

УДК 539.3 : 534.1

© 2002 г. А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ К ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ МЕТАСТАБИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассматриваются нестационарные движения вязкоупругой среды при учете малой анизотропии и малой нелинейности. Численно изучается поведение метастабильной квазипоперечной ударной волны при ее взаимодействии с неодномерными возмущениями. Демонстрируется устойчивость этой волны по отношению к неодномерным возмущениям большой амплитуды.

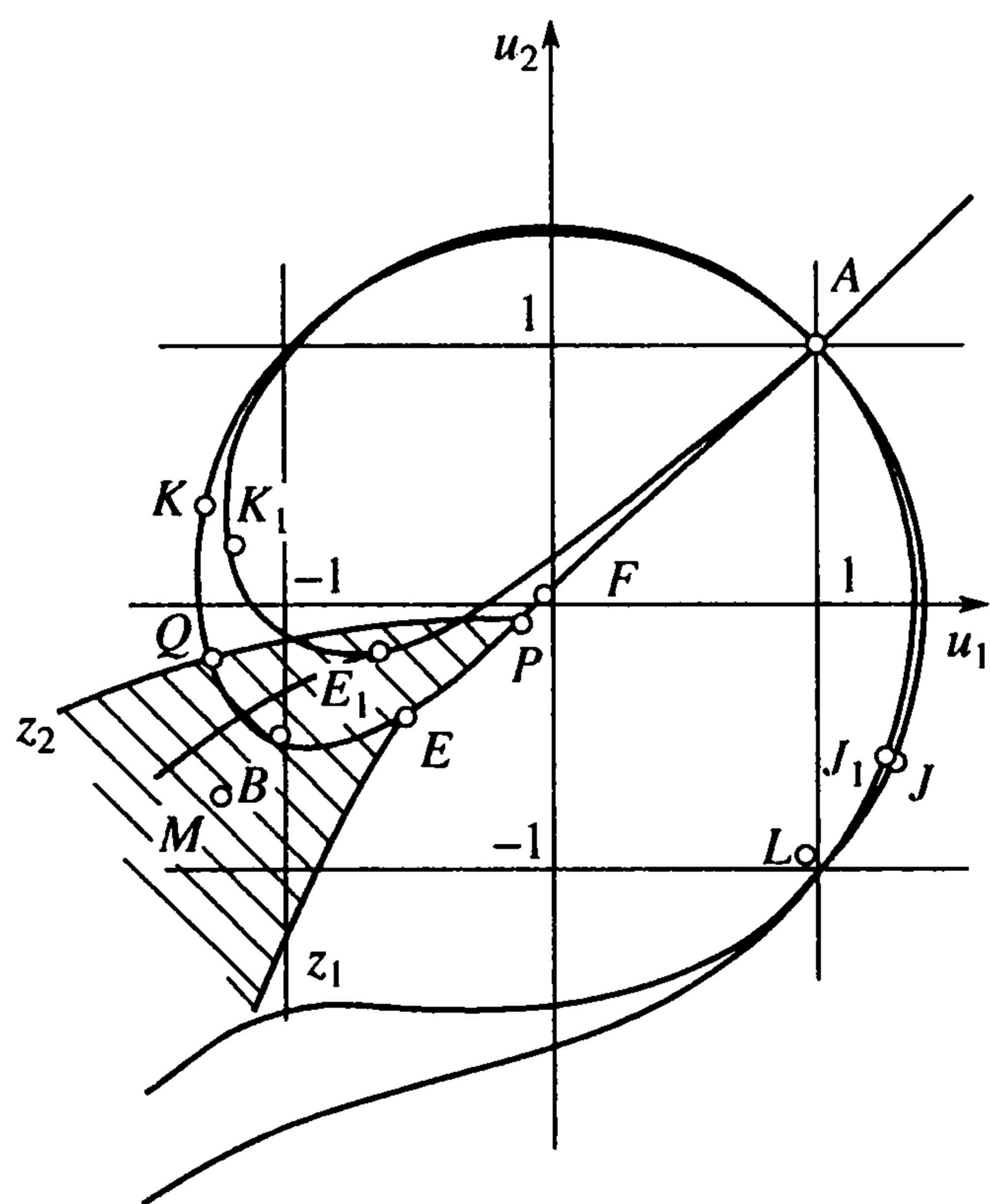
Как известно [1–3], имеет место неоднозначность решений автомодельной задачи о поршне и о распаде начального разрыва для широкого класса упругих сред и начальных условий. При этом существуют ударные волны (УВ), которым соответствует второе решение задачи о распаде разрыва, состоящее из системы УВ и простых волн, движущихся с различными скоростями. Это означает, что, вообще говоря, исходная УВ может распасться на упомянутую систему волн. Такие УВ будем называть метастабильными (МУВ). Если при построении решений задач теории упругости исключить МУВ, то решения задач во многих случаях окажутся единственными.

Основанием для указанного исключения МУВ могла бы послужить их неустойчивость. В линейном приближении устойчивость быстрых УВ, в том числе МУВ, была доказана [4]. Однако, может иметь место нелинейная неустойчивость УВ, проявляющаяся в виде их нелинейного распада при взаимодействии с возмущениями. Для выяснения возможности подобного распада необходимо включить "размазывающие" разрыв механизмы.

