

УДК (539.3+624.07):534.1

© 2002 г. А.П. Малышев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЧАСТОТНО-НЕЗАВИСИМОГО РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

Рассматривается нелинейная модель, описывающая диссипативные потери энергии, которые не зависят от частоты колебаний, но существенно зависят от амплитуды. Модель позволяет единообразно учесть рассеяние энергии в конструкциях и материалах при стационарных и переходных режимах, включая волновые процессы. На основе экспериментальных данных определены параметры модели для материалов с характерными видами зависимости рассеяния от амплитуды. В ряде практически важных случаев получены аналитические решения уравнения модели и выражения для коэффициента поглощения. В других случаях решения получены численным интегрированием. Модельная задача о продольных колебаниях однородного и составного стержня решена с помощью разностной схемы Годунова.

Конструкционное демпфирование, как известно, практически не зависит от частоты, но проявляет существенную зависимость от амплитуды. Аналогичный характер носит рассеяние энергии в конструкционных материалах, когда напряжения достаточно велики и имеют порядок предела выносливости. Указанные виды потерь обычно определяют основное рассеяние энергии при колебаниях конструкций. Именно они будут иметься в виду, когда речь будет идти о внутреннем рассеянии энергии. Иногда их удастся учесть путем введения в расчет отдельных параметров петли гистерезиса [1, 2]. Однако подобный подход применим, строго говоря, только к стационарным и близким к ним режимам. Что касается конструкционного демпфирования, его исследование обычно сводится к изучению потерь, вызванных сухим трением на контактных поверхностях в отдельных видах неподвижных соединений [2, 3].

В практических расчетах наиболее удобны линейные вязкоупругие модели. При этом они не связаны с конкретным типом динамического процесса. Однако описываемые ими декременты колебаний существенно зависят от частоты и не зависят от амплитуды. Поэтому область их применения ограничена, а проблема разработки адекватной и достаточно универсальной модели для описания внутреннего рассеяния энергии остается актуальной.

1. Описание модели. Анализ зависимостей между напряжениями и деформациями в задачах с внешним и внутренним трением показал, что их характерной особенностью является наличие комплекса $\sigma - \sigma_m$, где σ_m – напряжение в момент смены направления нагрузки. Будем считать, что рассеяние энергии связано с релаксацией только $\sigma - \sigma_m$, а не полного напряжения. Рассмотрим трехэлементную модель, структурно представляющую собой модель Максвелла, у которой параллельно вязкому элементу включен источник σ_m – напряжения, достигнутого в момент последней смены значения $\text{sign}(\dot{\epsilon})$ (точкой обозначено дифференцирование по времени t),

$$\epsilon = \sigma / E + \epsilon_v, \quad \sigma = \sigma_m + \sigma_v, \quad \sigma_v = |\mu \dot{\epsilon}_v|^{1/\alpha} \text{sign } \dot{\epsilon}_v \quad (1.1)$$

где E – модуль упругости, μ , ϵ_v – коэффициент вязкости и деформация вязкого элемента, σ_v – напряжение в вязком элементе, t – время. Сила сопротивления вязкого элемента в общем случае нелинейно зависит от $\dot{\epsilon}_v$. Когда $\alpha = 1$, при постоянном коэффициенте μ имеем демпфер с линейной характеристикой $\sigma_v = \mu \dot{\epsilon}_v$.

Для удобства дальнейшего изложения примем, что все напряжения отнесены к модулю упругости E , и сохраним за ними прежние обозначения. Из соотношений (1.1) следует

$$\sigma - \sigma_m = |\mu(\dot{\epsilon} - \dot{\sigma})|^{1/\alpha} \text{sign}(\dot{\epsilon} - \dot{\sigma})$$

После возведения в степень α и преобразований получим

$$\dot{\sigma} = \dot{\epsilon} - \left[|\sigma - \sigma_m|^\alpha \text{sign}(\sigma - \sigma_m) \right] / \mu$$

Пусть $1/\mu = \beta|\dot{\epsilon}|$. Тогда, приняв во внимание, что $\text{sign}(\sigma - \sigma_m) = \text{sign} \dot{\epsilon}$, имеем

$$\dot{\sigma} = \left(1 - \beta |\sigma - \sigma_m|^\alpha \right) \dot{\epsilon} \quad (1.2)$$

Особенностью модели (1.2) является способность одновременно фиксировать постоянные уровни напряжений и деформаций. Ее можно рассматривать как модель Максвелла с переменным временем релаксации, которое связано специфической нелинейной зависимостью с напряжениями и деформациями

$$\dot{\sigma} = \dot{\epsilon} - \sigma / \tau, \quad \tau^{-1} = \beta \dot{\epsilon} |\sigma - \sigma_m|^\alpha / \sigma \quad (1.3)$$

Модели Максвелла с переменным временем релаксации применяются, например, для описания высокоскоростного деформирования материалов [4].

