

УДК 539.375:534.1

© 2002 г. Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.В. Ехлаков

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ
ДЕФЕКТОСКОПИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРЕЩИН**

На основе единого гранично-интегрального подхода разрабатывается математическая модель основных этапов процесса ультразвуковой дефектоскопии заглубленных пространственных трещин произвольной ориентации в однородной среде и горизонтальных интерфейсных трещин. Дается описание построения асимптотики поля источника и вычисления как коэффициента рассеяния энергии, так и обобщенного коэффициента электромеханической связи Аулда. Приводятся численные результаты, показывающие зависимость скан-образа трещины от соотношения ее размеров к длине волны, от формы и ориентации в пространстве, а также влияние соотношения упругих свойств материалов на коэффициент рассеяния расположенной между ними интерфейсной трещины.

Интерпретация данных ультразвукового (УЗ) неразрушающего контроля традиционно базируется на лучевых методах общей теории дифракции [1]. При этом в силу асимптотической природы лучевой подход применим только в высокочастотном диапазоне, когда длина волны зондирующего сигнала много меньше характерных размеров дефекта. С другой стороны, если размеры дефекта соизмеримы или меньше длины волны, то использование надежных математических моделей становится особенно важным, так как отраженное поле дает в этом случае сильно размытое из-за дифракции изображение, требующее специальной обработки для восстановления размеров и формы дефекта. При математическом моделировании вместо лучевого здесь обычно используется интегральный подход, в рамках которого задача дифракции сводится к граничным интегральным уравнениям относительно неизвестного скачка смещений на берегах трещины [2–5]. Отраженное поле описывается при этом точным интегральным представлением, из которого можно получить асимптотику в дальней зоне, аналогичную лучевой. В этом смысле интегральный подход является более общим – он применим во всем частотном диапазоне. Хотя на высоких частотах решение интегральных уравнений и представляет определенные трудности, они также вполне преодолимы [5].

В целом, однако, решение граничных интегральных уравнений требует значительно больших вычислительных затрат, чем построение лучевых асимптотик. Особенно возрастают численные издержки, если рассматриваются трещины не классической (круг, полоса), а произвольной в плане формы, предполагающей сеточную аппроксимацию и вычисление многократных интегралов с гиперсингулярными ядрами при дискретизации [2]. Использование осесимметричных базисных функций позволило обойти эти проблемы и снизить вычислительные затраты до уровня, приемлемого для реализации метода на персональном компьютере (его подробное описание с кратким обзором близких работ других авторов см. [4, 8]). Это создало хорошую основу для разработки эффективной математической модели, включающей основные этапы УЗ-контроля: 1) описание волнового поля источника u_0 ; 2) решение задачи дифракции на трещине; 3) регистрация отраженного сигнала u_1^+ и построение образа дефекта, получаемого при сканировании.

Структура модели та же, что и ранее [3], но здесь используются другие математические методы. В частности, вариационно-разностный метод [4] позволяет рассматривать не только круговые, как в [3], но и произвольные в плане трещины.

Кроме того, на практике встречаются ситуации, когда трещина находится между разномодульными материалами. Это могут быть зоны отслоения в сварных, клеевых или металло-керамических соединениях, в слоистых композитах и т.п. Наличие границ раздела приводит

к появлению дополнительных отраженных, преломленных и интерфейсных или каналовых волн, что усложняет выделение на их фоне сигнала, отраженного от дефекта. Математически эти трудности выражаются в усложнении структуры падающих на трещину волн и ядер граничных интегральных уравнений.

1. Общее описание модели. Тестируемый образец моделируется упругим изотропным полупространством, занимающим в декартовой системе координат $\mathbf{x}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ объем $-\infty \leq x_1, y_1 \leq \infty, -\infty \leq z_1 \leq 0$. Среда может быть как однородной, содержащей произвольно ориентированную трещину, занимающую плоскую область Ω , так и двухслойной (или даже многослойной) с интерфейсной трещиной, расположенной в плоскости склейки слоев $z_1 = -h$ (фиг. 1).

Предполагается, что трещина расположена достаточно далеко от внешней поверхности образца, так что вторично отраженным от поверхности полем можно пренебречь. В случае же приповерхностных или выходящих на поверхность трещин учет переотражения сигнала между трещиной и поверхностью приводит к интегральному уравнению более сложного вида.

В рамках рассматриваемой модели среда считается изотропной, бесконечно протяженной в горизонтальном направлении. Необходимая физическая и математическая корректность обеспечивается при использовании принципа предельного поглощения, эквивалентного требованию излучения энергии на бесконечность [6].

На внешней поверхности $z_1 = 0$ расположен источник гармонических колебаний (УЗ-трансдюсер), действие которого моделируется заданной поверхностной нагрузкой q_0 :

$$\tau(\mathbf{x}_1)e^{-i\omega t} \big|_{z_1=0} = \begin{cases} q_0(x_1, y_1)e^{-i\omega t}, & (x_1, y_1) \in D \\ 0, & (x_1, y_1) \notin D \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\tau = \{\tau_{x_1 z_1}, \tau_{y_1 z_1}, \sigma_{z_1}\}$ – вектор поверхностных напряжений, D – область контакта УЗ-источника со средой, которая может быть произвольной (в том числе и несвязной: $D = \cup_k D_k$ для системы источников). Тип источника (направленный или ненаправленный, продольных или поперечных волн и т.п.) определяется конкретным видом функции q_0 .