В вязкоупругой среде Фойхта каждой эволюционной УВ соответствует непрерывная бегущая УВ [3], которая называется структурой, соответствующей УВ [5]. Ранее [6, 7] в вязкоупругой среде с помощью численных экспериментов изучалось взаимодействие структуры МУВ с ограниченными в пространстве одномерными возмущениями той же ориентации, что и изучаемая МУВ. При этом асимптотики решений при $t \rightarrow \infty$ соответствовали одному из двух автомодельных решений задачи о распаде разрыва в области неединственности. Было показано, что взаимодействие с неоднородностью фона или с другой одномерной волной может приводить к необратимому распаду МУВ, так что после взаимодействия образуется система волн, соответствующая упомянутому выше второму решению задачи о распаде разрыва. Было выяснено, что для осуществления такого распада необходимо, во-первых, чтобы амплитуда возмущений была сравнима по величине с амплитудой МУВ и, во-вторых, чтобы за время взаимодействия вновь образовавшиеся волны успели разойтись на расстояние, большее ширины структуры изучаемой МУВ.

Несмотря на довольно жесткие условия, необходимые для того, чтобы произошел распад МУВ, оставалась возможность считать, что при движении по случайному фону МУВ рано или поздно наткнется на достаточно большое возмущение, которое ее разрушит. В связи с этим представляет интерес изучение в той же постановке, что и ранее [6, 7], взаимодействия МУВ с неодномерными возмущениями.

Ниже представлены результаты численного решения двумерных вязкоупругих задач о взаимодействии МУВ с достаточно медленно меняющимися периодическими по тангенциальной координате возмущениями. Результаты решения этих задач показывают, что если имеется достаточно большой участок невозмущенной МУВ, то распад МУВ на систему волн носит обратимый характер, т.е. с течением времени восстанавливается решение, соответствующее исходной МУВ. Это говорит о большой устойчивости исследуемой МУВ, о возможности залечивания ею ран, нанесенных сильными, но ограниченными в пространстве внешними воздействиями. Эти результаты позволяют предположить, что МУВ могут реально существовать.



Фиг. 1

1. Одномерные нестационарные решения. Описание решений в области неединственности. Слабонелинейные квазипоперечные волны, распространяющиеся по однородному фону в положительном направлении оси x при малой анизотропии среды, могут описываться также упрощенной системой уравнений, которая следует из системы уравнений нелинейной теории упругости [3, 8],

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) = \nu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}$$

$$\alpha = 1, 2, \quad \nu = \frac{\mu}{2\rho_0} \quad (1.1)$$

$$R(u_1, u_2) = \frac{1}{2} a(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{8} \kappa(u_1^2 + u_2^2)^2 \quad (1.2)$$

Здесь $g > 0$ – параметр анизотропии, a – характеристическая скорость при отсутствии нелинейности и анизотропии ($\kappa = 0$, $g = 0$), κ – постоянная с размерностью скорости, которая характеризует нелинейные эффекты, ν – кинематический коэффициент вязкости. Знак упругой константы κ существенно влияет на поведение квазипоперечных простых волн и УВ; ниже рассматривается случай $\kappa > 0$. Всюду далее предполагается, что индекс α принимает значения 1, 2.

При отсутствии вязкости ($\nu = 0$) система (1.1) имеет гиперболический тип и два семейства характеристик – быстрые и медленные со скоростями $c_1 \leq c_2$. Соответственно эволюционные УВ разделяются на быстрые и медленные. Как уже было упомянуто, при отсутствии вязкости задача "о поршне" имеет неединственное решение [2]. Одним и тем же начальным условиям $u_\alpha = U_\alpha$ (точка A на фиг. 1) при $t = 0$, $x > 0$ и граничным условиям $u_\alpha = u_\alpha^*$ при $x = 0$, $t > 0$ могут соответствовать две различные системы автомодельных волн, если точка с координатами u_1^* , u_2^* , задающими граничные условия, принадлежит области неединственности (заштрихована на фиг. 1). Геометрия области неединственности зависит от параметров U_1 , U_2 , g , κ .

На фиг. 1 изображена ударная адиабата $AFPEQKAJ$ квазипоперечных УВ с начальной точкой $A(1, 1)$ для среды с $\kappa = 1$, $g = 0.03$, построенная численно. Точки отрезков AJ , EK представляют собой состояния за эволюционными быстрыми УВ, точки отрезка AF – за медленными УВ. Область неединственности решения (область значений u_α^* , для которых имеются два решения) ограничена отрезком PE ударной адиабаты с начальной точкой A , а также отрезком QP ударной адиабаты, построенной из точки Q как начальной точки, который соответствует медленным УВ, а также участками EZ_1 и QZ_2 интегральных кривых простых непрокидывающихся медленных волн. Точка Q определена условием: скорость W УВ $A \rightarrow Q$ равна скорости УВ $A \rightarrow J$ (если U_1 и U_2 достаточно велики, например $\kappa(U_1^2 + U_2^2) > 2g$, то такая точка существует).

Для рассматриваемых сред с $\kappa > 0$ одно из решений в области неединственности (решение первого типа) состоит из быстрой УВ, представляемой на плоскости u_1 , u_2 скачком из точки A в точку эволюционного отрезка QE (это и есть упоминавшаяся ранее МУВ) и следующей за ней медленной УВ или простой волны. Второе решение (решение второго типа) при $\kappa > 0$ содержит "сложную" быструю волну, состоящую из

быстрой УВ Жуге $A \rightarrow J$ (точка J – точка Жуге по состоянию за скачком, в которой $W = C_2^+$), быстрой простой волны $J \rightarrow L$ и быстрой УВ Жуге $L \rightarrow M$ (условие Жуге $W = C_2^-$ выполнено в точке L , характеризующей состояние перед разрывом). За сложной быстрой волной с меньшей скоростью идет медленная волна – ударная или простая. Такое решение, если его построить для некоторой точки отрезка QE ударной адиабаты, представляет собой систему волн, которые возникают в случае распада соответствующей МУВ.

