

УДК 539.374

© 2002 г. Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин

**О ВДАВЛИВАНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА  
В ИДЕАЛЬНОЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО  
ПРИ ДЕЙСТВИИ КОНТАКТНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**

Рассматривается общая плоская задача о вдавливании плоского штампа в жесткопластическое полупространство при действии поперечных и продольных контактных касательных напряжений. Используется условие полной пластичности и гиперболические уравнения общей плоской задачи теории идеальной пластичности [1]. Определяется снижение предельного давления на штамп в зависимости от контактных касательных напряжений.

**1. Основные уравнения.** Задачу о вдавливании плоского штампа в жесткопластическое полупространство при действии продольных и поперечных контактных касательных напряжений на границе штампа решаем с использованием условия полной пластичности, которое в главных напряжениях имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 2k \quad (1.1)$$

где  $k$  – предел текучести жесткопластического материала на сдвиг. Условие полной пластичности обеспечивает большую свободу пластического течения, приводит к квазилинейным гиперболическим дифференциальным уравнениям с эффективным алгоритмом решения краевых задач, включая разрывы и сингулярные точки, и соответствует сдвиговому механизму пластического течения твердых тел [2].

Ниже будем пользоваться безразмерными напряжениями, принимая  $2k = 1$  за единицу напряжения и ширину штампа за единицу длины. Среднее напряжение  $\sigma$  при условии (1.1) запишем в виде

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{1}{3} \quad (1.2)$$

Направляющие косинусы напряжения  $\sigma_3$  с осями координат  $x, y, z$  зададим углами  $\theta$  и  $\varphi$

$$n_1 = \cos(\theta/2)\cos\varphi, \quad n_2 = \cos(\theta/2)\sin\varphi, \quad n_3 = \sin(\theta/2) \quad (1.3)$$

Компоненты тензора напряжений в декартовых координатах  $\{x, y, z\}$  удовлетворяющие условию (1.1), можно выразить через  $\sigma, \theta$  и  $\varphi$  [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\cos^2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\sin^2\varphi \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1 - \cos\theta), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\sin\varphi\cos\varphi \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi, \quad \tau_{yz} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если длина штампа в направлении оси  $z$  значительно превышает его ширину в направлении оси  $x$ , то можно принять, что  $\sigma, \theta$  и  $\varphi$  не зависят от координаты  $z$ . Это случай общей плоской задачи теории идеальной пластичности, для которого были

получены [1] квазилинейные уравнения гиперболического типа для функций  $\sigma$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  с тремя уравнениями характеристик и дифференциальными соотношениями вдоль них

$$(dy/dx)_{\beta, \alpha} = \operatorname{tg}[\varphi \pm (\pi/4 + \mu)], \quad \operatorname{tg} 2\mu = \xi_{-}(\theta) \quad (1.5)$$

$$d\sigma \pm \xi_{+}(\theta) d\varphi = 0 \text{ вдоль } \beta \text{ и } \alpha \quad (1.6)$$

$$(dy/dx)_{\gamma} = \operatorname{tg} \varphi \quad (1.7)$$

$$\zeta(\theta) d\sigma + \sin \theta \sin 2\varphi d\varphi + d\theta = 0 \text{ вдоль } \gamma \quad (1.8)$$