Заданная нагрузка возбуждает в упругой среде исходное волновое поле $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_1)$, дифракция которого на трещине приводит к появлению поля отраженных волн $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1)$ (гармонический множитель здесь и далее опущен).

Трещина моделируется бесконечно тонким разрезом со свободными от напряжений берегами:

$$(\tau_0 + \tau_1) \big|_{z=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ – локальная система координат, связанная с трещиной (ось Oz совпадает с нормалью к ней), $\tau_n = T_z \mathbf{u}_n$ ($n = 0, 1$), T_z – оператор напряжений для площадки с нормалью Oz .

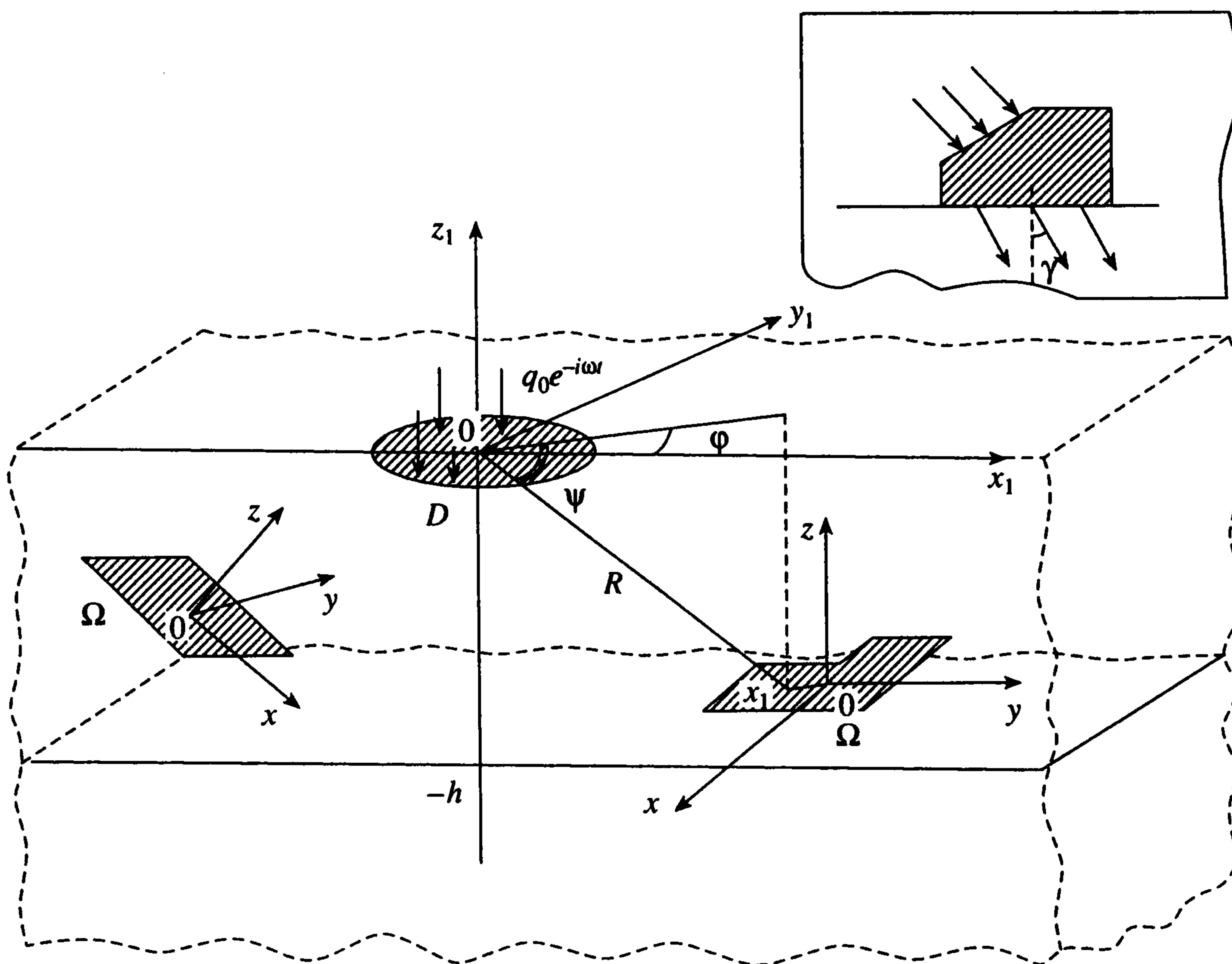
Поле $\mathbf{u}_0$ непрерывно во всем объеме, а отраженное поле $\mathbf{u}_1$ разрывно на разрезе Ω со скачком

$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \big|_{z=0^+} - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \big|_{z=0^-} \neq 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.3)$$

С использованием матриц Грина для полупространств $z \geq 0$ и $z \leq 0$ отраженное поле $\mathbf{u}_1^\pm$ выражается в виде осциллирующих контурных интегралов, содержащих неизвестный скачок $\mathbf{v}$, который определяется из системы интегральных уравнений, возникающих при удовлетворении условия (1.2) [4]:

$$\mathcal{L}\mathbf{v} \equiv \iint_{\Omega} l(x - \xi, y - \eta) \mathbf{v}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathbf{f}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.4)$$

$$\mathbf{f}(x, y) = -\tau_0 \big|_{z=0}$$



Фиг. 1

Асимптотический анализ интегральных представлений для $u_1^\pm$, как и ранее [4], дает достаточно простые расчетные формулы, позволяющие строить диаграммы направленности отраженного поля и получать значения его амплитуды в требуемых точках регистрации сигнала.