Важным частным случаем является действие гармонических напряжений $\sigma = A \sin \omega t$. Для определенности полагаем, что начальные напряжения и деформации отсутствуют. Когда $\alpha = 0.5, 1$ и 2 , соотношение (1.2) можно проинтегрировать в замкнутой форме и получить аналитические выражения для деформаций

$$\begin{aligned} \epsilon_+ &= -\frac{2A}{z^2} \left[\sqrt{sz} + \ln(1 - \sqrt{sz}) \right] \\ \epsilon_- &= \frac{2A}{z^2} \left[\ln(1 - \sqrt{1-sz}) + \sqrt{1-sz} - z - \ln(1-z) \right], \quad \alpha = 0.5 \\ \epsilon_+ &= -\frac{A}{z} \ln(1-sz), \quad \epsilon_- = \frac{A}{z} \left\{ \ln[1 - (1-s)z] - \ln(1-z) \right\}, \quad \alpha = 1 \\ \epsilon_+ &= \frac{A}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+s\sqrt{z}}{1-s\sqrt{z}} \\ \epsilon_- &= \frac{A}{2\sqrt{z}} \left[\ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - \ln \frac{1+(1-s)\sqrt{z}}{1-(1-s)\sqrt{z}} \right], \quad \alpha = 2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$s = \sin \omega t, \quad T = 2\pi / \omega, \quad z = \beta A^\alpha < 1$$

где ϵ_+ соответствует нагрузке в интервале времени $0 < t \leq T/4$, а ϵ_- – разгрузке в интервале $T/4 < t \leq T/2$. Во втором полупериоде соответствующие зависимости $\epsilon(t)$ для нагрузки и разгрузки меняют знаки на противоположные.

В качестве меры рассеяния энергии примем коэффициент поглощения ψ , который определяется как отношение энергии, рассеянной в течение цикла колебаний,

к максимальной потенциальной энергии в цикле [2]. Величины ψ , соответствующие (1.4), определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{8}{z^2} [z + \ln(1-z)] + \frac{8}{3z^4} [2(1-z)^3 - 9(1-z)^2 + 18(1-z) - 11 - 6\ln(1-z)], \quad \alpha = 0.5 \\ \psi &= -\frac{4}{z^2} [2z + (2-z)\ln(1-z)], \quad \alpha = 1 \\ \psi &= -\frac{2}{z} \left[\ln(1-z) + (1+\sqrt{z})\ln(1+\sqrt{z}) + (1-\sqrt{z})\ln(1-\sqrt{z}) \right], \quad \alpha = 2\end{aligned}\tag{1.5}$$

Для других α и $\sigma(t)$ значения $\varepsilon(t)$ и ψ можно определить численным интегрированием уравнения (1.2). Когда нагрузка или разгрузка не являются монотонными, на траектории в плоскости σ , ε появляются дополнительные "вложенные" петли гистерезиса. Если внутренняя петля замыкается, а нагрузка или разгрузка продолжается, то σ_m принимает значение, соответствующее ближайшей внешней петле либо незамкнутой траектории, по которым проходит дальнейшее деформирование. Такой алгоритм смены σ_m достаточно просто реализуется в процессе численного интегрирования.

2. Постановка модельной задачи. Описанная выше модель внутреннего рассеяния энергии была использована для исследования продольных колебаний стержня. Уравнения динамики прямолинейного стержня постоянного сечения принимают в этом случае вид

$$\sigma' = \dot{U}, \quad \dot{\sigma} = (1 - \beta |\sigma - \sigma_m|^\alpha) U' \tag{2.1}$$

Здесь U, x – скорость и координата сечения вдоль оси стержня, штрих означает производную по x . Напряжения, как и выше, отнесены к модулю упругости, U – к скорости звука в материале, x – к длине стержня, t – к времени пробега акустической волны вдоль стержня.

Стержень закреплен в сечении $x = 1$. В качестве характерных будут рассматриваться динамические режимы в сечении $x = 0.5$.