Здесь

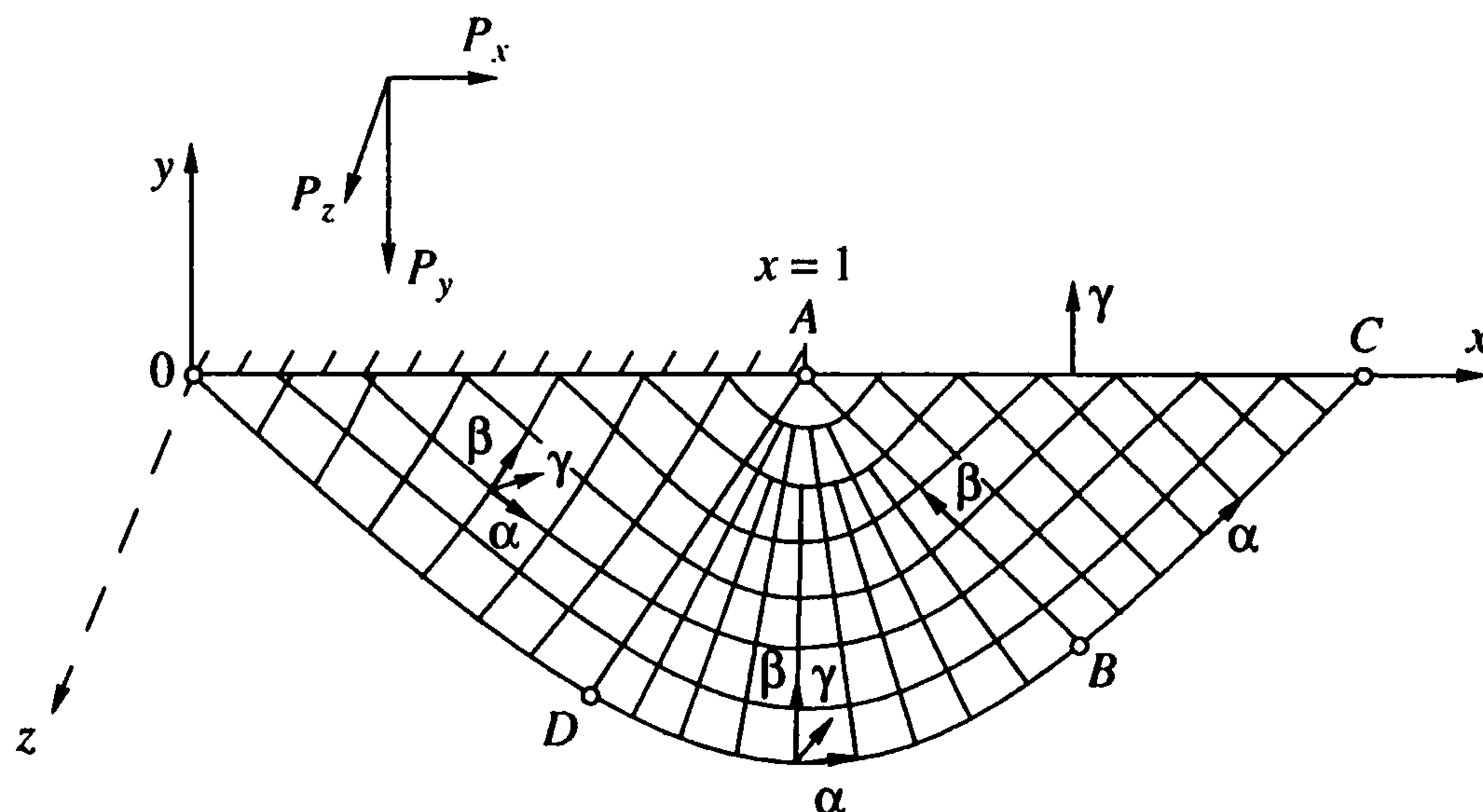
$$\xi_{\pm}(\theta) = (1 \pm \cos \theta) / (2\sqrt{\cos \theta}), \quad \zeta(\theta) = 2 \sin \theta / (1 + \cos \theta)$$

При  $\theta = 0$  из выражений (1.4) получаем  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \pm 0$ ; уравнения (1.5) определяют ортогональные характеристики плоской деформации с соотношениями Генки (1.6). При  $0 < \theta < \pi/2$  характеристики (1.5) неортогональны, и  $\gamma$ -характеристика (1.7) является биссектрисой угла между  $\alpha$ - и  $\beta$ -характеристиками (1.5).