Кроме того, на основе полученного решения интегрального уравнения (1.4) можно вычислить обобщенный коэффициент отражения Аулда $\delta\Gamma$ [7] (или аргумент электромеханической зависимости по [3]), который описывает изменение регистрируемого пьезоэлектрическим приемником сигнала, вызванное наличием дефекта. Для произвольного внутреннего дефекта, окруженного поверхностью S ,

$$\delta\Gamma = -\frac{i\omega}{4P} \iint_S (\mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) dS \quad (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_j u_j \tau_j) \quad (1.5)$$

где $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ – напряжения на поверхности S , соответствующие полям $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, причем в качестве первого взято поле, возбуждаемое некоторым пьезоэлектрическим источником в теле без дефекта, а $\mathbf{u}_2$ – поле другого источника в присутствии дефекта, P – некоторая величина, пропорциональная квадрату амплитуды электрического сигнала источника. Отметим, что точкой в (1.5) обозначена сумма произведений компонент векторов без комплексного сопряжения, т.е. это не скалярное произведение векторов.

Представление (1.5) справедливо, и когда положение источников совпадает. В этом случае в качестве первого берется исходное поле источника $\mathbf{u}_0$, а в качестве второго $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$. В частности, для трещины со свободными от напряжений берегами, когда выполняются условия (1.2), (1.3), представление (1.5) сводится к виду

$$\delta\Gamma = -\frac{i\omega}{4P} \iint_\Omega \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 d\Omega \approx \frac{i\omega}{4P} \sum_{k=1}^N \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{f}_k \quad (1.6)$$

Аппроксимация интеграла конечной суммой естественным образом следует из разложения неизвестного скачка v по базисным функциям φ_k , заданным в узлах сетки (x_k, y_k) в соответствии с вариационно-разностным методом решения системы интегральных уравнений (1.4) [4]. При этом $c_k = v(x_k, y_k)$ – значения скачка в узлах, определяемые из линейной алгебраической системы, к которой уравнения (1.4) сводятся при дискретизации (см. (1.6) в [4]), а $f_k = f(x_k, y_k)$ формируют правую часть данной системы.

Коэффициент $\delta\Gamma$ является идеальным средством моделирования, так как он описывает величину, непосредственно измеряемую на практике. В режиме пульс-эхо, когда отраженный сигнал регистрируется в точке излучения, коэффициент $\delta\Gamma$ при фиксированных параметрах модели зависит от координаты (x_0, y_0) положения источника-приемника на поверхности $z_1 = 0$. При этом функция $\delta\Gamma(x_0, y_0)$ дает такое же изображение, как и получаемое при сканировании УЗ-трансдюсером по поверхности зондируемого материала. Тем самым отпадает необходимость построения диаграммы направленности рассеянного поля и трассирования сигнала от дефекта к приемнику.

Детали реализации данной модели, а также анализ скан-образов, полученных с ее помощью для прямоугольных и L -образных трещин в зависимости от их формы, пространственной ориентации, направленности источника и частоты, приведены в депонированной статье¹. В качестве примера на фиг. 2 приведен вид $\delta\Gamma(x_0, y_0)$ для горизонтальной L -образной трещины при сканировании нормально падающей волной от кругового зонда радиуса 5 мм на частотах $f = 0,5, 1, 1,5$ и 2 МГц ($\delta\Gamma$ в децибелах, x_0, y_0 в миллиметрах). Для сопоставимости результатов входные параметры здесь и далее те же, что и ранее [3], за исключением формы трещин. Площадь трещины взята той же, что и у круговой трещины единичного радиуса; глубина залегания – 30 мм; материал – сталь с $v_p = 5940$ м/с, $v_s = 3230$ м/с.

Данный пример иллюстрирует зависимость четкости сканированного изображения от соотношения длины волны и размеров объекта. Видно, что изображение, полученное на частоте 0,5 МГц, не позволяет точно определить размер и форму трещины без специальной обработки, эквивалентной решению обратной задачи. Четкие очертания проступают здесь только на частоте 2 МГц, когда становится применим и лучевой метод, который нельзя было использовать для построения целевой функции обратной задачи на более низких частотах.

Интересно отметить, что в силу дифракционных эффектов с изменением частоты размытое низкочастотное изображение как бы вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Более наглядно такое вращение просматривается в случае продолговатой прямоугольной трещины, приведенном в депонированной статье, указанной в сноске.