Система (2.1) интегрировалась численно методом С.К. Годунова [5]. На равномерной сетке со сторонами ячейки $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ и $\Delta t = t^* - t_*$

$$\begin{aligned}U^* &= U_* + (\sigma_n - \sigma_{n-1})\Delta t / \Delta x \\ \sigma^* &= \sigma_* + \left(1 - |\sigma^* - \sigma_m|^\alpha\right) b, \quad b = (U_n - U_{n-1})\Delta t / \Delta x\end{aligned}\tag{2.2}$$

Звездочкой в верхнем и нижнем индексах отмечены среднеинтегральные величины на сторонах расчетной ячейки t^* и t_* соответственно, индексами $n-1$ и n отмечены среднеинтегральные величины на сторонах x_{n-1} и x_n .

Для решения второго уравнения (2.2) использовался метод Ньютона.

$$\sigma^{i+1} = \sigma^i - \frac{\sigma^i - \sigma_* - b + \beta b |\sigma^i - \sigma_m|^\alpha}{1 + \alpha \beta |b| |\sigma^i - \sigma_m|^{\alpha-1}}, \quad \sigma^0 = \sigma_* + b \tag{2.3}$$

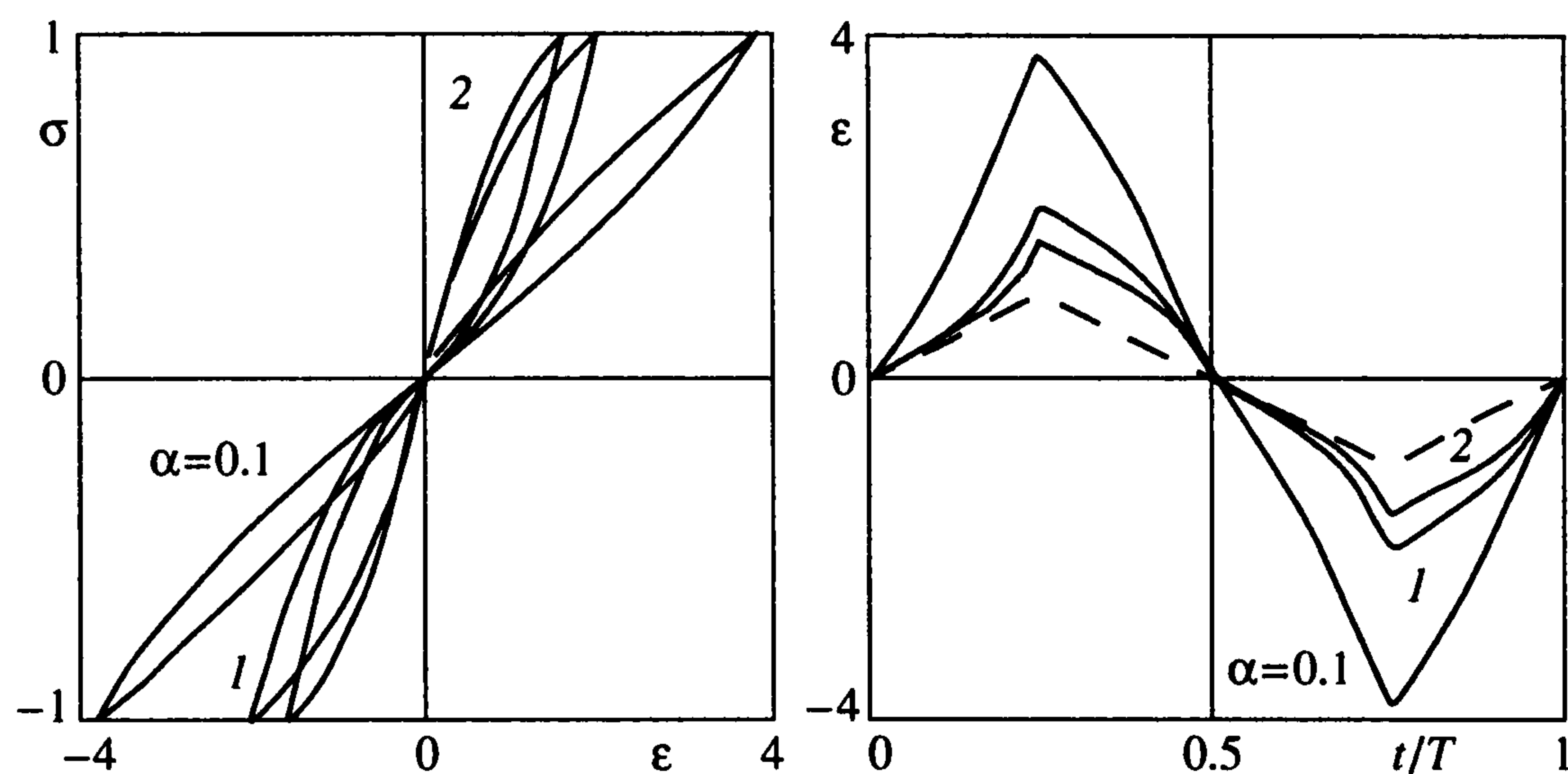
где σ^i – значение σ^* на i -й итерации. Здесь учтено, что

$$\text{sign}(\sigma^* - \sigma_m) = \text{sign } \dot{\sigma} = \text{sign } b$$