2. Двумерные нестационарные движения упругой и вязкоупругой сред. Будем использовать упрощенную систему уравнений [4] для описания двумерных нестационарных движений вязкоупругой среды, когда все искомые величины зависят от времени t , лагранжевой координаты x и слабо зависят от лагранжевой координаты y (в начальном состоянии x и y совпадают соответственно с декартовыми координатами x_3 и x_2)

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + (f + (-1)^\alpha g) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial x} [(u_1^2 + u_2^2) u_\alpha] = v \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} - m \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} dx \quad (2.1)$$

Левые части уравнений (2.1) и (1.1) совпадают. Первый член в правой части уравнений (2.1) описывает влияние вязкости, второй член в правой части уравнений (2.1), учитывающий взаимодействие по переменной y , имеет тот же вид, что и соответствующие члены в уравнениях Кадомцева–Петвиашвили [9] и Хохлова–Заболотской [10].

В расчетах в качестве x_0 выбиралось такое значение x впереди изучаемой системы волн, где можно считать, что u_1 и u_2 принимают невозмущенные постоянные значения.

Уравнения (2.1) представляют поведение решений в системе координат, движущейся в положительном направлении оси x относительно исходной системы координат с постоянной скоростью $a - f$, где a – скорость характеристик относительно среды в линейном изотропном приближении, входящая в выражение (1.3). В дальнейшем величина f будет подбираться, исходя из удобства расчетов. При этом линейные и нелинейные члены в левой части системы (2.1) оказываются одного порядка. Коэффициенты g , κ , v и m могут принимать любые значения, если подходящим образом распорядиться единицами измерения u_α , x , t и y .

Согласно полученным ранее результатам [4], в исходных, не преобразованных переменных имеет место равенство $m = a/2$. Отношение последнего члена (учитывающего влияние неоднородности) в уравнениях (2.1) к нелинейному члену в левой части по порядку величины равно $(a/\Delta a)(L_x^2/L_y^2)$, где под Δa понимается величина κu^2 , характеризующая изменение скорости характеристик при влиянии нелинейности (u – характерный размер величин u_α , L_x , L_y – характерные размеры соответственно по переменным x , y). При этом предполагалось, что $\Delta a/a \ll 1$ (малая нелинейность) и $L_x^2/L_y^2 \ll 1$ (близость к одномерному случаю). Поскольку понимание этих сильных неравенств допускает большой произвол, пространственный (последний) член в уравнениях (2.1) может быть как малым по отношению к остальным членам, так и достаточно большим.

Оценим порядок величины члена, ответственного за неоднородность, исходя из предположения, что вязкий и нелинейный члены сохраняют по порядку величины те же значения, что в одномерном случае. Тогда получим, что характерный масштаб изменения величин по оси x равен $L_x \sim v/(\kappa u^2)$, а порядок величины нелинейного члена определяется выражением $\kappa^2 u^5/v$. Отношение "пространственного" члена к нелинейному члену в уравнениях (2.1) оказывается по порядку величины равным $M = mv^2/(L_y^2 \kappa^3 u^6)$. Безразмерный параметр M характеризует интенсивность взаимодействия по переменной y различных участков волны между собой.

Ниже рассматриваются задачи, в которых $u \sim 1$, а полученная оценка позволяет сравнивать между собой результаты различных вариантов расчета. В частности, уменьшение m эквивалентно увеличению масштаба L_y , характеризующего зависимость решения от y .

3. Описание численных экспериментов. Ниже приводятся результаты численного решения ряда начально-краевых задач для уравнений (2.1), для которых описанные в разд. 1 автомодельные решения могут представлять асимптотики при $t \rightarrow \infty$.

Уравнения были записаны в виде неявных нелинейных разностных уравнений, которые были линеаризованы методом Ньютона и решались методом матричной прогонки [11]. Интегралы в правых частях уравнений (3.1) вычислялись методом прямоугольников, и значения функций $u_1(t, x, y)$ и $u_2(t, x, y)$ в подынтегральном выражении принимались равными значениям этих функций на каждой предыдущей итерации.

Коэффициент ν , входящий в систему (2.1), выбирался таким образом, чтобы член $\nu \partial^2 u_\alpha / \partial x^2$, описывающий физическую вязкость, был значительно больше, чем вычислительные погрешности, которые возникают при решении разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальную задачу.

Начально-краевая задача о взаимодействии МУВ (волны типа QE), представляемой скачком $A \rightarrow B$ (фиг. 1), с двумерным возмущением формулируется следующим образом. Система уравнений (2.1) решается в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq L$, $t \geq 0$. Граничные условия ($t \geq 0$) задаются в виде

$$\begin{aligned} x = l, y > 0: u_\alpha = U_\alpha \text{ (точка } A); \quad x = 0, y > 0: u_1 = u_\alpha^* \text{ (точка } B) \\ y = 0, y = L, 0 < x < l: \partial u_\alpha / \partial y = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