**2. Граничные условия.** Принимаем, что на свободной границе полупространства  $AC$  (фиг. 1) нормальные напряжения удовлетворяют условию полной пластичности (1.1), т.е.  $\sigma_x = \sigma_z = \sigma_1 = \sigma_2 = -1$ ,  $\sigma_y = \sigma_3 = 0$ , и из соотношений (1.2) и (1.3) находим

$$\sigma = -2/3, \quad \varphi = \pi/2, \quad \theta = 0 \text{ на } AC \quad (2.1)$$

При  $\theta = 0$  характеристики (1.5) прямолинейны  $(dy/dx)_{\alpha, \beta} = \pm 1$ , и в области  $ABC$  имеет место однородное напряженное состояние (2.1) при плоской деформации.



Фиг. 1

Характеристики (1.5) определены только для положительных значений  $\cos \theta$ , поэтому на контактной границе штампа  $OA$  задаем угол  $\theta$  как параметр задачи в интервале

$$0 \leq \theta < \pi/2 \text{ на } OA \quad (2.2)$$

Второй параметр, угол  $\varphi$ , определяющий контактные касательные напряжения по уравнениям (1.4), задаем в интервале, зависящем от угла  $\theta$ ,

$$c\mu \leq \varphi < \pi/4 + \mu \text{ на } OA \quad (2.3)$$

$$0 \leq c \leq 1, \quad \mu = 1/2 \operatorname{arctg} \xi_{-}(\theta) \quad (2.4)$$

Верхний предел в неравенстве (2.3) определяется вырождением поля характеристик в линию, касательную к границе штампа, а нижний предел контролирует вырождение поля характеристик при больших углах  $\theta$ , когда угол между направлениями  $\alpha$ - и  $\beta$ -характеристик приближается к  $\pi$ .

В сингулярной точке  $A$  изменение среднего напряжения от свободной границы  $AC$  к границе штампа  $OA$  находим интегрированием уравнения (1.6) на вырожденной  $\alpha$ -характеристике

$$\sigma = -\frac{2}{3} + \int_{\pi/2}^{\varphi} \xi_+(\theta) d\varphi \quad (2.5)$$

Аналогичный интеграл на вырожденной  $\beta$ -характеристике используем для контроля несущей способности жесткого клина с вершиной в точке  $O$ .

**3. Плоская деформация.** При плоской деформации  $\theta \equiv 0$ . Ортогональные характеристики (1.5) в области  $ABD$  образуют центрированный веер с прямыми  $\beta$ -линиями, и интеграл (2.5) определяет значение  $\sigma$  в области однородного напряженного состояния  $OAD$

$$\sigma = -\frac{2}{3} - (\pi/2 - \varphi) \quad (3.1)$$

Давление на штамп и контактные касательные напряжения находим из выражений (1.4)

$$P_y = -\sigma_y = 1 + \pi/2 - (\varphi + \sin^2 \varphi), \quad P_z = \tau_{yz} = 0, \quad P_x = \tau_{xy} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \quad (3.2)$$

Для длины  $L$  характеристики  $AB$  и координаты  $x_c$  точки  $C$ , определяющих размеры и форму поля характеристик, имеем

$$L = \sin(\pi/4 - \varphi), \quad x_c = 1 + \sqrt{2} \sin(\pi/4 - \varphi) \quad (3.3)$$

где  $\varphi$  изменяется в интервале (2.3) при  $\mu = 0$ .

При  $\varphi = 0$  получаем гладкий штамп Прандтля; предельное давление имеет вид

$$P_y = 1 + \pi/2, \quad P_x = P_z = 0; \quad x_c = 2 \quad (3.4)$$

В этом случае клин с вершиной в точке  $O$  нагружен до пластического состояния и поле характеристик симметрично относительно середины штампа.

При  $\varphi = \pi/4$  из соотношений (3.2), (3.3) получаем

$$P_y = \frac{1}{2}(1 + \pi/2), \quad P_x = \frac{1}{2}, \quad P_z = 0, \quad L = 0, \quad x_c = 1 \quad (3.5)$$

Поле характеристик вырождается в линию сдвига, совпадающую с границей штампа, контактное касательное напряжение в направлении оси  $x$  равно пределу текучести на сдвиг, давление на штамп в 2 раза ниже давления на штамп Прандтля.

