

УДК 539.374

© 2002 г. Р.И. Непершин

ВНЕДРЕНИЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА В ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Внедрение плоского штампа в жесткопластическое полупространство моделируется центрированным полем линий скольжения с вращением прямолинейной свободной границы вокруг угловой точки штампа. К прямолинейной границе примыкает свободная от напряжений жесткая область, которая рассчитывается с помощью годографа скоростей и определяет искривление первоначально горизонтальной границы полупространства в процессе внедрения до наступления стационарной стадии движения штампа в неограниченной жесткопластической среде.

Задача о начальном плоском пластическом течении жесткопластического полупространства с прямолинейной границей при внедрении плоского гладкого штампа [1–3] имеет два решения – Прандтля и Хилла с одинаковым предельным давлением на штамп и различной кинематикой пластического течения. В решении Прандтля принимается, что жесткая область движется вместе со штампом и ограничена прямолинейной линией скольжения, вдоль которой имеет место разрыв скорости, тогда как в решении Хилла принимается наличие скольжения пластического материала вдоль границы контакта, которое возможно для идеально гладкого штампа. Решение Прандтля применимо также при контактном трении, которое приводит к образованию жесткой области под штампом, такой же, что и для гладкого штампа.

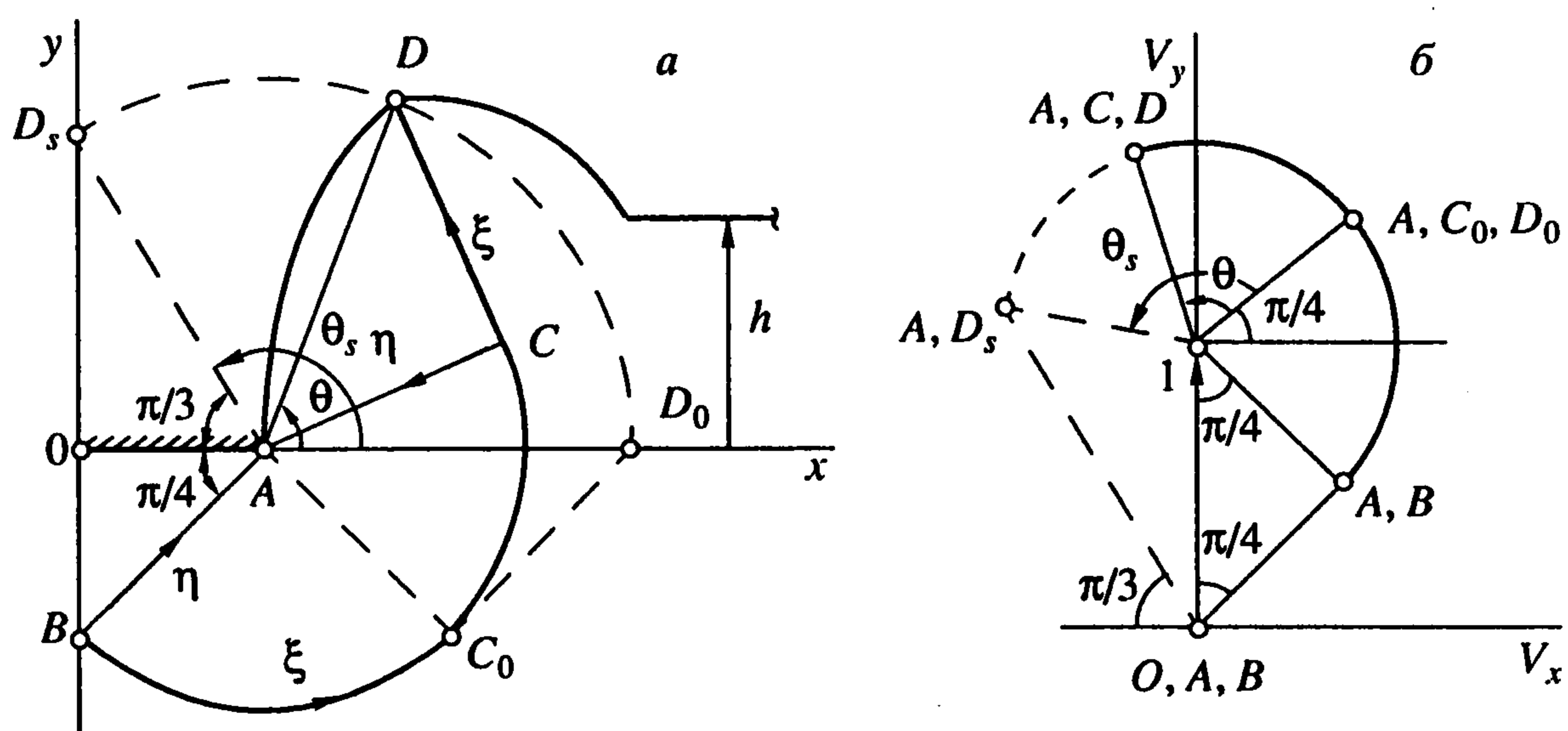
Известны автомодельные решения нестационарных задач пластического течения при внедрении гладкого клина [1] и при сжатии выпуклого полуограниченного тела плоским и криволинейным штампами [3]. Однако задача Прандтля–Хилла не относится к классу автомодельных, и до настоящего времени анализ процесса внедрения плоского штампа в жесткопластическую среду отсутствует. Известны расчеты начального внедрения жестких штампов в упруго-пластическое полупространство при плоской и осесимметричной деформации методом конечных элементов [4–6], но сильное искажение деформируемой границы около ребра штампа в результате сингулярности пластического течения в этой области существенно ограничивает возможности такого анализа.

