

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. Э.Л. Аэро

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА
С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ**

Рассматривается уравнение синус-Гордона с диссипацией и переменным коэффициентом при нелинейном члене, описывающее волны в энергетически открытой системе при воздействии на нее монотонно меняющегося во времени внешнего поля. Вводятся масштабные преобразования, согласованные с внешним полем и диссипацией, сводящие обобщенное уравнение к стандартному. Показано, что существуют режимы управления колебаниями и волнами, при которых уравнение преобразуется к виду с постоянными коэффициентами и эффективной диссипацией, либо обращаемой в нуль, либо положительной (гашение колебаний), либо отрицательной (их усиление). Им соответствуют волны, распространяющиеся с постоянной, спадающей или нарастающей амплитудой и переменной частотой и скоростью.

1. Основные соотношения. Нелинейная динамика некоторых протяженных упругих систем с диссипацией описывается уравнением синус-Гордона (ниже оба знака имеют смысл)

$$j\Phi_{tt} = k\Delta\Phi \pm f^2(t)\sin\Phi - \gamma\Phi_t, \quad (1.1)$$

Нижние индексы означают производные по времени t , а Δ – оператор Лапласа. Положительные постоянные коэффициенты j , k , γ характеризуют инерцию, упругость и диссипацию соответственно. Коэффициент $f^2(t)$ представляет упругую энергию однородной конфигурации или внешнюю силу. Искомая функция $\Phi(t, x, y, z)$ имеет смысл поля смещений (углового или линейного), что для дальнейшего формального анализа несущественно.

Формально этому уравнению отвечает модель ансамбля упругосвязанных маятников или осцилляторов. Реальные примеры – это жидкие кристаллы, ферромагнетики, кристаллические решетки и другие периодические структуры, а также механические объекты, такие, как гибкий стержень в поле сил тяжести, мембрана на нелинейном упругом основании и др. Существенно, что речь идет об открытой системе с энергообменом за счет диссипации и внешнего поля.

Представляют интерес специальные режимы управления колебаниями и вообще движением исследуемой системы маятников с помощью внешней силы $f(t)$. Известны колебательные режимы управления, приводящие к компенсации затухания и усилению колебаний за счет резонанса или их гашению (в случае антирезонанса). Ясно, что здесь речь может идти о параметрическом управлении. Будем интересоваться эффектами усиления или гашения колебаний, но в режиме монотонного управления.

Применительно к уравнению (1.1) эффективен подход, в пределах которого вводятся масштабные преобразования, согласованные с внешним полем и диссипацией. Он позволяет в некоторых случаях существенно упростить процедуру построения решения уравнения (1.1) и выявить интересные режимы вынужденных колебаний.

Запишем уравнение (1.1) в приведенных координатах x, χ, η, ξ , которые связаны с t, x, y, z следующим образом:

$$s = \frac{1}{\sqrt{j}} \int f(t) dt, \quad \chi = \frac{xf(t)}{\sqrt{k}}, \quad \eta = \frac{yf(t)}{\sqrt{k}}, \quad \xi = \frac{zf(t)}{\sqrt{k}} \quad (1.2)$$

Тем самым вводятся самонастраивающиеся масштабы по всем координатам, учитывающие, в частности, собственное "время" s , в зависимости от γ и $f(t)$. Имеем очевидные соотношения

$$j\Phi_{ss} = f^2\Phi_{ss} + \sqrt{j}f_t\Phi_s, \quad \Phi_t = f\Phi_s / \sqrt{j}, \quad k\Delta = f^2\bar{\Delta} \quad (1.3)$$

Нижний индекс s означает производную по соответствующей координате, $\bar{\Delta}$ – оператор Лапласа в приведенных координатах ξ, χ, η . Уравнение (1.1) принимает вид

$$\Phi_{ss} = \bar{\Delta}\Phi \pm \sin \Phi - G(t)\Phi_s \quad (1.4)$$

Здесь

$$G(t) = \frac{1}{\tau\omega_f} \left[1 + \frac{\tau}{2} (\ln f^2)_t \right], \quad \tau = \frac{j}{\gamma}, \quad \omega_f = \frac{f}{\sqrt{j}} \quad (1.5)$$

Будем рассматривать уравнение (1.4) как уравнение синус-Гордона с эффективной диссипацией ($G > 0$) или с энергозахватом, накачкой ($G < 0$). Оба варианта реализуемы в зависимости от скорости изменения внешней силы.