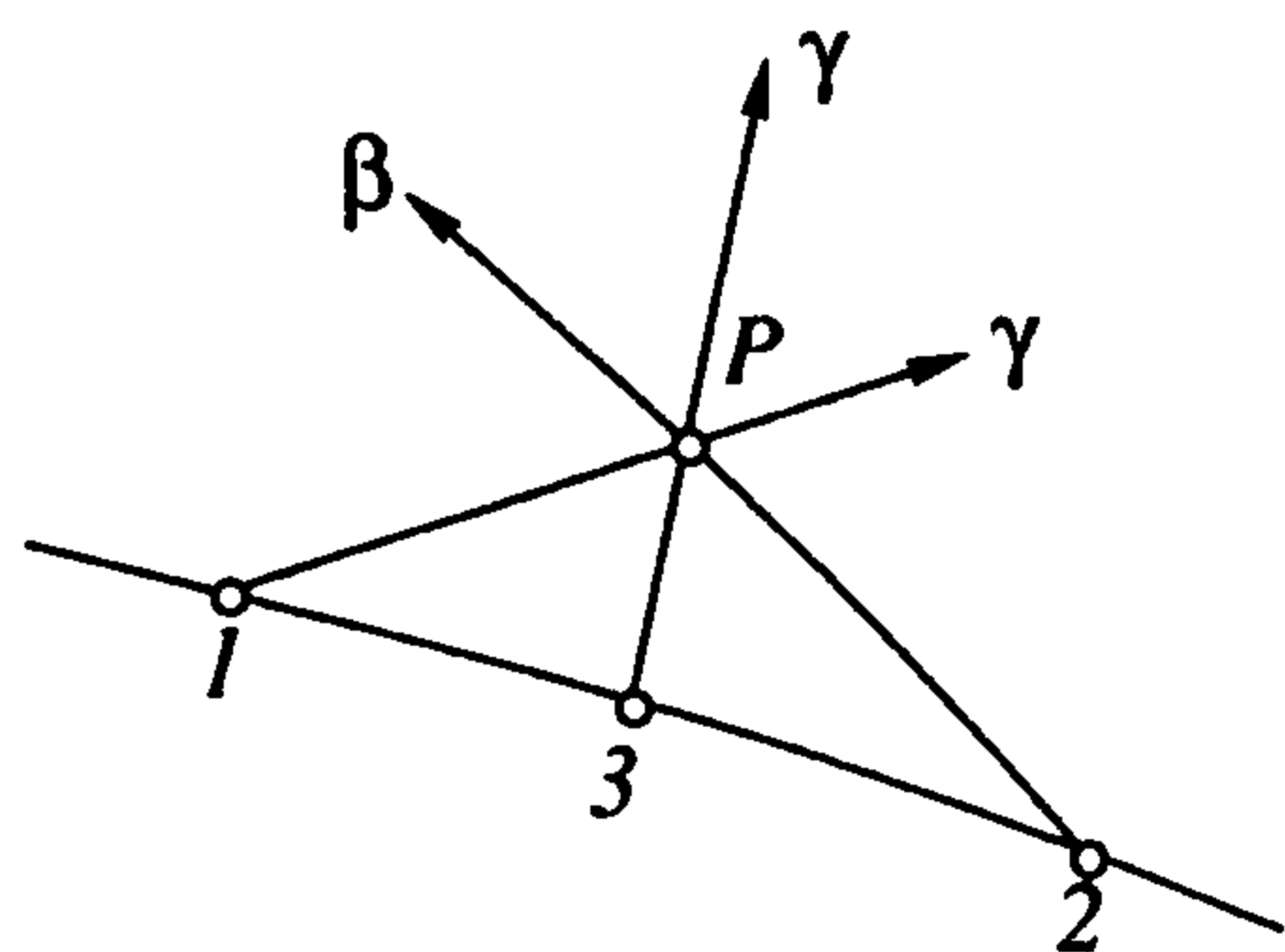
**4. Общая плоская деформация.** При  $\theta > 0$  поле характеристик и поле напряжений получаем численным интегрированием уравнений (1.5) – (1.8) с граничными условиями (2.1) – (2.5).