Статистически возможные поля линий скольжения типа Прандтля использовались в технологических задачах для расчетов давления на штамп при его внедрении в полупространство в предположении, что известна прямолинейная вертикальная пластическая граница около штампа [7, 8], но процесс образования этой границы не рассматривался.

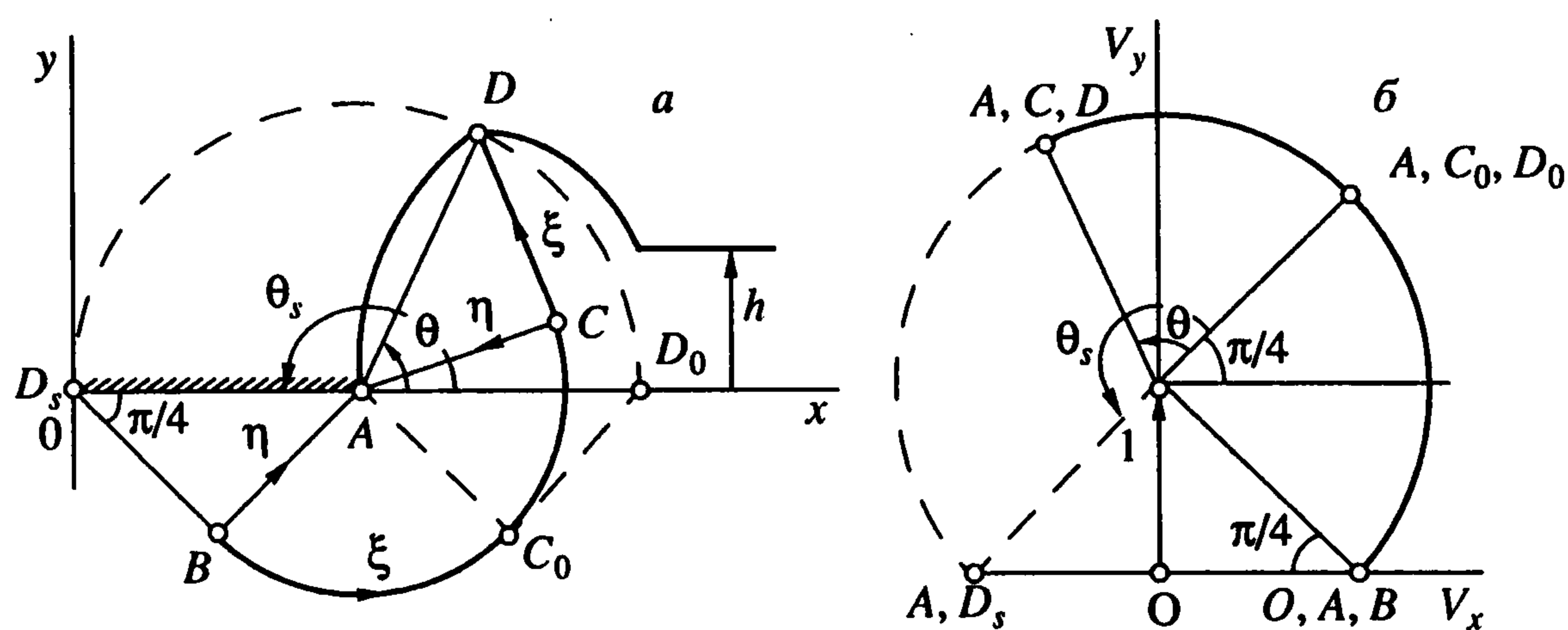
В настоящей работе предлагается модель нестационарного процесса внедрения штампа Прандтля–Хилла в жесткопластическую среду от начального пластического течения до наступления стационарного движения штампа в неограниченной среде.

Нестационарное внедрение плоского штампа в жесткопластическое полупространство моделируется центрированным полем линий скольжения типа Прандтля и Хилла с разрывным полем скоростей. С помощью годографа скоростей получена зависимость между перемещением штампа и углом поворота прямолинейной свободной границы и найдена криволинейная граница полупространства. В начале внедрения смещаемая граница полупространства имеет горизонтальный участок и два криволинейных участка, образуемых материалом, покидающим пластическую область. После исчезновения горизонтального участка криволинейная граница асимптотически приближается к центральной оси штампа, образуя глубокую воронку в момент перехода к стационарному пластическому течению.