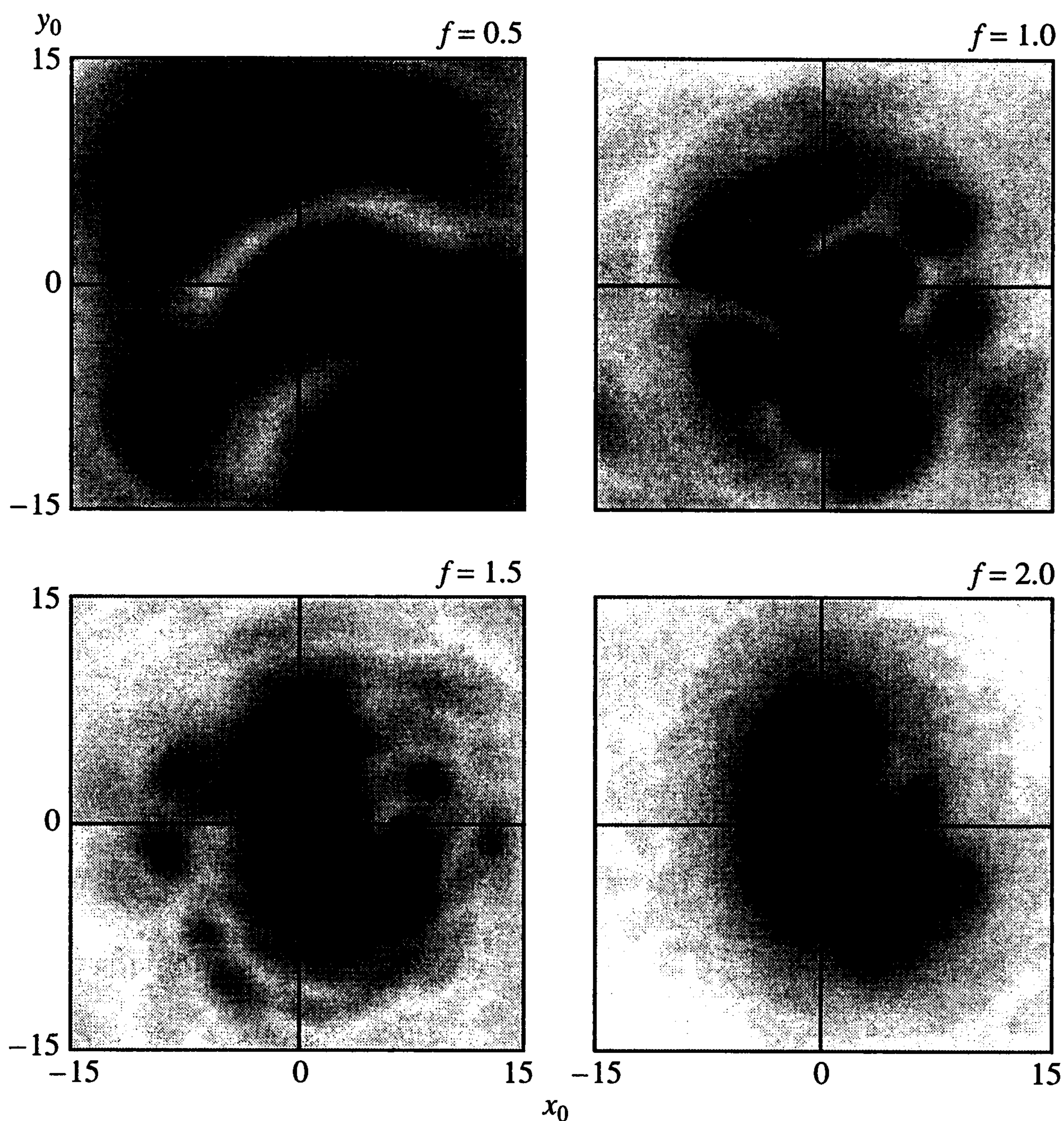
2. Поле источника. При решении задач дифракции обычно предполагается, что на трещину под некоторым углом к нормали $\mathbf{n}$ падает плоская P - или S -волна. Это позволяет исследовать зависимость коэффициента рассеяния Σ и диаграмм направленности от угла падения и частоты, но для вычисления $\delta\Gamma(x_0, y_0)$ падающее поле $\mathbf{u}_0$ должно быть связано с источником.

В случае неинтерфейсной трещины волновое поле, возбуждаемое в однородном упругом полупространстве поверхностной нагрузкой $\mathbf{q}_0$, как известно, может быть выражено в интегральной форме через матрицу Грина полупространства k и ее Фурье-символ K :

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_1) = \iint_D k(x_1 - \xi, y_1 - \eta, z_1) \mathbf{q}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$k(\mathbf{x}_1) = \mathcal{F}^{-1}[K] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z_1) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.2)$$

¹ Ехлаков А.В. Применение обобщенного коэффициента отражения к определению размеров и формы пространственных трещин. Краснодар, 2000, 24 с. – Деп. в ВИНТИ 29.12.00, № 3338-B00.



Фиг. 2

Здесь $\mathcal{F}^{-1}$ – оператор обратного двукратного преобразования Фурье. Контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 расположены в комплексных плоскостях α_1, α_2 вдоль вещественных осей, отклоняясь от них только при обходе вещественных полюсов и точек ветвления подынтегральной функции. Направление обхода диктуется принципом предельного поглощения [6]. Явный вид элементов матрицы K для однородного полупространства см., например, в [6, 8]. Для дальнейшего изложения важно, что зависимость K от z_1 имеет вид

$$K(\alpha_1, \alpha_2, z_1) = \sum_{n=1}^2 K_n(\alpha_1, \alpha_2) e^{\sigma_n z_1}, \quad z_1 \leq 0$$

$$\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad \operatorname{Re} \sigma_n \geq 0, \quad \operatorname{Im} \sigma_n \leq 0$$

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2; \quad \kappa_1 = \omega/v_p, \quad \kappa_2 = \omega/v_s$$

(v_p и v_s – скорости P - и S -волн).