Чтобы уточнить смысл величины $G(t)$, обратимся к первому равенству в (1.3). Умножив его на Φ_t , получим после элементарных преобразований

$$2Q_t = f^3 \sqrt{j} (\Phi_s^2)_s + (f^2)_t \Phi_s^2 \sqrt{j}, \quad 2Q = j\Phi_t^2 \quad (1.6)$$

Здесь Q – кинетическая энергия колебаний; второе слагаемое справа есть добавка к скорости ее изменения за счет переменной внешней силы. Видно, что на основании соотношений (1.5) и (1.3)

$$\Phi_t^2 G = \frac{2\gamma\Phi_t^2 + (f^2)_t \Phi_s^2}{2f\sqrt{j}} \quad (1.7)$$

Таким образом, величина $G(t)$ в приведенном уравнении (1.4) является коэффициентом энергообмена открытой упруговязкой системы с внешним полем и тепловым "резервуаром". Существенно, что в отличие от диссипации энергообмен с полем не является знакоопределенным. Если скорость $(f^2)_t$ положительна, то энергия уходит из системы, как и в случае диссипации, усугубляя затухание движения. В противном случае имеет место энергозахват, накачка энергии, что может компенсировать затухание диссипативной природы.

2. Полная компенсация диссипативных сил. Полная компенсация достигается, когда величина G обращается в нуль, т.е. выполняется условие

$$-(\ln f^2)_t = 2/\tau, \quad G = 0 \quad (2.1)$$

В этом случае отрицательная скорость изменения внешнего поля равна удвоенной частоте релаксации $1/\tau$ свободных колебаний. Аналогичное условие имеет место при параметрическом резонансе на действительной (а не мнимой) частоте внешней силы. В рассматриваемом случае имеет место своеобразный кинетический резонанс, т.е. максимально интенсивное воздействие на релаксирующую систему.

Незатухающий (по амплитуде) характер движения, являющийся следствием накачки энергии со стороны, реализуется, как следует из условия (2.1), лишь для определенного режима управления, когда

$$f(t) = f_0 \exp(-t/\tau), \quad f_0 = f(0), \quad G = 0 \quad (2.2)$$

В этом случае уравнение (1.4) примет вид

$$\Phi_{ss} = \bar{\Delta}\Phi \pm \sin \Phi \quad (2.3)$$

Оно имеет лишь постоянные коэффициенты, и ряд его частных интересных решений может быть получен. Так, было найдено [1] точное решение в ограниченной области $0 \leq \chi \leq \chi_0$ при нулевых граничных условиях; оно имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = a \operatorname{cn} \frac{K(v_1)\chi}{\chi_0} \operatorname{cn}(sK(v_2)), \quad s(0) = 0 \quad (2.4)$$

Здесь cn означает функцию эллиптического косинуса, $K(v_1)$, $K(v_2)$ – полные эллиптические интегралы первого рода – функции модулей $0 \leq v_1, v_2 < 1$.

Рассматривались [1] периодические ориентационные колебания структуры нематического жидкого кристалла в слое толщиной h с нулевыми граничными условиями в постоянном магнитном поле $H = f_0$. Амплитуда a постоянна, а вторая функция эллиптического косинуса осциллирует во времени, роль которого играет переменная s [1]. В случае же переменного поля и диссипации зависимость этой переменной от абсолютного времени t вносится влиянием внешней силы. Согласно соотношениям (1.2) и (2.2), пишем

$$\frac{\chi}{\chi_0} = \frac{x}{h}, \quad s = \tau\omega_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = \tau\omega_0 \left[\frac{t}{\tau} + O\left(\frac{t^2}{\tau^2}\right) \right] \quad (2.5)$$

Здесь экспонента представлена степенным рядом и $O(t^2/\tau^2)$ – его остаток; при $t \ll \tau$ им можно пренебречь, и решение (2.4) представляет вынужденные стоячие колебания, периодические в пространстве и времени, как это и было в случае, рассмотренном ранее [1]. В противном случае получаются непериодические колебания с фазовой модуляцией, которые и являются предметом анализа.