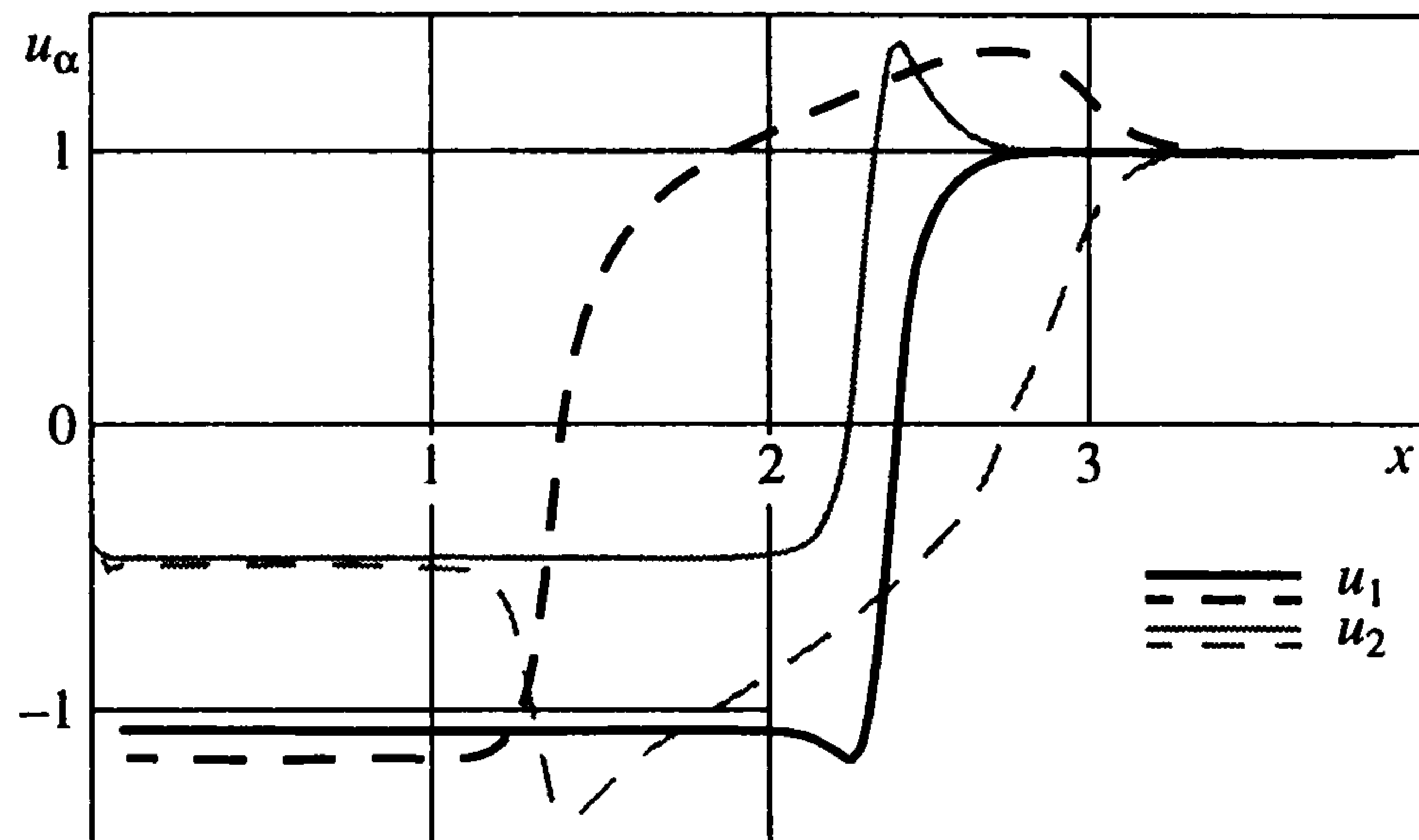
Начальные условия ($t = 0$, $0 < x < l$) задаются в виде

$$0 < y \leq y_1: u_\alpha = u_\alpha^{(2)}(x); \quad y_1 < y < L: u_\alpha = u_\alpha^{(1)}(x) \quad (3.2)$$

В связи с постановкой граничных условий отметим, что задание граничных условий при $y = 0$ и $y = k$ в виде равенства нулю производных по y обеспечивает возможность периодического (с периодом $2L$) продолжения решения по y . Граничные условия при $x = L$ соответствуют состоянию перед волной, которая является быстрой, так что состояние впереди на достаточном удалении от волны можно считать невозмущенным.

При выборе начальных данных (функций $u_\alpha^{(1)}(x)$ и $u_\alpha^{(2)}(x)$) использовались результаты работы [7], в которой в одномерной постановке рассматривалась задача о взаимодействии МУВ с неоднородностью фона. Неоднородность фона задавалась в [7] изменением коэффициента g в течение некоторого промежутка времени τ (времени взаимодействия МУВ с неоднородностью). Создавалось такое увеличение параметра g , что если бы далее величина g не менялась, то отсутствовала бы асимптотика, содержащая МУВ. Тогда при достаточно больших значениях τ происходило формирование асимптотики второго типа (т.е. начинался распад исходной МУВ) и решение, после придания величине g исходного значения, уже не возвращалось к первоначальному виду. При малых значениях τ структура МУВ восстанавливалась.