Представление (2.1) дает точную волновую картину во всем полупространстве, однако здесь приходится вычислять многократные интегралы. Для заглубленных

трещин, расположенных на расстоянии, большем нескольких длин волн λ от поверхности ($|z_1| \gg \lambda$), вполне достаточно воспользоваться их асимптотическим представлением. В рассматриваемом случае главный вклад в асимптотику интеграла (2.2) дают стационарные точки

$$\alpha_{1,n} = -\kappa_n \cos \varphi \sin \psi, \quad \alpha_{2,n} = -\kappa_n \sin \varphi \sin \psi$$

экспоненциальных составляющих $\exp(\sigma_n z_1 - i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1))$ подынтегральных функций [8]. Соответствующее асимптотическое представление для матрицы k в (2.1) принимает вид

$$k(x_1 - \xi, y_1 - \eta, z_1) = \sum_{n=1}^2 k_n(\varphi, \psi) \frac{e^{i\kappa_n R}}{R} + O(R^{-2}) \quad (2.3)$$

$$k_n(\varphi, \psi) = i \cos \psi \kappa_n K_n(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}) / (2\pi)$$

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + z_1^2} \rightarrow \infty, \quad \psi > \pi/2$$

Здесь φ, ψ – углы сферической системы координат с центром в текущей точке интегрирования $(\xi, \eta, 0)$.

Замена интеграла (2.1) приближенной кубатурной формулой по узлам (ξ_m, η_m) ($m = 1, 2, \dots, M$) при учете равенства (2.3) приводит к представлению

$$\mathbf{u}_0^{\text{inc}}(\mathbf{x}_1) = \sum_{n=1}^2 \mathbf{u}_{0n}(\mathbf{x}_1) \approx \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_{nm} \frac{e^{i\kappa_n R_m}}{R_m} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a}_{nm} = k_n(\varphi_m, \psi_m) \mathbf{q}_0(\xi_m, \eta_m) s_m$$

в котором φ_m, ψ_m, R_m – координаты рассматриваемой точки $\mathbf{x}_1$ в сферических системах, связанных с узлами (ξ_m, η_m) , s_m – весовые коэффициенты кубатурной формулы (для равномерной сетки с шагом h $s_m = h^2$).

Вектор-функции $\mathbf{u}_{01}, \mathbf{u}_{02}$ описывают соответственно объемные P - и S -волны, возбуждаемые в дальней зоне ($|z_1|, R_m \gg \lambda$) поверхностной нагрузкой $\mathbf{q}_0$. В соответствии с представлением (2.4) они аппроксимируются суперпозицией сферических волн, идущих от элементарных источников, заданных в узлах сетки (ξ_m, η_m) .

По заданному $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^{\text{inc}}$ вычисляются напряжения $\tau_0 = T_z \mathbf{u}_0$, необходимые для формирования правой части интегрального уравнения (1.4), причем для $\mathbf{x}_1 \in \Omega$ (в дальней от источника зоне) действие производных, входящих в T_z , на составляющие $\mathbf{u}_0^{\text{inc}}$ (2.4) с точностью до членов $O(R_m^{-2})$ сводится к умножению на определенные функции сферических углов [8]:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow i\kappa_n \cos \varphi_m \sin \psi_m, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} \rightarrow i\kappa_n \sin \varphi_m \sin \psi_m, \quad \frac{\partial}{\partial z_1} \rightarrow i\kappa_n \cos \psi_m$$

Хотя для применимости представления (2.4) размер ячеек сетки должен быть много меньше длины волны, это ограничение не приводит к заметным затратам на вычисление поля $\mathbf{u}_0$, так как на практике размеры трансдюсера обычно меньше или соизмеримы с длиной возбуждаемых волн. В некоторых же частных случаях, например для нагрузки $\mathbf{q}_0$, равномерно распределенной в круговой области, асимптотическое представление (2.3) может быть проинтегрировано по ξ, η в явном виде [9], что избавляет от необходимости использовать аппроксимацию по узлам (ξ_m, η_m) .

Распределение контактных напряжений $\mathbf{q}_0$ связано с типом рассматриваемого источника. Для источника P -волн вертикального типа $\mathbf{q}_0 = \{0, 0, \sigma_z\}$, для сдвигового $\mathbf{q}_0 = \{\tau_{xz}, 0, 0\}$ (здесь σ_z, τ_{xz} – постоянные или определяются через решение соответствующей контактной задачи).

В общем случае так называемого направленного трансдюсера электрический сигнал возбуждает в пьезокристалле плоскую P - или S -волну, падающую под некоторым углом γ на зону его контакта с поверхностью материала (в правом верхнем углу фиг. 1). Преломляясь и частично отражаясь на границе раздела сред, эта волна и возбуждает поле $\mathbf{u}_0^{\text{inc}}$ в зондируемом материале. В качестве $\mathbf{q}_0$ вполне достаточно взять распределение напряжений, получаемое при падении плоской волны на границу раздела двух упругих сред [3]. Решение этой задачи хорошо известно [10], причем здесь несложно учесть и специфические условия контакта трансдюсера, который может быть как жестко приклеен к поверхности, так и контактировать через тонкий слой жидкости или вязкого материала, передающего поперечные колебания (численные примеры смотри в депонированной статье, цитированной в сноске).