При стационарном течении над штампом Прандтля образуется полость с прямолинейной наклонной свободной границей, выходящей на вертикальную ось симметрии и совпадающей с линией тока поля скоростей. При стационарном движении штампа Хилла в жесткопла-



Фиг. 1



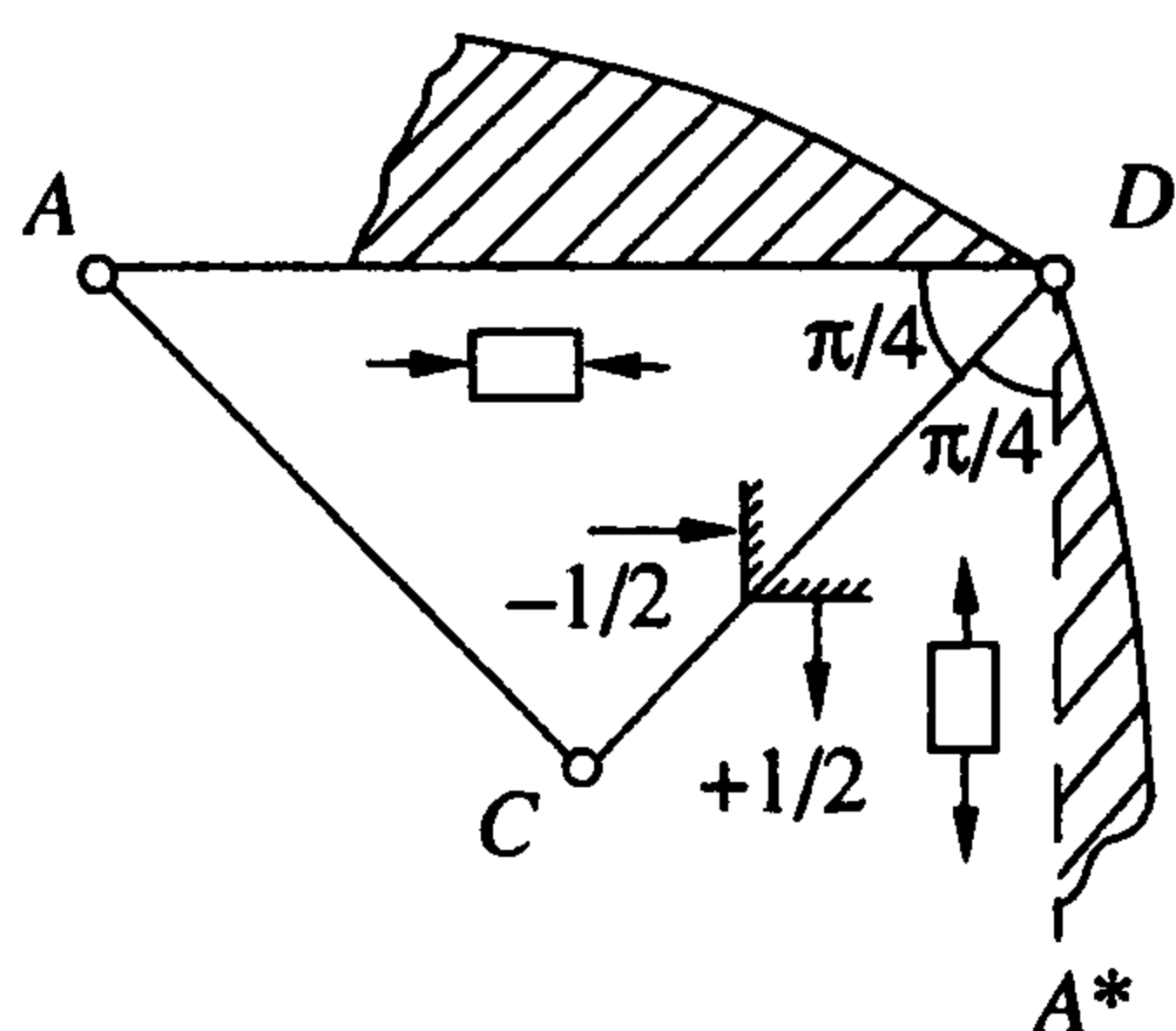
Фиг. 2

стической среде полость над штампом исчезает. В этом случае получаем обтекание бесконечно тонкой пластины, нижняя граница которой нагружена пластическим давлением, а верхняя граница совпадает со свободной стационарной границей пластического течения. Для обоих штампов получена зависимость давления на штамп от глубины внедрения, асимптотически приближающаяся к максимальному значению для стационарного течения.