Имея в виду переменное поле $f(t)$, рассмотрим в разложении (2.5) все члены ряда. Учитывая несинхронность колебаний, введем периоды движения T_n . Определим их как последовательные "расстояния" между нулями эллиптического косинуса, положив $s = n$ ($n = 1, 3, 5, \dots$). Тогда

$$\tau\omega_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = n, \quad -\frac{T_n}{\tau} = \ln \left(1 - \frac{n}{\tau\omega_0} \right) \quad (2.6)$$

Очевидно, периоды возрастают с ростом числа колебаний n тем сильнее, чем меньше характерное время τ и коэффициент диссипации γ . Возрастание периодов может приводить к смене характера движения. Пока $T_n \ll \tau$ оно носит периодический характер, а после преодоления порога $T_n \approx \tau$ становится аperiодическим. Амплитудный множитель $a \operatorname{cn}(xK_1/h)$ остается неизменным.

Этим вынужденные (внешним полем) колебания отличаются от свободных. Когда поле f постоянно, диссипация приводит в первую очередь к амплитудному затуханию. Возрастание же периодов – вторичный эффект.

3. Режимы усиления и демпфирования. Рассмотрим теперь другие режимы управления, при которых возникает амплитудное затухание колебаний, отличное от диссипативного, или, напротив, индуцируется усиление последних. Формально они следуют из условия $G(t) = G_0$, где постоянная может быть как положительной (гашение коле-

баний), так и отрицательной (их усиление). В результате уравнение колебаний снова принимает вид уравнения с постоянными коэффициентами

$$\Phi_{ss} = \bar{\Delta}\Phi \pm \sin \Phi - G_0\Phi_s \quad (3.1)$$

Оно описывает как затухающие, так и нарастающие (по амплитуде) колебания в зависимости от знака коэффициента G_0 , о чем уже сказано. Его решения для бесконечного одномерного пространства строятся, как известно, асимптотическими методами. В случае двумерной ограниченной области они анализировались приближенным методом [2].

Управляющая функция $f(t)$ находится из уравнения, которое получается из соотношений (1.5) заменой $G(t)$ на G_0 , а именно

$$(\ln f^2)_t = \frac{2G_0f}{\sqrt{j}} - \frac{2}{\tau} \quad (3.2)$$

Его решение имеет вид

$$f(t) = \frac{\sqrt{j}}{G_0\tau} \left[1 - \left(1 - \frac{\sqrt{j}}{f_0 G_0\tau} \right) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]^{-1} \quad (3.3)$$

Ход соответствующих кривых $f(t)$ определяется соотношением параметров G_0 , τ , f_0 .

Рассмотрим вначале случай усиления колебаний $G_0 < 0$. Тогда решение (3.3) дает резко спадающую монотонную кривую $f(t)$, такую, что

$$f(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad f(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_c, \quad t_c = -\tau \ln \left(1 - \frac{1}{f_0 G_0\tau} \right) < 0 \quad (3.4)$$

Снова, как и в случае полной компенсации, $f(0) = f_0$ и частота вынужденных колебаний убывает с ростом времени до нуля. Однако теперь исключаются значения времени $t < t_c$. Для того чтобы выявить амплитудный рост, нужно, конечно, решать уравнение (3.1), учитывая, что $G_0 < 0$.

Обратимся к случаю гашения колебаний $G_0 > 0$, который представлен двумя режимами – мягким и жестким. В первом случае $G_0 < \sqrt{j}/(f_0\tau)$. Тогда определяемая выражением (3.3) функция $f(t)$ – монотонно убывающая ограниченная функция, причем

$$f \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad f \rightarrow \frac{\sqrt{j}}{G_0\tau}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad f(0) = f_0 \quad (3.5)$$

Очевидно, и частота вынужденных колебаний меняется в ограниченных пределах, убывая от конечного значения $1/(G_0\tau)$ до нуля, так же как амплитуда.

Жесткий режим гашения возникает, когда $G_0 > \tau\sqrt{j}/f_0$. Тогда $f(t)$ – монотонно возрастающая функция от значения $f = \sqrt{j}/(G_0\tau)$ при $t \rightarrow -\infty$ до бесконечности при $t \rightarrow t_c$, где t_c вычисляется по формуле (3.4), но с учетом положительности G_0 . Этому росту отвечает и неограниченный рост частоты вынужденных колебаний от конечного значения $1/(G_0\tau)$, причем они затухают по амплитуде. Последнее также выявляется при решении уравнения (3.1), где $G_0 > 0$. Ранее [2] эти выводы сделаны для малых значений G_0 .