В случае интерфейсных трещин при взаимодействии поля $\mathbf{u}_0^{\text{inc}}$ с границей раздела материалов $z_1 = -h$ возникают дополнительные отраженные, преломленные и каналовые (типа Стоунли) волны, которые необходимо учесть в $\mathbf{u}_0$, $\boldsymbol{\tau}_0$ при решении интегрального уравнения (1.4) и вычислении $\delta\Gamma$. В этом случае для построения асимптотики $\mathbf{u}_0$ можно также воспользоваться интегральным представлением вида (2.1), но с ядром k для двуслойного полупространства. При этом в полученной асимптотике будет учтена не только граница $z_1 = -h$, но и вторичное отражение от поверхности $z_1 = 0$. Последнее необходимо при изучении дифракции на приповерхностных трещинах, когда величина h сравнительно мала, например при контроле отслоения тонких пленок. Однако для рассматриваемых заглубленных трещин ($h \gg \lambda$) вклад вторичного отражения от $z_1 = 0$ можно отбросить, сведя тем самым асимптотику $\mathbf{u}_0$ к виду

$$\mathbf{u}_0 \sim \begin{cases} \mathbf{u}_0^{\text{inc}} + \mathbf{u}_0^+, & z_1 \geq -h \\ \mathbf{u}_0^-, & z_1 \leq -h \end{cases} \text{ при } |z_1| = |z - h| \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

где $\mathbf{u}_0^\pm$ – отраженные и преломленные на границе $z_1 = -h$ ($z = 0$ в системе координат трещины) волны, рассматриваемые как волновые поля в верхнем ($z \geq 0$) и нижнем ($z \leq 0$) полупространствах, возбуждаемые некоторыми нагрузками $\mathbf{q}^\pm$, приложенными к поверхности $z = 0$. Как и $\mathbf{u}_0^{\text{inc}}$, эти поля можно точно задать в интегральной форме (2.1) с помощью матриц Грина $k^\pm$ соответствующих полупространств.

Координатная система трещины x связана в данном случае с системой x_1 соотношением $x = x_1 - x_c$, где $x_c = \{x_c, y_c, -h\}$ – координата центра трещины в системе x_1 . Преобразование Фурье по x, y интегральных представлений вида (2.1) для $\mathbf{u}_0^{\text{inc}}, \mathbf{u}_0^\pm$ приводит к следующим функционально-матричным соотношениям:

$$\begin{aligned} U_0^{\text{inc}}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= K(\alpha_1, \alpha_2, z - h) Q_0(\alpha_1, \alpha_2) e_0 \\ U_0^\pm(\alpha_1, \alpha_2, z) &= K^\pm(\alpha_1, \alpha_2, z) Q^\pm(\alpha_1, \alpha_2) \\ e_0 &= \exp[-i(\alpha_1 x_c + \alpha_2 y_c)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Символы матриц Грина K и K^- для нижних полупространств $z_1 \leq 0$ и $z \leq 0$ одинаковы по виду, но отличаются значениями входящих в них констант (волновых чисел κ_1, κ_2 или скоростей v_p, v_s) для верхнего ($-h \leq z_1 \leq 0$) и нижнего ($z_1 \leq -h$) материалов соответственно. Вид K^+ для верхнего полупространства получается из K^- заменой σ_n на $-\sigma_n$ ($n = 1, 2$) и также отличается значениями материальных констант.

Условия склейки на границе $z = 0$

$$\mathbf{u}_0^{\text{inc}} + \mathbf{u}_0^+ = \mathbf{u}_0^-, \quad \boldsymbol{\tau}_0^{\text{inc}} + \mathbf{q}_0^+ = \mathbf{q}_0^- \quad (2.7)$$

позволяют исключить неизвестные $Q^\pm$, выразив их через Q_0 (аргументы α_1, α_2

(параметры преобразования Фурье) здесь и далее в основном опущены)

$$\mathbf{Q}^- = L(K_0^+ T_h - K_h) \mathbf{Q}_0 e_0, \quad \mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}^- - T_h \mathbf{Q}_0 e_0 \quad (2.8)$$

$$L = [K_0^+ - K_0^-]^{-1}, \quad K_0^\pm = K^\pm(0)$$

$$K_h = K(-h) = \sum_{n=1}^2 K_n e^{-\sigma_n h}, \quad T_h = T_z K(z)|_{z=-h} = \sum_{n=1}^2 T_n K_n e^{-\sigma_n h}$$

$T_n = T_z(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_n)$, $T_z(\alpha_1, \alpha_2, d/dz)$ – матричный Фурье-символ оператора напряжений для площадки с нормалью Oz .

Соответственно из соотношений (2.5), (2.6) при $z = 0$

$$\mathbf{U}_0(0) \approx K_0^- \mathbf{Q}^- = \sum_{n=1}^2 K_{0n} e^{-\sigma_n h} e_0 \mathbf{Q}_0 \quad (2.9)$$

с $K_{0n} = K_0^- L(K_0^+ T_n - E) K_n$ и для поля $\mathbf{u}_0(x, y, 0) = \mathcal{F}^{-1} [\mathbf{U}_0(0)]$, падающего на трещину приходим к такому же по форме асимптотическому представлению, как и (2.4), в котором

$$R_m = [(x + x_c - \xi_m)^2 + (y + y_c - \eta_m)^2 + h^2]^{1/2}$$

φ_m, ψ_m – соответствующие угловые координаты точки $\mathbf{x} \in \Omega$ в сферической системе с центром в $(\xi_m, \eta_m, 0)$, а матрицы K_n заменены на K_{0n} .