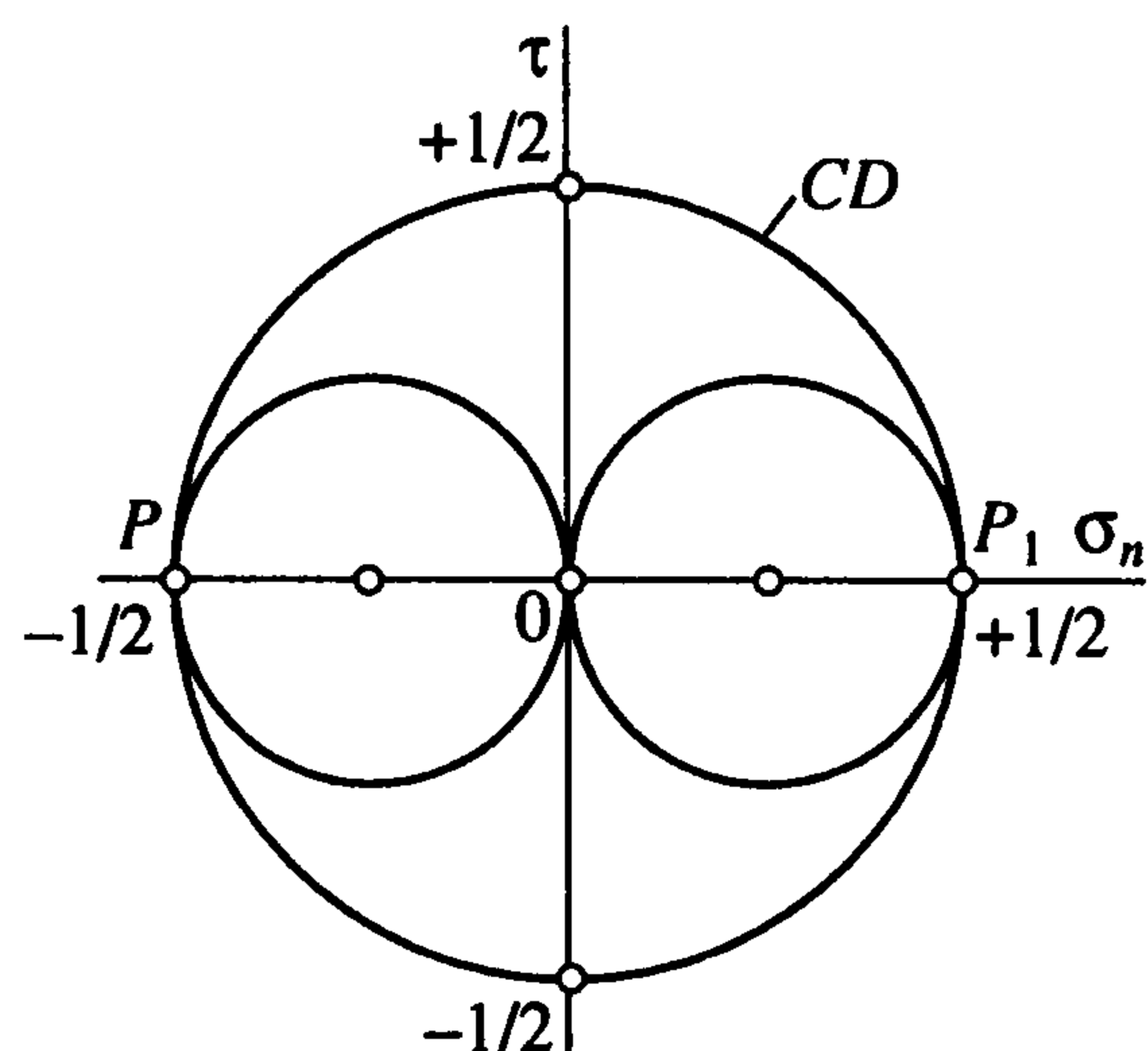
1. Модель пластического течения. При внедрении плоского штампа по нормали к границе жесткопластического полупространства область пластического течения имеет вертикальную плоскость симметрии, проходящую через центр штампа, который примем за начало декартовой системы координат. Рассмотрим правую половину пластической области. Координаты (x, y) , напряжения и скорости будем считать безразмерными, принимая полуширину штампа, удвоенную пластическую постоянную $2k$ (k – напряжение текучести при сдвиге) и скорость движения штампа за единицу длины, единицу напряжения и единицу скорости соответственно.

Поля линий скольжения и годографы скоростей, удовлетворяющие статическим и кинематическим граничным условиям задачи и условию неотрицательности диссипации энергии пластического течения, показаны на фиг. 1 для штампа Прандтля и на фиг. 2 для штампа Хилла. В решениях Прандтля и Хилла область ACD нагружена до пластического состояния сжатием вдоль горизонтальной свободной границы AD . Жесткий клин с вершиной в точке D также нагружен до пластического состояния сжатием вдоль границы полупространства. Давление на штамп, соответствующее пластическому нагружению области ACD , равно известному значению

$$p = 1 + \pi/2 \quad (1.1)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При внедрении штампа граница AD поднимается над границей полупространства, и несущая способность жесткого клина в окрестности точки D недостаточна для передачи пластического сжимающего напряжения из области ACD . В результате происходит разгрузка материала в области ACD и в жесткой области справа от границы CD . Полагаем, что жесткопластическая граница CD нагружена чистым сдвигом (фиг. 3). Область ACD нагружена одноосным сжатием $\sigma_2 = -1/2$ вдоль границы AD , а область A^*CD – одноосным напряжением $\sigma_1 = +1/2$ вдоль границы A^*D .