Зависимость начальных данных $u_\alpha^{(1)}(x)$ и $u_\alpha^{(2)}(x)$ от x выбиралась следующим образом. В качестве начальных данных $u_\alpha^{(1)}(x)$ задавалась стационарная структура МУВ, взятая из [6]. Функции $u_\alpha = u_\alpha^{(1)}(x)$, изображенные на фиг. 2 сплошными линиями, соответствуют структуре МУВ с состоянием перед ней $u_1 = U_1 = 1$, $u_2 = U_2 = 1$ (точка A на фиг. 1) и состоянием за МУВ $u_1 = u_1^* = -1.05$, $u_2 = u_2^* = -0.45$, $g = g_1 = 0.03$, $\kappa = 1$, $\nu = 0.024$. Параметр f в уравнениях (2.1) выбирался так, чтобы МУВ при увеличении времени не уходила из расчетной области. В качестве $u_\alpha^{(2)}(x)$ выбирались



Фиг. 2

взятые из [7] функции, соответствующие некоторому этапу одномерного распада той же стационарной МУВ в результате увеличения g до некоторого значения $g = g_2$ при прежних значениях остальных параметров. На фиг. 1 изображена ударная адиабата для $g_2 = 0.1$ (кривая $AE_1K_1AJ_1$). Точка B при $g_2 = 0.1$ лежит в области, где при $v = 0$ существует только одно автомодельное решение второго типа. Функции $u_\alpha^{(2)}(x)$, графики которых изображены на фиг. 2 штриховыми линиями, представляют полученные ранее [7] решения задачи о распаде МУВ в некоторый момент времени, когда распад стал уже необратимым.

Начальные данные (3.2) заданы таким образом, что при $y = y_1$ происходит смена начальных условий. При такой постановке начальных условий вследствие существенного различия функций $u_\alpha^{(1)}(x)$ и $u_\alpha^{(2)}(x)$ разностные уравнения плохо аппроксимируют дифференциальные уравнения (2.3). Для устранения этого недостатка в начальных условиях были введены "переходные зоны" так, что при $y = y_1$ происходит не скачкообразная, а постепенная смена типа решения.

Начальные данные на интервале $y_1 \leq y \leq y_1 + y_p$ (y_p – ширина переходной зоны) задавались следующим образом:

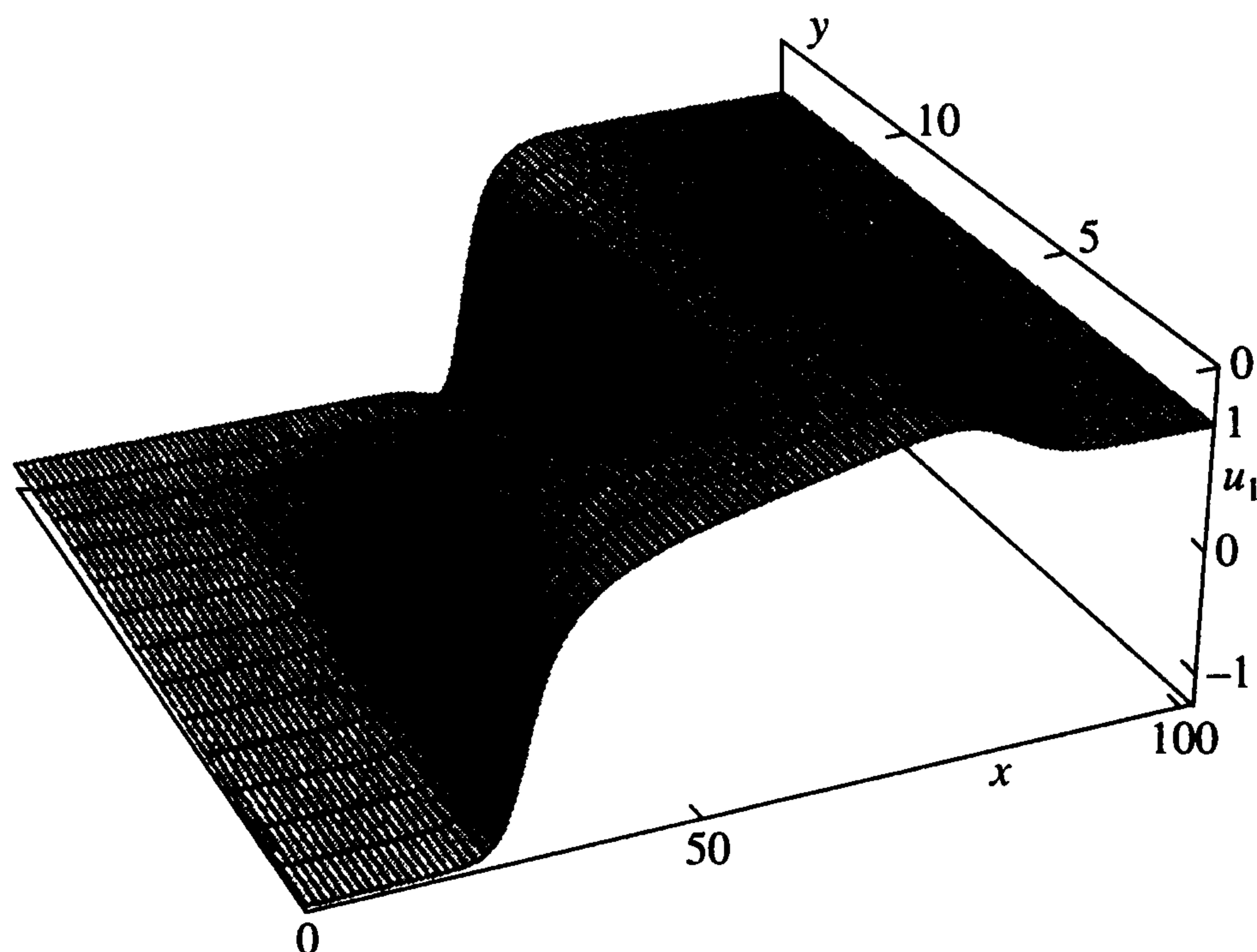
$$u_\alpha^{(p)}(x) = (1 - f(s))u_\alpha^{(1)}(x) + f(s)u_\alpha^{(2)}(x)$$

$$s = (y - y_1) / y_p, \quad f(s) = s^2(2 - s^2)$$

Функция $f(s)$ осуществляет сглаживание. Она удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f'(1) = 0$$