Полученное таким способом асимптотическое представление учитывает как исходное волновое поле источника $\mathbf{u}_0^{\text{inc}}$, так и дополнительные объемные волны, возникающие при его взаимодействии с границей соединения материалов. Что касается возбуждаемых при этом каналовых волн типа Стоунли, они описываются вкладом вычетов в вещественных и близких к вещественной оси полюсах $\mathbf{U}_0$. В рассматриваемом случае они задаются полюсами элементов матрицы L в (2.8) (см. ниже соотношения (3.1)), т.е. нулями определителя матрицы $K_0^+ - K_0^-$, совпадающего с характеристическим уравнением для волны Стоунли. Каналовые волны играют важную роль при дистанционном зондировании вдоль границы соединения, например при дефектоскопии сварных швов трубопроводов. Их вклад в суммарную асимптотику падающего поля $\mathbf{u}_0$ также был реализован в данной модели.

3. Интегральное уравнение. По построению [4] символом ядра интегрального уравнения (1.4) является матрица $L(\alpha_1, \alpha_2)$, входящая в выражения (2.8). Для рассматриваемых соединений разномодульных материалов

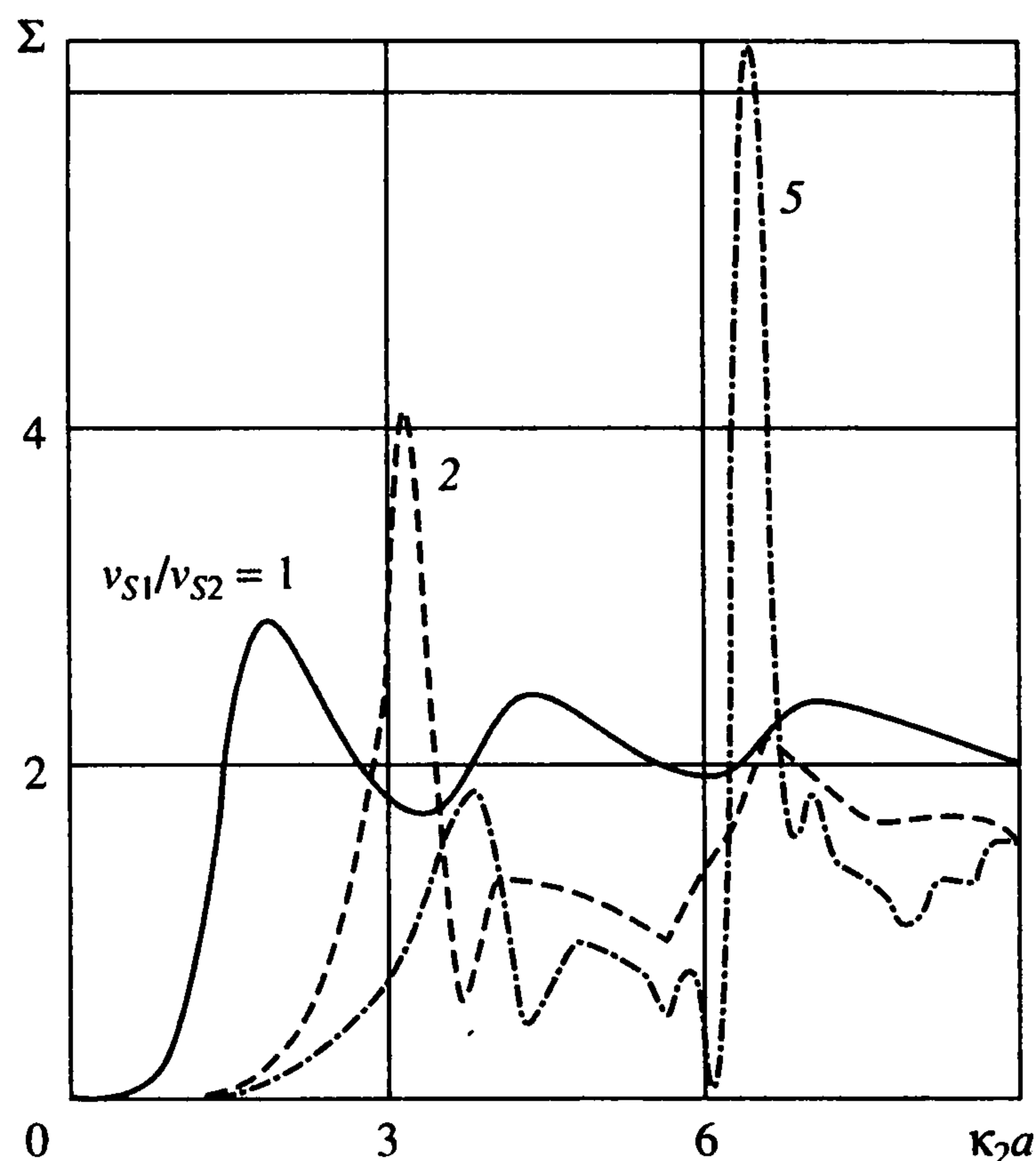
$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) = \begin{vmatrix} (i\alpha_2^2 N_0 - \alpha_1^2 M_{01})/\alpha^2 & -\alpha_1 \alpha_2 (M_{01} + iN_0)/\alpha^2 & -i\alpha_1 P_0 \\ -\alpha_1 \alpha_2 (M_{01} + iN_0)/\alpha^2 & (i\alpha_1^2 N_0 - \alpha_2^2 M_{01})/\alpha^2 & -i\alpha_2 P_0 \\ i\alpha_1 P_0 & i\alpha_2 P_0 & -M_{02} \end{vmatrix}$$