Круги Мора для чистого пластического сдвига вдоль линии скольжения CD и одноосного нагружения в указанных областях показаны на фиг. 4. Жесткие области перед границами AD и A^*D свободны от напряжений. Точки P и P_1 – общие полюсы для пластического сдвига вдоль линии скольжения CD и одноосного нагружения в областях ACD и A^*CD с непрерывными нормальными напряжениями на площадках, перпендикулярных к AD и A^*D . Среднее напряжение σ изменяется скачком по нормали к линии скольжения CD , принимая на ней нулевое значение.

Таким образом, при чистом сдвиге вдоль изолированной линии скольжения CD условие отсутствия пластического течения в жестких зонах выполняется для полей линий скольжения, показанных на фиг. 1 и 2. Угол наклона θ границы AD изменяется от нуля при начальном положении штампа до стационарного значения $\theta_s = 2\pi/3$ для штампа Прандтля и $\theta_s = \pi$ для штампа Хилла. При стационарном течении граница AD выходит на вертикальную линию симметрии и совпадает с линией тока. Над штампом Прандтля образуется замкнутая полость с наклонной свободной границей AD . Для штампа Хилла граница AD совпадает с верхней границей штампа $y = +0$, нижняя граница которого $y = -0$ нагружена пластическим давлением.

Поля линий скольжения и интегралы Генки определяют нормальное давление на штамп в зависимости от угла θ

$$p = (1 + \pi)/2 + \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_s \quad (1.2)$$

Предельные давления на штамп при стационарном течении равны $(3 + 7\pi)/6$ для штампа Прандтля и $(1 + 3\pi)/2$ для штампа Хилла.

Годографы скоростей показаны на фиг. 1, б для штампа Прандтля, и на фиг. 2, б для штампа Хилла. Наложим на систему вертикальную скорость, обратную скорости движения штампа. При этом штамп оказывается неподвижным, а жесткопластическая среда движется со скоростью $V = 1$. Годограф для штампа Прандтля определяется двумя равными разрывами скорости $[V] = 1/\sqrt{2}$, возникающими в точке B и распространяющимися вдоль жесткопластических границ BA и BCD поля линий

скольжения. Годограф для штампа Хилла определяется одним разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$. Поле скоростей области ABC физической плоскости отображается на годографе дугой окружности с центром в точке $(1, 0)$. Вектор скорости точек в области ACD является функцией угла θ , и для обоих штампов его компоненты можно записать в виде

$$V_x = C\zeta_-(\theta), \quad V_y = 1 + C\zeta_+(\theta); \quad \zeta_{\pm}(\theta) = (\cos \theta \pm \sin \theta) \quad (1.3)$$

$$C = \begin{cases} 1/2 & \text{для штампа Прандтля} \\ 1 & \text{для штампа Хилла} \end{cases}$$

2. Граница полупространства. При увеличении угла θ от нуля до θ_s граница AD области ACD вращается вокруг неподвижной угловой точки A , и точка D , выходящая на свободную внешнюю границу полупространства, описывает дугу окружности $D_0 - D_s$ (фиг. 1), уравнение которой

$$x = 1 + \cos \theta / C, \quad y = \sin \theta / C \quad (2.1)$$

Точка D является общей для левой свободной жесткой области, прилегающей к границе AD , и правой жесткой области,двигающейся со скоростью $V_y = 1$, $V_x = 0$. При внедрении штампа скорость, нормальная к границе AD , положительна, и материальные частицы пересекают границу AD , образуя свободную жесткую область перед этой границей. Одновременно с этим вследствие вращения области ACD материальные частицы пересекают границу DC , попадая в правую жесткую область. Так как скорость точки D в области ACD больше скорости правой жесткой зоны, то справа от точки D образуется понижающаяся криволинейная граница, переходящая в горизонтальную границу полупространства.