Значения $u_\alpha^{(2)}$ слева от области быстрого изменения этих функций немного отличаются от значений $u_\alpha^{(1)}$ в той же области [7]. Это отличие вызвано тем, что в процессе распада МУВ, приведшего к функциям $u_\alpha^{(2)}(x)$, налево ушла медленная УВ, которая слегка изменила значения u_α и вышла за пределы расчетной области. В пределах расчетной области располагаются только быстрые волны, слегка искаженные вязкостью. До проведения расчетов было специально проверено, что приход на левую границу ($x = 0$) медленной волны не приводит к появлению сколько-нибудь заметной отраженной быстрой волны (которая могла бы исказить изучаемый процесс).



Фиг. 3

С учетом наличия переходных зон начальные условия (3.2) были записаны следующим образом:

$$0 \leq y \leq y_1: \quad u_\alpha = u_\alpha^{(2)}(x) \quad (3.3)$$

$$y_1 \leq y \leq y_1 + y_p: \quad u_\alpha = u_\alpha^{(p)}(x) \quad (3.4)$$

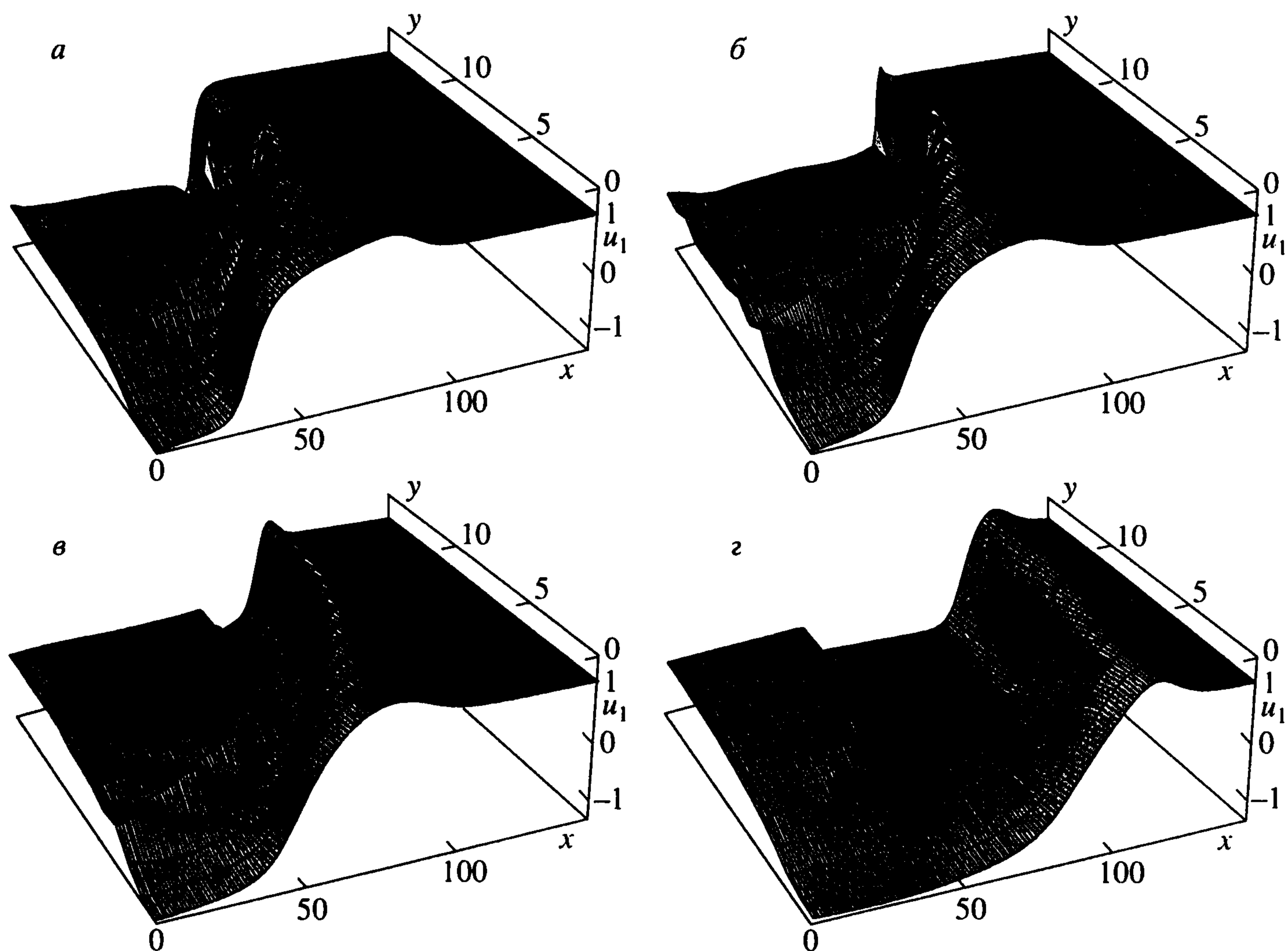
$$(y_1 + y_p < y < L): \quad u_\alpha = u_\alpha^{(1)}(x) \quad (3.5)$$

Проводились тестовые расчеты начально-краевой задачи (2.1), (3.1), (3.3)–(3.5) при различных значениях параметра y_p , и было отмечено, что при увеличении y_p (увеличении ширины переходной зоны) разностные уравнения лучше аппроксимируют дифференциальную задачу. В результате тестовых расчетов было определено такое значение y_p , что результаты расчетов при заданном шаге Δy по переменной y и при шаге $\Delta y/2$ совпадают с заданной точностью (0.001).