Для расчета распада разрыва при $x = x_n$ использовались соотношения на характеристиках системы (2.1)

$$\sigma_n + jU_n = \left(\sigma + jU - \beta b |\sigma - \sigma_m|^\alpha / 2 \right)_j \tag{2.4}$$

где j – направляющий косинус внутренней нормали к стороне $x = x_n$ расчетной ячейки.



Фиг. 1

Нижний индекс $j = -1$ соответствует ячейке на слое t_* , примыкающей к $x = x_n$ со стороны $x < x_n$, а индекс $j = +1$ – аналогичной ячейке со стороны $x > x_n$.

В расчетах принималось $\Delta t = \Delta x = 0.001$ и выполнялись три итерации по методу Ньютона. Проверка сходимости показала, что погрешность вычисления амплитуд напряжения при этом не превышала 0.02%.

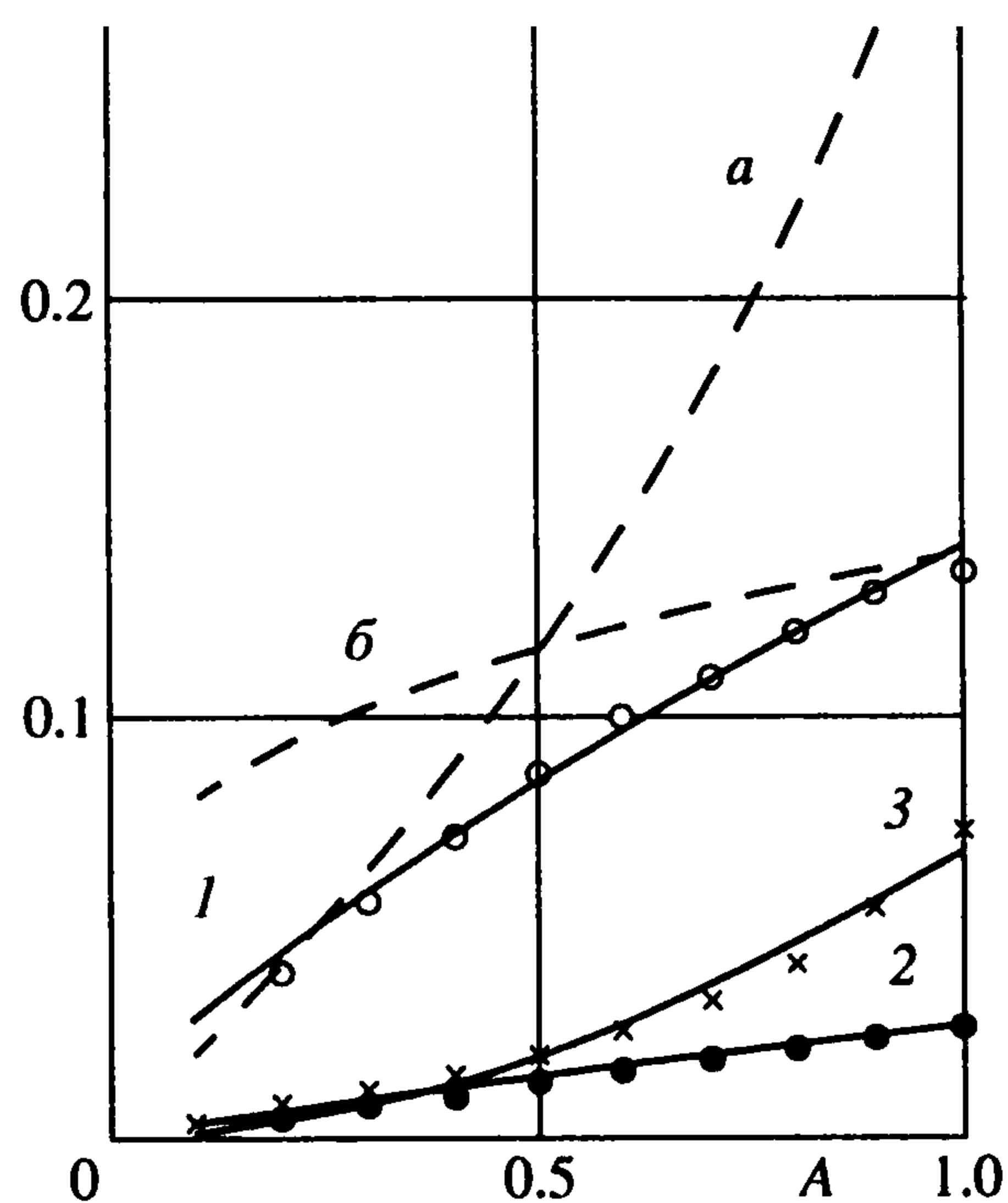
3. Результаты численных расчетов. Расчеты петель гистерезиса для разных законов $\sigma(t)$, в том числе имеющих вид "линейного синуса" и меандров с различными скоростями нарастания и спада нагрузки, показали, что определяемые уравнением (1.2) петли гистерезиса, а следовательно, и коэффициенты поглощения не зависят от частоты. Они остаются неизменными, если в пределах каждого цикла нагрузка и разгрузка – монотонные функции времени. На фиг. 1 слева приведены петли гистерезиса для $A = 1$, $\beta = 0.8$ и разных значений α . За счет искажений зависимости $\epsilon(t)$ с изменением параметров рассеяния α и β меняются как размеры, так и форма петли. Характерные искажения $\epsilon(t)$ видны на фиг. 1 справа для напряжения, которое изменяется по закону "линейного синуса". Этот закон показан там же штриховой линией.