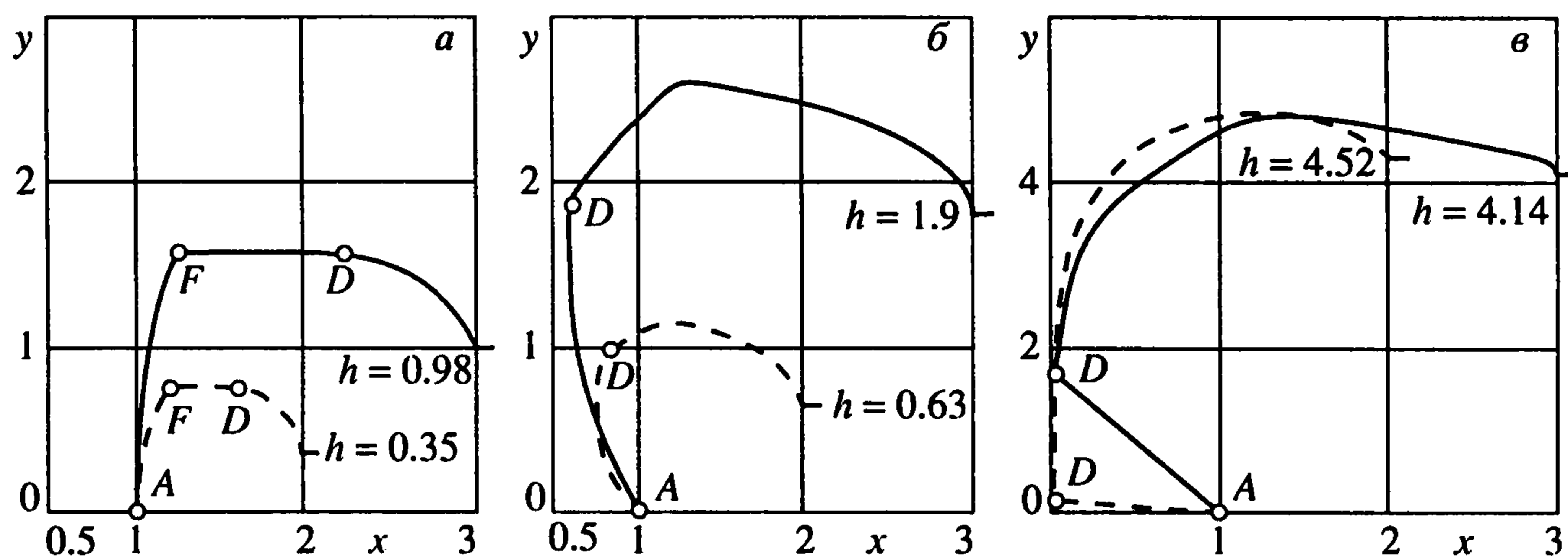
Смещение h границы полупространства относительно штампа и форма жестких областей являются функциями угла θ . В начале внедрения горизонтальная граница около штампа поднимается как жесткое тело над остальной границей полупространства, образуя плоский участок. Слева от этого участка появляется возрастающая криволинейная граница AF , образуемая материальными частицами, покидающими пластическую область в угловой точке штампа A . Точка D является правой границей плоского участка. При возрастании угла θ от нуля до значения θ^* плоский участок поднятой границы исчезает, и вся граница полупространства около штампа становится криволинейной.

Первая стадия внедрения, $\theta \leq \theta^$.* При наличии плоского участка поднятой границы координаты y этой границы и точки D определяются вторым уравнением (2.1), из которого находим приращение $dy = (\cos \theta / C) d\theta$. Приращения dh и dy пропорциональны скоростям V_y точки D области ACD и $V = 1$ правой жесткой области $dh = dy / V_y$, где V_y определяется вторым уравнением (1.3). Отсюда следует связь между dh и $d\theta$, и после интегрирования находим

$$h(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\cos \theta}{C[1 + C\zeta_+(\theta)]} d\theta, \quad \theta \leq \theta^* \quad (2.2)$$

Интеграл (2.2) определяет вертикальное смещение горизонтальной границы полупространства при $x \geq 1 + 1/C$. Координаты x и y криволинейной границы $D - D_0$ определяются уравнениями (2.1) при значениях $\theta_1 \leq \theta$ и вертикальным смещением $h_1(\theta, \theta_1)$ — интегралом (2.2) с нижним пределом θ_1

$$x = 1 + \cos \theta_1 / C, \quad y = \sin \theta_1 / C + h_1(\theta, \theta_1), \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta \quad (2.3)$$



Фиг. 5

Приращения координат dx и dy материальных точек, движущихся из угловой точки A , и образующих левую криволинейную границу AF , пропорциональны скоростям (1.3) с коэффициентом пропорциональности dh . После интегрирования с использованием соотношений (2.1) находим координаты x, y границы AF

$$x = 1 + \int_0^{\theta_1} \frac{\cos \theta \zeta_{\pm}(\theta)}{1 + C \zeta_{\pm}(\theta)} d\theta, \quad y = \frac{\sin \theta_1}{C}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta \quad (2.4)$$

Координаты точки F определяются уравнениями (2.4) при $\theta_1 = \theta$. Конечное значение угла θ^* первой стадии внедрения штампа находим из уравнений (2.1) и (2.4), приравняв координаты x точек D и F

$$\cos \theta^* = C \int_0^{\theta^*} \frac{\cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{1 + C(\cos \theta + \sin \theta)} d\theta \quad (2.5)$$

Численным решением уравнения (2.5) методом Ньютона получены значения $\theta^* = 1.479$ для штампа Прандтля, и $\theta^* = 1.434$ для штампа Хилла. На фиг. 5, а показаны границы полупространства для первой стадии внедрения штампов Прандтля (сплошная кривая, $p = 3.09$) и Хилла (штриховая кривая, $p = 2.99$).