4. Управление волной в режиме компенсации. Рассмотрим управление распространением двумерной волны $\Phi(x, y, t)$ в режиме компенсации. При учете условия (2.1) получим для приведенных переменных

$$s = \frac{f_0\tau}{\sqrt{j}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad \chi = \frac{xf_0}{\sqrt{k_1}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \eta = \frac{yf_0}{\sqrt{k_2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = \frac{j}{\gamma} \quad (4.1)$$

Будем искать решение уравнения (2.3), вводя два независимых аргумента

$$\chi, \Theta = \eta + \nu s, \quad \nu < 1 \quad (4.2)$$

Здесь ν – скорость (η, s) -волны (медленной). Тогда уравнение (2.3) примет вид уравнения синус-Гельмгольца

$$(1 - \nu^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} - \sin \Phi = 0, \quad \nu < 1 \quad (4.3)$$

В случае быстрой волны ($\nu > 1$) получили бы уравнение синус-Гордона.

В любом случае переменная фаза волны в пространстве χ, η, s связана с исходными (реальными) переменными y, t следующим образом:

$$l_2 \Theta(y, t) = (y + \nu C_2 \tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \nu C_2 \tau, \quad l_2 = \sqrt{\frac{k_2}{f_0}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{k_2}{j}}, \quad \tau = \frac{j}{\gamma} \quad (4.4)$$

Существенно, что в начальный момент времени ($t = 0$) имеется периодическое (по y) поле, поскольку $\Theta(y, 0) = y/l_2$. Пусть его пространственный период равен λ . В последующие моменты времени, когда $t \ll \tau$, имеем, разлагая экспоненту в ряд,

$$l_2 \Theta(y, t) = y - \nu C_2 (t + \tau) + y O\left(\frac{t^2}{\tau^2}\right) + \frac{yt}{\tau} \quad (4.5)$$

Первые два члена, линейные по y, t , определяют периодическую составляющую волны, а вторые два – ее модуляцию.

Для уточнения особенностей волнового движения введем ее фазовую скорость C_0 как скорость движения некоторого постоянного значения фазы Θ_c . Очевидно, что закон движения имеет, согласно соотношению (4.4), вид

$$y + \nu C_2 \tau = (l_2 \Theta_c + \nu C_2 \tau) \exp \frac{t}{\tau}, \quad \Theta_c = \Theta(y, 0) = \frac{y(0)}{l_2} \quad (4.6)$$

Тогда получим экспоненциально возрастающую фазовую скорость

$$C_0 = \frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{l_2 \Theta_c}{\tau} + \nu C_2 \right) \exp \frac{t}{\tau} = \frac{y}{\tau} + \nu C_2 \quad (4.7)$$

Ясно, что Θ_c – это значение фазы в произвольной точке y в начальный момент времени. В точке же $y = y_0 = -\nu C_2 \tau$ имеем $C_0 = 0$, т.е. значение фазы в этой точке, равное $\Theta_0 = -\nu C_2 \tau$, остается постоянным во времени. Это усматривается и прямо из соотношения (4.4). Величина

$$\delta \Theta = \Theta_c + \nu C_2 \tau / l_2 \quad (4.8)$$

есть разность фаз в точках $y(0), y_0$, т.е. разность фаз колебаний соответствующих маятников в начальный момент времени.

Ясно, что эта разность фаз со временем уходит (влево и вправо от y_0) на бесконечность, так что $C_0 > 0, y > y_0$ и $C_0 < 0, y < y_0$, и там становится равной нулю. Этот процесс, как видно из соотношения (4.4), завершается при $t \rightarrow \infty$ тем, что значение фазы $\Theta_0 = -\nu C_2 \tau$ заполняет все пространство, т.е. $\Theta(y, t) \rightarrow \Theta_0, t \rightarrow \infty$.

