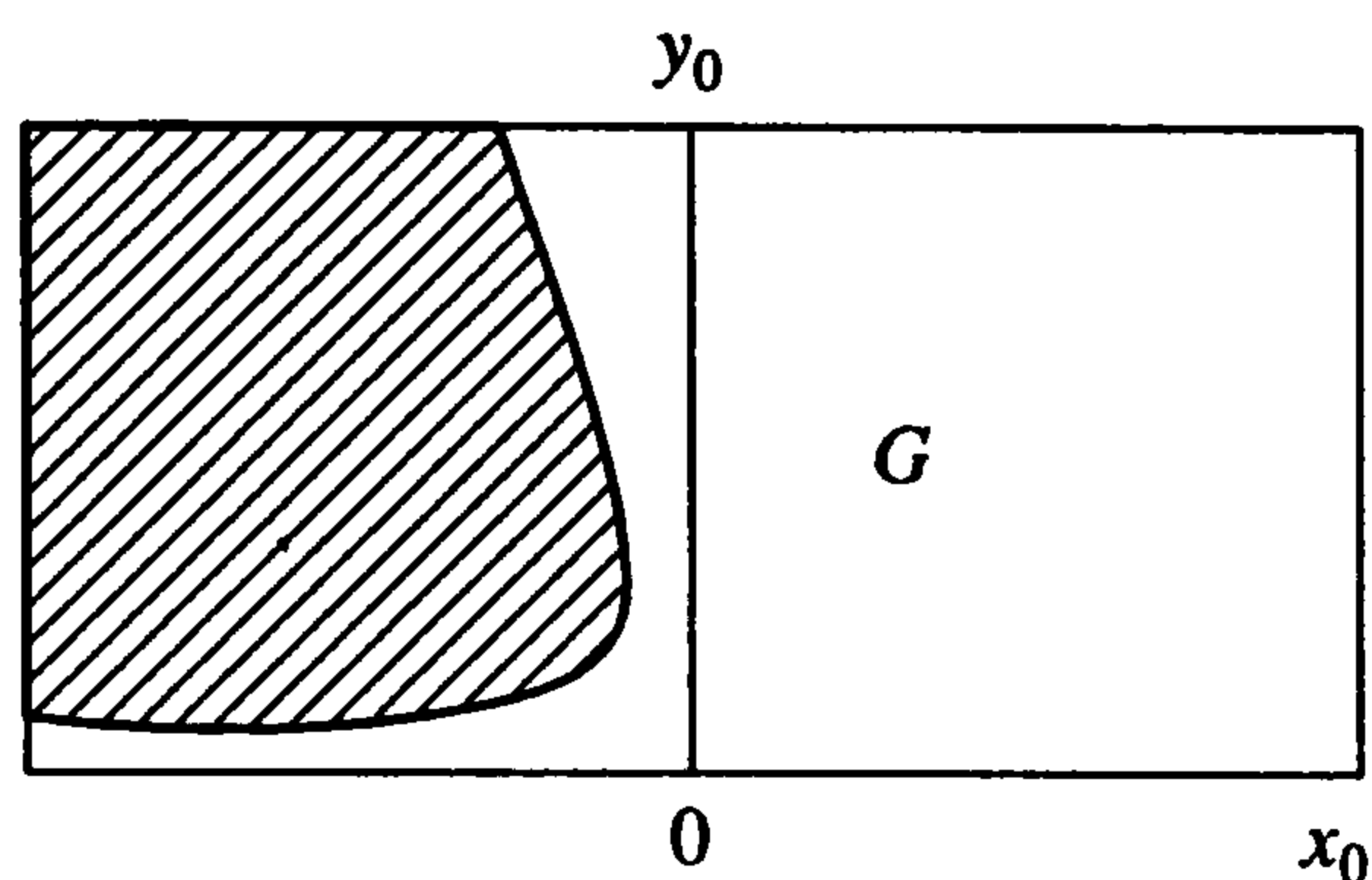
$$\kappa_1^{(1)} = 0, \quad \kappa_2^{(1)} = 0.86356, \quad c_{20} = \frac{1}{2}c_{11} = c_{02} = -3.24506$$

По формулам разд. 2 теперь находим

$$a_{20} = -a_{11} = 4a_{02} = -3.24506, \quad \kappa = 0.86356, \quad \sigma = -1, \quad b_{11} = -4$$

и выражение (8.2) принимает вид

$$\tilde{v} = \tilde{v}(x_0, y_0) = v + 4x_0 + 3y_0 \quad (9.1)$$



Фиг. 2

Область G определяется соотношениями (8.3) и (9.1). Она схематически показана на фиг. 2, где штриховкой отмечена часть полуплоскости $y_0 > 0$, не принадлежащая области G . Границей области G служат прямая $y_0 = 0$ и гипербола

$$x_0 = -(5y_0^2 + a)/(8y_0) - 1/4(v - 1)$$

Пусть начальные значения величин r_1, q_2, p_2 таковы, что точка (x_0^*, y_0^*) , где

$$x_0^* = 0.939445\epsilon^{-1}r_1(0), \quad y_0^* = 0.939445\epsilon^{-1}(q_2^2(0) + p_2^2(0)) \quad (9.2)$$

лежит внутри области G и отстоит от ее границы на расстояние, не меньшее χ . Тогда при всех $t \geq 0$ справедлива оценка

$$q_2^2(t) + p_2^2(t) < 1.06447\epsilon[v^* + 1 + \sqrt{(v^* + 1)^2 + a + \delta_2}]$$

где v^* – значение функции (9.1) в точке (x_0^*, y_0^*) с координатами (9.2).

Оценку для $r_1(t)$ можно теперь получить из соотношения (6.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования России (Е 00-11.0-28).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927. = *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 833–847.
3. *Маркеев А.П.* О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569–580.
4. *Маркеев А.П.* Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 5. С. 34–44.
5. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
6. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 29–36.
7. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
8. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
9. *Демин В.Г., Журавлев С.Г.* Астероиды: происхождение, статистика и эволюция // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1979. 115 с.
10. *Маркеев А.П.* О несимметрии расположения люков Кирквуда в кольце астероидов // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 3. С. 335–339.