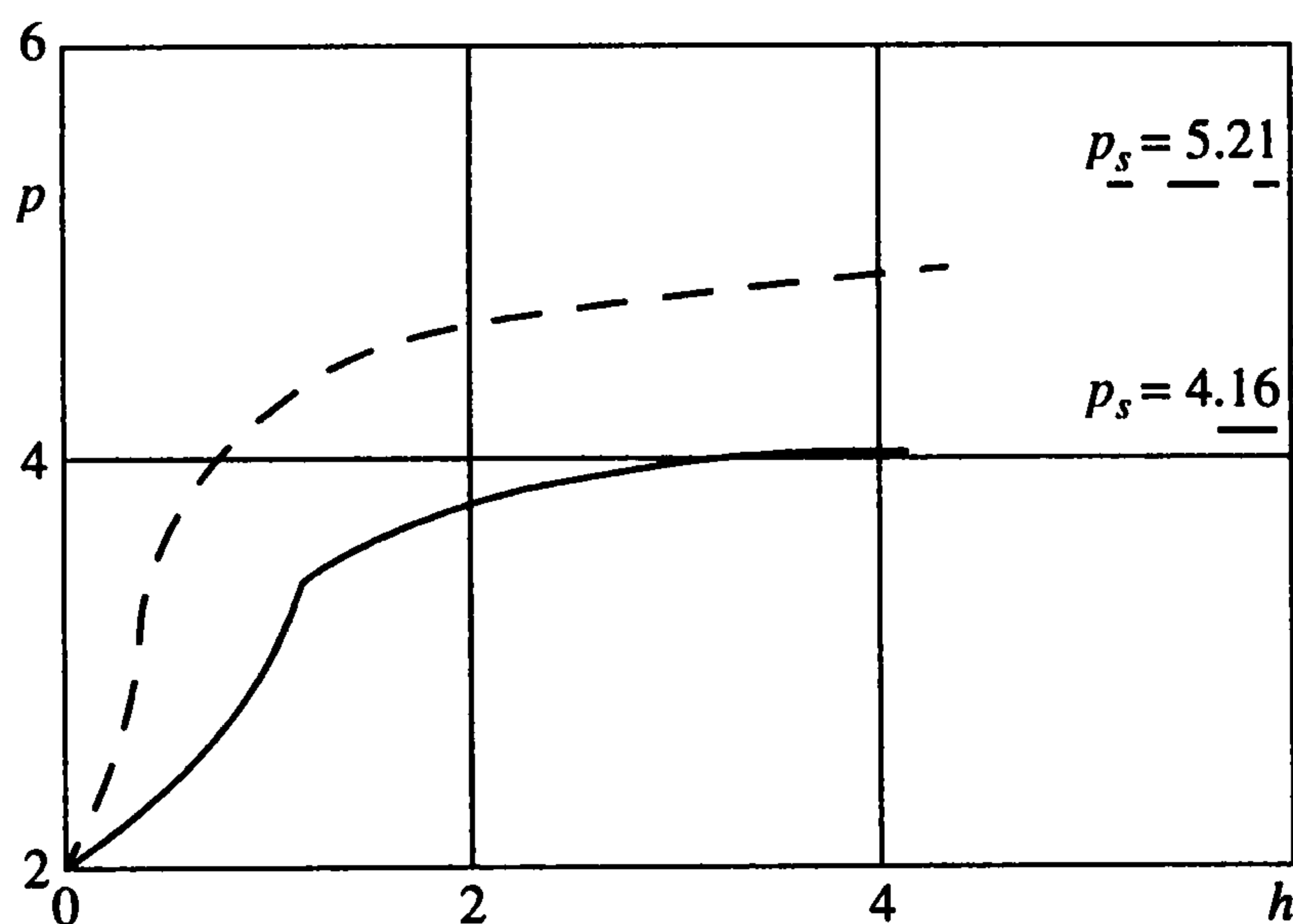
Вторая стадия внедрения, $\theta^ < \theta < \theta_s$.* На второй стадии внедрения штампа при увеличении угла θ на $d\theta$ прямая AD пересекает криволинейную границу левой жесткой области, соответствующую углу θ . Материальные частицы в окрестности точки D переходят из левой свободной жесткой области в область ACD и покидают ее через границу DC , попадая в правую жесткую область. Точку P левой границы жесткой области, попадающую в новую точку D при приращении угла $d\theta$, находим на пересечении прямой, проходящей через точку D параллельно вектору скорости (1.3), с криволинейной границей AD левой жесткой области, соответствующей углу θ .