Расчеты начально-краевой задачи (2.1), (3.1), (3.3)–(3.5) позволили пронаблюдать процесс восстановления структуры МУВ. Последовательно опишем и продемонстрируем этот процесс на графиках.

В одном из вариантов расчета начальные условия ($t = 0$) были взяты в следующем виде: в двух последовательных слоях ($y_j = \text{const}$, $y_{j+1} = y_j + \Delta y$, $j = 1, 2$) задаются начальные условия (3.3), затем десять последовательных слоев ($j = 3, \dots, 12$) соответствуют переходной зоне с начальными условиями (3.4) и два слоя ($j = 13, 14$) соответствуют начальным условиям (3.5) (невозмущенная МУВ). На фиг. 3 представлен график функции $u_1(x, y)$ при $t = 0$. Поставленная начально-краевая задача решалась при различных значениях параметра m .

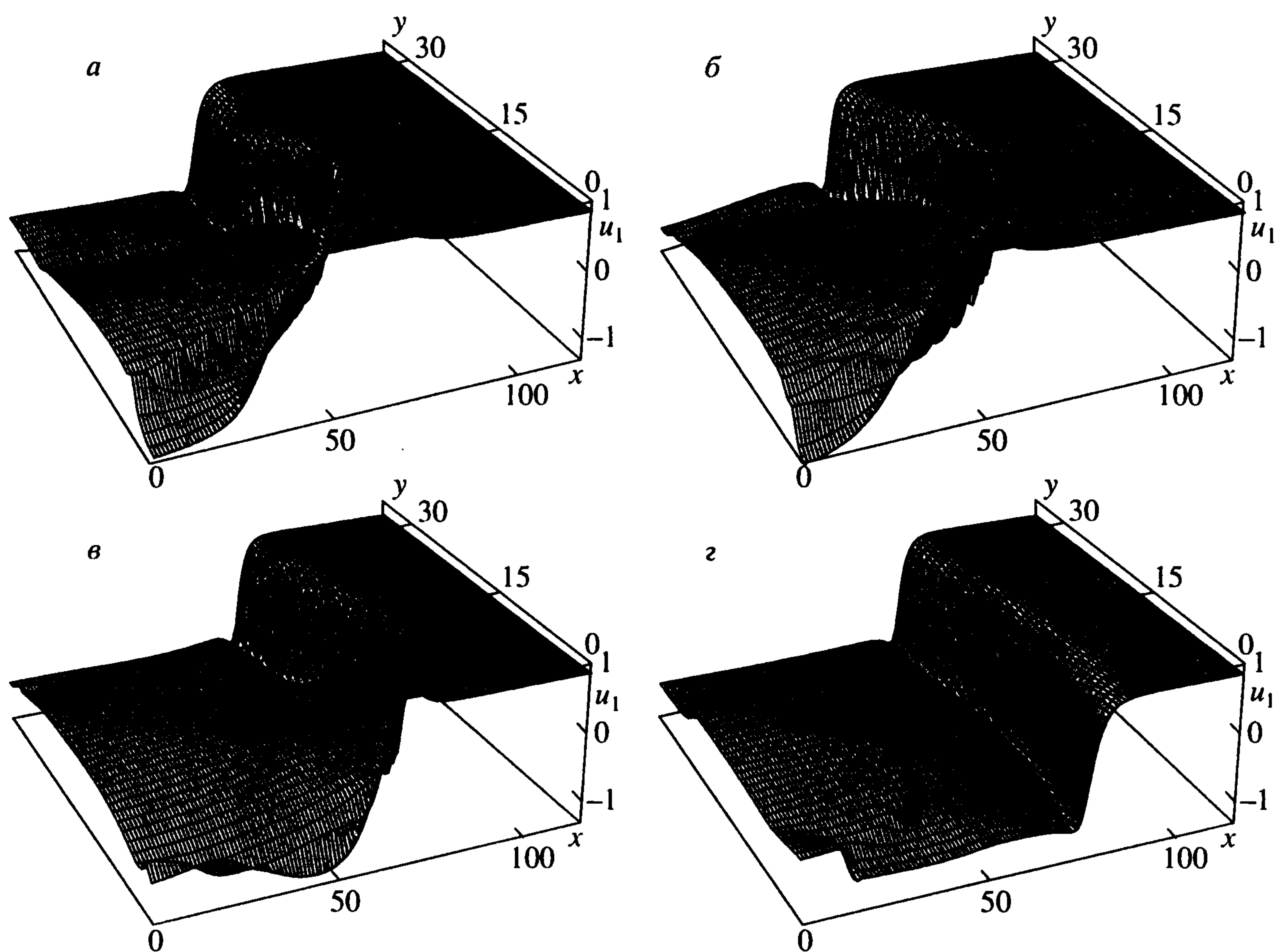
При $m = 0$, $y = 2$ (в системе уравнений (2.1) отсутствуют члены, описывающие взаимодействие между слоями по переменной y) с увеличением расчетного промежутка времени происходят следующие изменения. На пяти слоях промежуточной области, примыкающих к границе, представляющей решение второго типа, постепенно формируется асимптотика решения второго типа. На остальных слоях промежуточной области формируется асимптотика решения первого типа.