В регулярных узлах сетки характеристик, не принадлежащих сингулярной точке  $A$  и границе штампа  $OA$ , решаем задачу Коши для функций  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ , известных в точках 1 и 2 контура Коши (фиг. 2), аппроксимируя дифференциалы в уравнениях (1.5) – (1.8) конечными разностями и функции  $\varphi$ ,  $\theta$  – их средними значениями вдоль характеристик. Координаты  $x$ ,  $y$  точки  $P$  должны удовлетворять трем дифференциальным уравнениям характеристик, которые при конечноразностной аппроксимации имеют вид

$$(y - y_1)/(x - x_1) = \operatorname{tg}[\varphi - (\pi/4 + \mu)] \text{ на } \alpha \quad (4.1)$$

$$(y - y_2)/(x - x_2) = \operatorname{tg}[\varphi + (\pi/4 + \mu)] \text{ на } \beta \quad (4.2)$$

$$(y - y_3)/(x - x_3) = \operatorname{tg} \varphi \text{ на } \gamma \quad (4.3)$$



Фиг. 2

Неизвестные координаты точки 3 находим на пересечении  $\gamma$ -характеристики с контуром Коши, который аппроксимируем хордой между точками 1 и 2

$$(y_3 - y_1)/(x_3 - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \quad (4.4)$$

При известных координатах точки 3 значения функций  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  в этой точке находим линейной интерполяцией между точками 1 и 2, в которых эти функции заданы.

Дифференциальные соотношения вдоль трех характеристик принимают вид

$$\sigma - \sigma_1 = \xi_+(\theta) (\varphi - \varphi_1) \text{ на } \alpha \quad (4.5)$$

$$\sigma - \sigma_2 = -\xi_+(\theta) (\varphi - \varphi_2) \text{ на } \beta \quad (4.6)$$

$$\theta_3 - \theta = \zeta(\theta) (\sigma - \sigma_3) + \sin\theta \sin 2\varphi (\varphi - \varphi_3) \text{ на } \gamma \quad (4.7)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  — значения  $\sigma$  в точках 1, 2, 3.

Уравнения (4.1) – (4.7) содержат неизвестные координаты  $x$ ,  $y$  точки  $P$ , неизвестные функции  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  в точке  $P$  и неизвестные координаты  $x_3$ ,  $y_3$  точки 3. Для решения этой системы уравнений применяем итерационную процедуру.

Задаем начальные значения углов  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\theta = \theta_1$  на  $\alpha$ -характеристике 1 –  $P$ ;  $\varphi = \varphi_2$ ,  $\theta = \theta_2$  на  $\beta$ -характеристике 2 –  $P$  и  $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ ,  $\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$  на  $\gamma$ -характеристике 3 –  $P$ . Вычисления проводятся по следующей схеме.

1°. По уравнениям (4.1), (4.2) вычисляем  $x$ ,  $y$ , а по уравнениям (4.5), (4.6) вычисляем  $\sigma$  и  $\varphi$  в точке  $P$ .

2°. По уравнениям (4.3), (4.4) вычисляем координаты  $x_3$ ,  $y_3$  точки 3, линейной интерполяцией между точками 1 и 2 находим значения  $\sigma_3$ ,  $\varphi_3$ ,  $\theta_3$  в точке 3.

3°. По уравнению (4.7) вычисляем  $\theta$  в точке  $P$ .

4°. Вычисляем средние значения  $\varphi$  и  $\theta$  между точками 1 –  $P$ , 2 –  $P$ , 3 –  $P$  и переходим на шаг 1°.

Абсолютная разность последовательных значений  $\varphi$  и  $\theta$  в точке  $P$  порядка  $10^{-5}$  достигается за 2–3 итерации.