Для этого криволинейную границу жесткой области слева от прямой AD аппроксимируем кусочно-линейной зависимостью. Направление вектора средней скорости точек границы AD при увеличении угла θ на $d\theta$ находим из соотношений (1.3)

$$\operatorname{tg} \alpha = V_y(\theta + d\theta/2) / V_x(\theta + d\theta/2)$$

Направление касательной к границе жесткой области вблизи точки D аппроксимируем углом наклона хорды между точками (x_j, y_j) и (x_{j+1}, y_{j+1}) этой границы

$$\operatorname{tg} \beta = (y_{j+1} - y_j) / (x_{j+1} - x_j)$$



Фиг. 6

Если координата y удовлетворяет неравенству

$$y_{j+1} < y < y_j$$

то выражения (2.6) определяют точку P границы жесткой области, смещаемую в точку D новой жесткой области. В противном случае уменьшаем индекс j до выполнения указанного неравенства.

Вектор смещения границы AD левой жесткой области в новое положение определяется приращениями координат

$$dx = 1 + \cos(\theta + d\theta) / C - x_P, \quad dy = \sin(\theta + d\theta) / C - y_P \quad (2.7)$$

и вертикальное смещение границы правой жесткой области определяется уравнением

$$dh = dy / [1 + C(\sin \theta + \cos \theta)] \quad (2.8)$$

На нестационарной стадии внедрения штампа $\beta \neq \alpha$ и выражения (2.6) однозначно определяют точку P . Равенство $\beta = \alpha$ означает начало стационарного пластического течения, при котором граница AD совпадает с направлением вектора скорости точек этой границы, и точка P не может быть найдена по выражениям (2.6). Поэтому начало стационарной стадии обтекания штампа можно определить лишь приближенно для значений θ , близких к θ_s .

Границы полупространства на второй стадии внедрения штампов Прандтля (сплошная кривая, $p = 3.85$) и Хилла (штриховая кривая, $p = 3.85$) показаны на фиг. 5, б. На второй стадии внедрения направление вектора скорости (1.3) точек области ACD приближается к направлению прямой AD на физической плоскости. Вектор смещения точки P и приращения dh быстро возрастают. Свободная жесткая область слева от прямолинейной границы AD исчезает, и граница правой жесткой области над точкой D принимает форму глубокой воронки по сравнению с полушириной штампа, которая асимптотически приближается к оси $x = 0$ при $\theta = \theta_s$. Границы полупространства при переходе к стационарному пластическому течению показаны на фиг. 5, в для штампа Прандтля (сплошная кривая, $p = 4.14$) и для штампа Хилла (штриховая кривая, $p = 5.0$). Соответствующие приближенные значения глубины внедрения при начале стационарного течения равны $h \approx 5$ для штампа Прандтля и $h \approx 7.5$ для штампа Хилла.

Для расчета криволинейных границ полупространства в процессе внедрения штампов Прандтля и Хилла написана программа. Накопленная относительная погрешность интегрального условия несжимаемости материала на всех стадиях внедрения не превышала 0.005 при угловом шаге $d\theta = 0.01\theta_s$.

На фиг. 6 показаны зависимости давления на штамп от глубины внедрения, кото-

Обозначим через x_D и y_D координаты новой точки D , определяемые выражениями (2.1) для угла $\theta + d\theta$, и найдем точку пересечения прямой, проходящей через точку D с углом наклона α , и прямой, проходящей через точки (x_j, y_j) и (x_{j+1}, y_{j+1}) с углом наклона β

$$\begin{aligned} x &= (y_D - y_j + x_j \operatorname{tg} \beta - \\ &\quad - x_D \operatorname{tg} \alpha) / (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \\ y &= y_j + (x - x_j) \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (2.6)$$

рые асимптотически приближаются к значениям $(3 + 7\pi)/6$ и $(1 + 3\pi)/2$ при стационарном обтекании штампов Прандтля (сплошная кривая) и Хилла (штриховая кривая).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1985. = Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
3. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
4. Lee C.H., Kobayashi S. Elastoplastic analysis of plane-strain and axisymmetric flat punch indentation by the finite-element method // Intern. J. Mech. Sci. 1970. V. 12. № 4. P. 349–370.
5. Hardy C., Baronet C.N., Tordion G.V. The elasto-plastic indentation of a half-space by a rigid sphere // Intern. J. Number. Meth. Engng. 1971. V. 3. № 3. P. 451–462.
6. Voyiadjis G.Z., Buckner N.E. Indentation of a half-space with a rigid indenter // Intern. J. Number. Meth. Engng. 1983. V. 19. № 10. P. 1555–1578.
7. Томленов А.Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
8. Johnson W., Mellor P.B. Engineering Plasticity. L. Van Nostrand Reinhold, 1975. = Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.

Москва
e-mail: nepershin_r@pop.mtu.ru

Поступила в редакцию
28.XI.2000