В соответствии с соотношениями (1.2) и (1.5) коэффициент поглощения является функцией α и z . Если нормировать напряжения по разным характерным значениям M и M_1 , то при фиксированной величине α из условия неизменности ψ следует

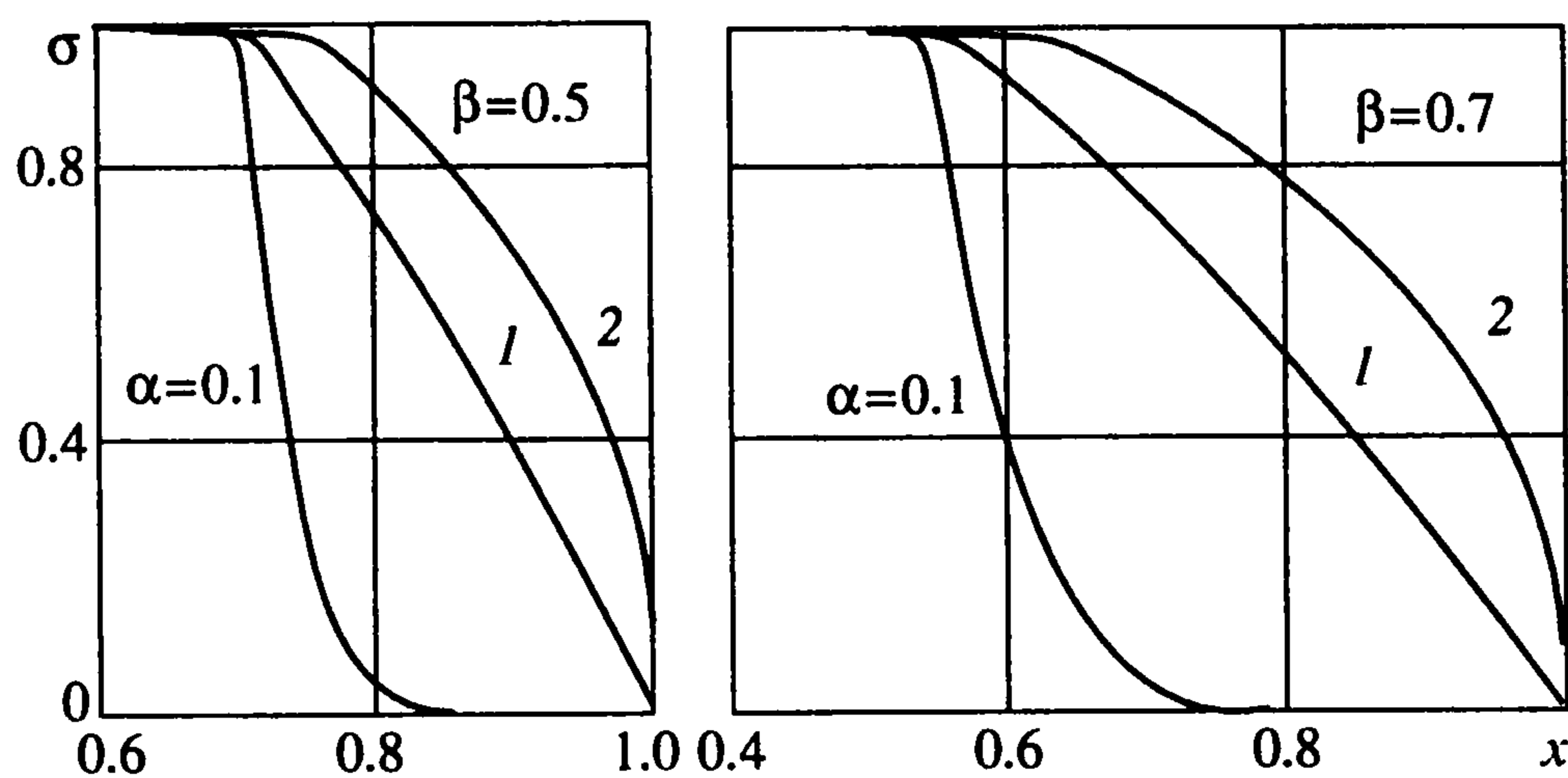
$$\beta_1 = \beta(M_1 / M)^\alpha \quad (3.1)$$