Поле характеристик в области  $ABD$  (фиг. 1) находим из решения задачи Гурса с известными значениями функций  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  на  $\beta$ -характеристике  $AB$  и в сингулярной точке  $A$ , вычисляя регулярные узлы сетки характеристик по уравнениям (4.1) – (4.7). Затем в области  $OAD$  решаем смешанную задачу с известными значениями функций  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  на  $\beta$ -характеристике  $AD$  и граничными условиями на  $OA$ . Координаты  $x$  и значения  $\sigma$  в узловых точках на границе  $OA$  находим из линейных уравнений (4.1) и (4.5), так как  $\varphi$  и  $\theta$  на  $OA$  известны.

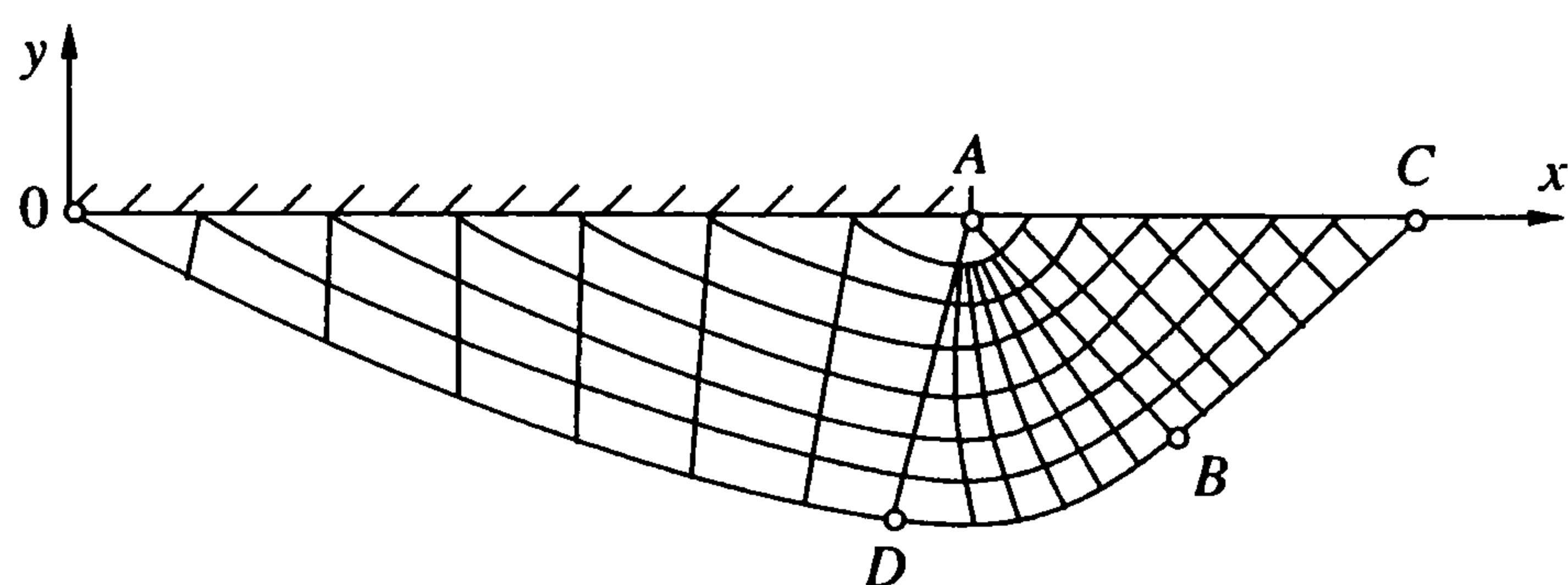
Поле характеристик в области  $OABD$  определяется с точностью до неизвестной длины  $L$  характеристики  $AB$ , которую находим из условия равенства нулю координаты  $x_0$  точки  $O$ . Алгоритм построения поля характеристик определяет  $x_0$  как непрерывную функцию параметра  $L$ , которая должна удовлетворять условию

$$x_0(L) = 0 \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) решаем итерационным методом Ньютона, аппроксимируя производную конечно-разностным отношением и принимая в качестве начального приближения длину  $L$  при плоской деформации (3.3)

$$L_{i+1} = L_i - x_0(L_i) \Delta L / [x_0(L_i + \Delta L) - x_0(L_i)], \quad \Delta L = 10^{-3} \quad (4.9)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$  — номер итерации. Итерации (4.9) приводят к значению  $|x_0| < 10^{-6}$  за 2–3 шага.