Фиг. 4

При малых значениях параметра m ($m = 0.5, 1, 1.3, 2, 3$) ($M = 3.6735 \times 10^{-7}, 7.347 \times 10^{-7}, 1.4694 \times 10^{-6}, 2.2041 \times 10^{-6}$), $\Delta y = 2$ с увеличением расчетного промежутка времени постепенно формируется асимптотика первого типа на переходном слое ($j = 12$), граничащем со слоем, на котором задана асимптотика решения первого типа ($j = 13$). Затем асимптотика первого типа формируется на слое $j = 11$ и так далее. Перестройка решения на каждом из последующих слоев сопровождается излучением медленной волны, распространяющейся налево. Эта медленная волна не взаимодействует с границей (нет отраженных влево возмущений). Таким образом, во всей расчетной зоне формируется асимптотика решения первого типа.

Эволюцию решения поставленной начально-краевой задачи при $m = 30$ ($M = 2.2041 \times 10^{-5}$), $\Delta y = 2$ можно наблюдать на фиг. 4, а–г ($t = 0.18, 0.6, 1.8, 2.7$), где изображены графики функции $u_1(x, y)$ в последовательные моменты времени. На фиг. 4, а видно начало формирования асимптотики решения второго типа на слоях $j = 8, 9, 10$. На фиг. 4, б асимптотика решения второго типа формируется на слоях $j = 7-14$. На фиг. 4, в, г виден процесс завершения формирования асимптотики решения второго типа. Таким образом, при $m = 30$ и наличии одинакового количества слоев, представляющих асимптотику решения первого типа, и слоев с асимптотикой второго типа формируется асимптотика решения второго типа, т.е. исходная МУВ перестает существовать. Если изменить постановку начально-краевой задачи и в начальный момент времени задать число слоев с асимптотикой первого типа, существенно большее числа слоев с асимптотикой второго типа, и при этом не изменять остальные параметры задачи, то на всех слоях сформируется асимптотика первого типа, т.е. изучаемая МУВ восстановится.



Фиг. 5

На фиг. 5, а–г представлена эволюция решения начально-краевой задачи, имеющей существенно больший характерный размер L , чем начально-краевая задача на фиг. 4, и существенно больший параметр $m = 100$. При $t = 0$ в четырех последовательных слоях ($y_j = \text{const}$, $y_{j+1} = y_j + \Delta y$, $j = 1, \dots, 4$) задаются начальные условия (3.3), затем десять последовательных слоев ($j = 5, \dots, 14$) соответствуют переходной зоне с начальными условиями (3.4) и двадцать один слой ($j = 15, \dots, 35$) соответствуют начальным условиям (3.5) (невозмущенная МУВ), $\Delta y = 2$. На фиг. 5, а–в ($t = 0.6, 1.2, 2.4$) можно наблюдать процесс формирования асимптотики первого типа (МУВ, функция $u_1(x, y)$). В последующий момент времени ($t = 3.63$, см. фиг. 5, г) видно, что МУВ сформировалась при всех значениях y . Была решена эта же начально-краевая задача при $m = 200, 1000$ ($M = 2.35 \times 10^{-5}, 1.175 \times 10^{-4}$). При этих значениях параметра m МУВ с течением времени восстановилась при всех значениях y . Таким образом, показано, что решение задачи, когда ширина области с невозмущенной МУВ достаточно велика, всегда приводит к восстановлению МУВ при любом значении параметра m .

Аналогичная начально-краевая задача рассчитывалась при разных значениях параметров g_1, g_2, y_p , разной величине отрезка $[y_1, y_2]$ (характеризующего размер неоднородности), разных положениях начальной точки A и разных положениях точки B , описывающей левое граничное условие. В частности, изучались начально-краевые задачи для тех начальных параметров, для которых решение задачи о взаимодействии МУВ с одномерным возмущением [7] показало, что распад этой волны носит необратимый характер, т.е. исходная МУВ не восстанавливается с течением времени. Эта же МУВ при взаимодействии с двумерным возмущением восстанавливалась.

Результаты расчетов приводят к выводу, что возмущения, периодические по переменной вдоль фронта МУВ (даже если это возмущения конечной амплитуды), не приводят к распаду МУВ и масштаб L , характеризующий период возмущений вдоль этой волны, велик (или параметр M мал). При взаимодействии МУВ с изолированными возмущениями можно также ожидать ее восстановления. В случае малости L (M – большое число) при определенных условиях может произойти распад МУВ.

Таким образом, продемонстрирована устойчивость МУВ при $\kappa > 0$ и, следовательно, необходимость их рассмотрения как реализующихся. Это заключение оставляет в силе вывод о неединственности решения задачи о распаде произвольного разрыва для упругих сред в случае, когда при рассмотрении нестационарных процессов не учитывается вязкость или другие факторы, "размазывающие" разрывы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01150).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
2. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. О распаде произвольного начального разрыва в упругой среде // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1007–1012.
3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
4. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Об устойчивости квазипоперечных ударных волн в анизотропных упругих средах // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 1020–1026.
5. Седов Л.С. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
6. Чугайнова А.П. О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692–697.
7. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 2. С. 315–323.
8. Куликовский А.Г. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.
9. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. № 4. Т. 192. С. 753–756.
10. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. ж. 1969. Т. 15. № 1. С. 40–47.
11. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.