В дальнейшем напряжения нормируются по максимальному значению. В частности, когда они меняются по гармоническому закону, принимается $A = 1$. При выборе другого нормирующего значения M_1 результаты пересчитываются простым умножением на M_1/M , причем они будут соответствовать значению β_1 , определяемому выражением (3.1).

Значения α и β для конкретных материалов и конструкций можно определить проведением нелинейной регрессии с помощью модели (1.2) по экспериментальным зависимостям $\psi(A)$. На фиг. 2 показаны такие зависимости для троса (светлые точки) и единичной проволоки (темные точки) при $M = 98$ МПа, а также для стали 12×13 после закалки (крестики), $M = 343$ МПа [6]. Сплошные линии соответствуют зависимостям, которые описывает модель (1.2) при следующих значениях параметров: $\alpha = 0.61$, $\beta = 0.19$ (кривая 1), $\alpha = 0.92$, $\beta = 0.04$ (кривая 2), $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.094$ (кривая 3). Далее будем называть зависимости $\psi(A)$ амплитудными характеристиками рассеяния энергии. Видно, что модель хорошо воспроизводит экспериментальные зависимости даже в случае десятикратного изменения амплитуды. При этом моделируются амплитудные характеристики разного типа: мягкая (1), линейная (2) и жесткая (3).