Фиг. 3

При приближении модуля контактного касательного напряжения  $P_{xz} = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$  к предельному значению  $1/2$  поле характеристик вырождается в линию, совпадающую с границей штампа. Если  $\varphi = \pi/2$  и  $\theta \rightarrow \pi/2$ , то получаем продольный сдвиг штампа по оси  $z$  при  $P_x = 0$  и  $P_z = 1/2$ . Из уравнений (2.5) и (1.4) находим  $\sigma = -2/3$ ,  $\sigma_z = -1/2$ . Это случай чистого сдвига при минимальном давлении на штамп

$$P_y = 1/2, P_x = 0, P_z = 1/2 \text{ при } \varphi = \theta = \pi/2 \quad (4.10)$$

Таким образом, при изменении контактных касательных напряжений предельное давление на штамп изменяется от максимального значения  $1 + \pi/2$  для гладкого штампа Прандтля до минимального значения  $1/2$  при чистом продольном сдвиге абсолютно шероховатого штампа.

На фиг. 1 показано поле характеристик для  $\theta = 1$ ,  $\varphi = 0.1563$ . При удалении от сингулярной точки  $A$   $\alpha$ - и  $\beta$ -характеристики почти ортогональны, так как  $\theta \rightarrow 0$  в соответствии с граничными условиями на  $AB$ . При приближении к границе штампа  $\alpha$ - и  $\beta$ -характеристики становятся заметно неортогональными, так как  $\theta$  возрастает, приближаясь к значению единица, заданному на  $OA$ .

На фиг. 3 показан пример поля характеристик при увеличении контактных касательных напряжений, соответствующих значениям  $\theta = 1.25$ ,  $\varphi = 0.588$ ; расчеты показывают, что нормальное давление на штамп практически постоянно с весьма небольшим повышением от значения 1.781 в точке  $O$  до 1.806 около угловой точки  $A$ .

В таблице приведены предельные средние давления на штамп  $P_y$ , контактные касательные напряжения  $P_x$ ,  $P_z$ ,  $P_{xz}$  и координаты  $x_c$  точки  $C$  пластической области для нескольких значений параметра  $\theta$ .

| $\theta$ | 0.5   |       |       | 1.0   |       |       | 1.25  |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_y$    | 2.537 | 1.848 | 1.405 | 2.402 | 1.950 | 1.410 | 2.250 | 1.781 | 1.395 |
| $P_x$    | 0.031 | 0.397 | 0.467 | 0.115 | 0.309 | 0.385 | 0.171 | 0.304 | 0.328 |
| $P_z$    | 0.008 | 0.116 | 0.161 | 0.063 | 0.189 | 0.296 | 0.128 | 0.263 | 0.348 |
| $P_{xz}$ | 0.032 | 0.414 | 0.495 | 0.131 | 0.362 | 0.486 | 0.214 | 0.402 | 0.478 |
| $x_c$    | 1.977 | 1.421 | 1.105 | 1.891 | 1.549 | 1.178 | 1.802 | 1.481 | 1.229 |

Приведенные выше численные результаты получены для плоского штампа при постоянных значениях контактных касательных напряжений. Разработанный метод интегрирования гиперболических дифференциальных уравнений общей плоской задачи теории идеальной пластичности может быть использован в случае неравномерного распределения контактных касательных напряжений, криволинейной границы штампа и конечной толщины заготовки применительно к технологическим задачам теории пластичности [3. 4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д., Максимова Л.А. О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 1. С. 39–41.
2. Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю. Полная пластичность в теории идеально-пластического тела // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 3. С. 333–334.
3. Друянов Б.А., Непершин Р.И. Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение. 1990. 272 с.
4. *Druyanov B.A., Nepershin R.I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier. 1994. 425 p.*

Москва. Чебоксары

Поступила в редакцию  
22.1.2001