где

$$M_{0j} = \frac{M_j}{M_1 M_2 - \alpha^2 (P_2 - P_1)^2}, \quad j = 1, 2; \quad P_0 = \frac{P_2 - P_1}{M_1 M_2 - \alpha^2 (P_2 - P_1)^2}, \quad N_0 = \frac{i}{N_1 + N_2}$$

а функции M_j, N_j, P_j ($j = 1, 2$) имеют вид

$$M_j(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\kappa_{21}^2 \frac{\sigma_{j1}}{\Delta_j} + \kappa_{22}^2 \frac{\sigma_{j2}}{\Delta_j} \right), \quad N_j(\alpha) = \frac{1}{\mu_j \sigma_{2j}} \quad (3.1)$$



Фиг. 3

$$P_j(\alpha) = \frac{1}{\Delta_j} \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} \kappa_{2j}^2 - \sigma_{1j} \sigma_{2j} \right)$$

$$\Delta_j(\alpha) = 2\mu_j \left(- \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} \kappa_{2j}^2 \right)^2 + \alpha^2 \sigma_{1j} \sigma_{2j} \right)$$

$$\sigma_{kj} = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_{kj}^2}, \quad \text{Re } \sigma_{kj} \geq 0, \quad \text{Im } \sigma_{kj} \leq 0, \quad k, j = 1, 2$$

$$\kappa_{1j} = \omega / v_{pj}, \quad \kappa_{2j} = \omega / v_{sj}, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

В отличие от случая трещины в однородной среде матрица L получается здесь заполненной и система (1.4) не распадается на независимые уравнения относительно нормальной и касательных компонент скачка перемещений. Тем не менее вариационно-разностный метод вполне применим и в этом случае. В результате его реализации создана программа, позволяющая получать на персональном компьютере приближенные решения системы (1.4), необходимые как для определения диаграмм и коэффициента рассеяния энергии Σ при падении плоской волны на интерфейсную трещину под произвольным углом, так и коэффициент $\delta\Gamma$ при заданном источнике. Это дает возможность наряду с формой и ориентацией трещины учитывать и влияние соотношений упругих свойств материалов. Например, фиг. 3 иллюстрирует влияние соотношения скоростей S -волн на вид зависимости Σ от безразмерного параметра $\kappa_{12}a$ для квадратной трещины со стороной $2a$ при нормальном падении плоской P -волны.

Следует отметить, что вместо (2.7) могут быть рассмотрены и другие условия соединения материалов, например, описывающие неабсолютный контакт, когда учитывается деформация и упругие свойства бесконечно тонкой прослойки при клеевом или сварном соединении. Такие условия задаются матричным соотношением

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \boldsymbol{\tau}^+ \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^- \\ \boldsymbol{\tau}^- \end{Bmatrix} \quad \text{при } z = 0$$

в котором элементы матрицы B зависят от свойств прослойки и частоты [11], или в форме пружинного контакта [12]

$$\tau^+ = \tau^- = \tau, \quad u^+ - u^- = C\tau \quad \text{при } z = 0 \quad (3.2)$$

При этом описанная выше схема построения решения в целом остается прежней, меняется только конкретный вид символа ядра интегрального уравнения и асимптотики волновых полей.

Авторы благодарят А. Бострема (Гетеборг, Швеция), указавшего на преимущество использования обобщенного коэффициента Аулда в рассматриваемой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00908) и Фонда гражданских исследований и развития независимых государств бывшего Советского Союза (CRDF BRHE REC-004).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman R.K.* A system model for the ultrasonic inspection of smooth planar cracks // J. Nondestruct. Eval. 1990. V. 9. № 2–3. P. 197–211.
2. *Budreck D.E., Achenbach J.D.* Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method // J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 2. P. 405–412.
3. *Boström A., Wirdelius H.* Ultrasonic probe modelling and nondestructive crack detection // J. Acoust. Soc. America. 1995. 97. № 5. Pt 1. P. 2836–2848.
4. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 282–289.
5. *Scalia A., Sumbatyan M.A.* On efficient quantitative analysis in real-time ultrasonic detection of cracks // Ultrasonics. 1999. 37. № 3. P. 239–245.
6. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
7. *Auld B.A.* General electromechanical reciprocity relations applied to the calculation of elastic wave scattering coefficients // Wave Motion. 1979. V. 1. № 1. P. 3–10.
8. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
9. *Gridin D., Fradkin L.J.* The high-frequency asymptotic description of pulses radiated by a circular normal transducer into an elastic half-space // J. Acoust. Soc. America. 1998. V. 104. № 6. P. 3190–3198.
10. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
11. *Rokhlin S.I., Wang Y.J.* Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids // J. Acoust. Soc. America. 1991. V. 89. № 2. P. 503–515.
12. *Boström A., Bøvik P., Olsson P.* A comparison of exact first order and spring boundary conditions for scattering by thin layers // J. Nondestruct. Eval. 1992. V. 11. Nos. 3/4. P. 175–184.