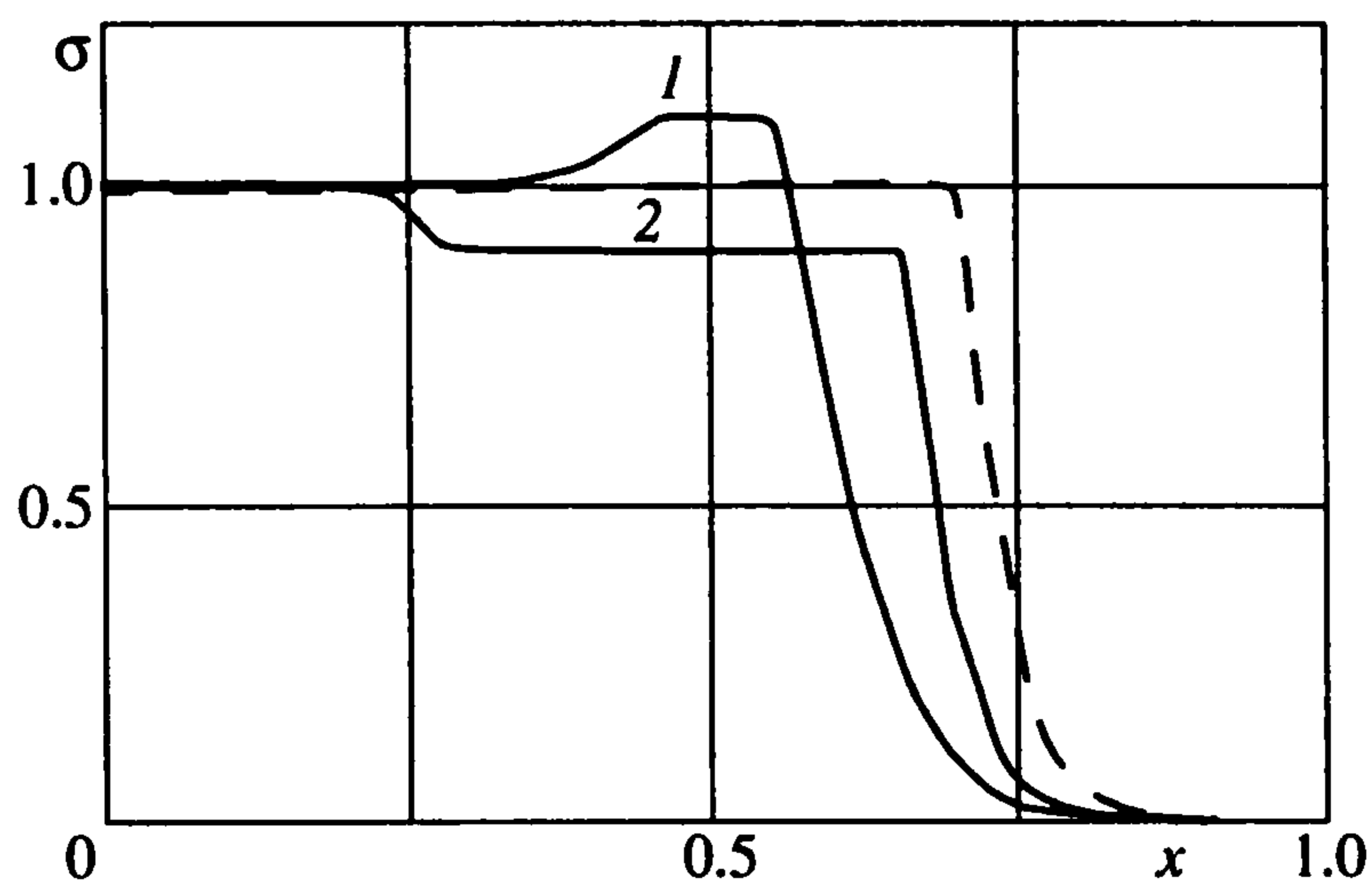
Фиг. 2



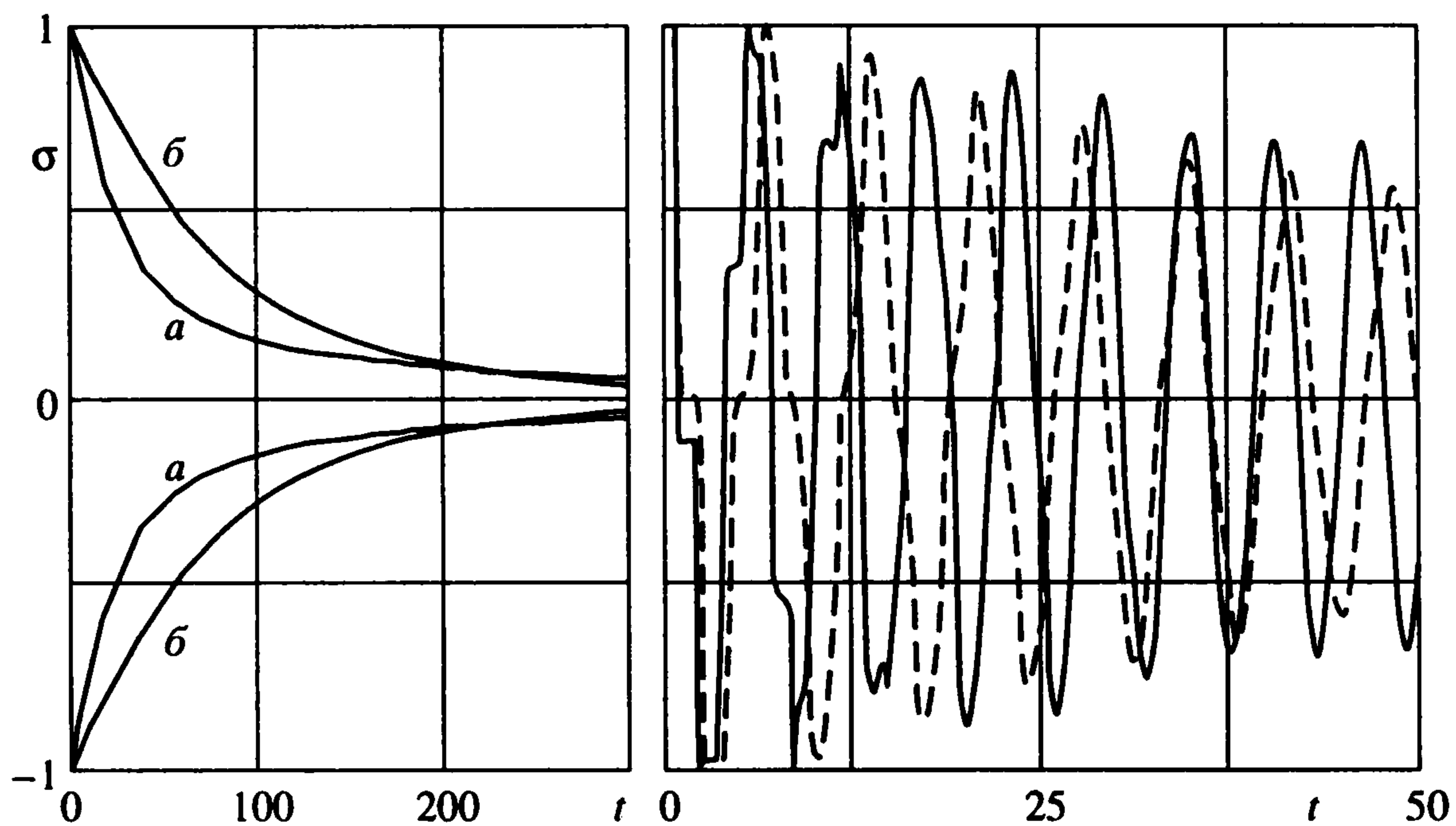
Фиг. 3

Тип зависимости $\psi(A)$ существенным образом влияет на форму фронта волны. На фиг. 3 в момент $t = 1$ показана головная часть волны напряжений, возникающей в стержне при внезапном приложении к торцу $x = 0$ постоянного единичного напряжения. В случае малой величины α , т.е. для мягкой амплитудной характеристики, фронт вогнутый, имеет положительную кривизну. Когда $\alpha > 1$, что соответствует жесткой характеристике рассеяния, он становится выпуклым. Параметр β определяет в основном ширину фронта и его скорость. С увеличением β скорость фронта падает, он сильнее размывается и становится шире. После прохождения фронта за ним устанавливается постоянное напряжение.

На границе участков стержня с различным уровнем затухания наблюдается распад разрыва, причем он сильнее для участков с мягкими характеристиками рассеяния. На фиг. 4 линией 1 показан распад разрыва при переходе волны из участка с относительно сильным затуханием ($\beta = 0.7$) в участок с более слабым демпфированием ($\beta = 0.5$). Для всего стержня $\alpha = 0.1$. Распад разрыва сопровождается ростом напряжений в отраженной и прошедшей волнах. Линией 2 показан распад разрыва на стыке участков, расположенных в обратном порядке. В этом случае после прохода фронта



Фиг. 4



Фиг. 5

через стык напряжения по обе стороны от него ниже, чем в однородном стержне. Волна в однородном стержне при $\beta = 0.5$ показана штриховой линией.

Были рассмотрены свободные колебания предварительно растянутого стержня с начальными напряжениями $\sigma = 1$ во всех сечениях. В момент $t = 0$ освобождался его торец $x = 0$. На фиг. 5 слева приведены огибающие амплитуд при $\alpha = 0.93$ (кривые *a*) и $\alpha = 0.1$ (кривые *б*). В обоих случаях полагалось, что $\beta = 0.5$. Соответствующие зависимости $\psi(A)$ показаны на фиг. 2 также линиями *a* и *б*. Характеристика рассеяния *a* – мягкая, *б* – жесткая, причем их параметры подобраны таким образом, что при $A = 0.5$ коэффициент поглощения один и тот же. В случае мягкой амплитудной характеристики колебания сначала – при больших амплитудах ($t < 200$) – затухают медленнее, а когда амплитуды становятся малыми, затухают быстрее, чем для жесткой характеристики.

Наличие участков с различным рассеянием энергии может вносить заметные нерегулярности в свободные колебания, особенно на начальном этапе. На фиг. 5 справа показаны свободные колебания стержня, для половины которого, $x \leq 0.5$, параметр $\beta = 0.5$, а для другой половины $\beta = 0.7$. Параметр рассеяния $\alpha = 0.05$ остается постоянным во всем стержне. Видны искажения формы волн и немонотонность изменения амплитуды. Для сравнения штриховыми линиями показано изменение напряжений в однородном стержне при $\beta = 0.7$ и том же значении α .

Приведенные результаты показывают, что предлагаемая модель позволяет адекватно описать частотно-независимое рассеяние энергии в конструкциях и материалах для широкого спектра динамических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Писаренко Г.С.* Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. Киев: Наук. думка, 1985. 236 с.
2. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
3. *Никитин Л.В.* Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. лицей, 1998. 272 с.
4. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Науч. книга, 1998. 267 с.
5. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.
6. Вибрации в технике. Справочник. Т. 6. / Под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение, 1995. 460 с.

Москва
e-mail: map@staff.msta.ac.ru

Поступила в редакцию
6.III.2001