Происходит выполаживание волнового поля, т.е. уменьшение градиентов и удлинение волны. Действительно, обращаясь к соотношениям (4.6), находим закон возрастания длины волны со временем. Определив ее как расстояние Λ между ближайшими нулями функции $\Phi[\Theta(y, 0)]$, получим

$$\Lambda = \lambda \exp \frac{t}{\tau} \quad (4.9)$$

Здесь λ – период функции $\Phi(y, 0)$.

Интересно, что удлинение пространственного периода со временем и увеличение фазовой скорости совместимо с неизменностью периода колебаний T . Последний находится в результате интегрирования фазовой скорости (4.7) в пределах от t до $t + T$. Тогда

$$\lambda = -\lambda_2 \delta\Theta \left[1 - \exp \frac{T}{\tau} \right] \exp \frac{t}{\tau} \quad (4.10)$$

Сопоставляя это выражение с предыдущим, находим для T выражение

$$\exp \frac{T}{\tau} = 1 + \frac{\lambda}{l_2 \delta\Theta} \quad (4.11)$$

Оно не содержит переменных величин, однако в него входит произвольное значение разности фаз, линейно нарастающее по координате в начальный момент времени.

Если период мал, то имеем дело с колебательным режимом. Тогда

$$T / \tau \approx \lambda / (l_2 \delta\Theta), \quad T \ll \tau \quad (4.12)$$

Ясно, что разность фаз должна быть достаточно велика, т.е.

$$\delta\Theta \gg \lambda / l_2 \quad (4.13)$$

В противном случае движение носит апериодический характер.

Условие $\delta\Theta \approx \lambda / l_2$ приближенно определяет порог или точку на оси Oy , которая разделяет области колебательного и апериодического движения. Последняя сосредоточена около точки y_0 , в которой движение отсутствует. Ее протяженность вдоль оси равна $\delta\Theta l_2 \approx \lambda$. На этом протяжении происходит формирование ускоряющихся бегущих (в обе стороны) волн когерентности маятников. При $t \rightarrow \infty$ устанавливается полная синфазность, т.е. $\Theta \rightarrow -\nu C_2 \tau / l_2$, но период колебаний остается неизменным.

Удлинение волны со временем связано с убыванием внешнего поля и увеличением масштаба когерентности $l \sim \sqrt{k/f}$, в результате чего нелинейное уравнение синус-Гордона (1.1) вырождается в линейное волновое уравнение. Непрерывного перехода одного решения в другое не происходит. При $l \rightarrow \infty$ приближаемся к точке бифуркации, не переходя через нее. Она разделяет ветвь длинноволновых акустических колебаний и первоначально коротковолновых псевдооптических, вырождающихся по мере ее ускорения во вторую акустическую моду по мере исчезновения внешнего поля.

До сих пор рассматривался один знак скорости ν . На самом деле возможны два (η, s) -волновых процесса. Второй процесс – это тоже пара волн, но они исходят из точки, симметричной относительно начала оси Oy . Иными словами, из точек $y_0 = \pm \nu C_2 \tau$ выходят две пары волн, уходящие на бесконечность. В результате в промежутке между этими точками имеем две волны, бегущие в разных направлениях с противоположными фазами.

5. Разгонная волна структурной перестройки. На основании полученных ранее результатов [3] может быть найдено точное решение уравнения (4.3) (со знаком минус перед синусом) для волны перестройки структуры двумерной кристаллической решетки

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{4} = \frac{\operatorname{tn}[xK(\nu_1)h^{-1}]}{A \operatorname{sn}[(\eta + \nu s)K(\nu_2)\lambda^1]} \quad (5.1)$$

Под Φ понимается [3] взаимное смещение (вдоль слоя, вдоль оси Oy) соседних атомов; tn и sn – эллиптический тангенс и синус Якоби. В начальный момент времени соотношение (5.1) сводится к статическому решению, полученному для случая [3, 4], когда на границах каждой полосы толщиной h задано проскальзывание соседних

атомных цепей на одно или несколько межатомных расстояний. Величина Φ отнесена к периоду решетки.

Выражение (5.1) является точным решением уравнения (1.1) при переходе к переменным x, y, t . Оно представляет нелинейную волну микросмещений атомов (псевдооптическую моду структурных перестроек), распространяющуюся вдоль слоя, когда в кристалле образуется полоса сдвига (толщиной h). Микродеформация внутри нее модулирована по оси Oy образованием поперечных доменных стенок, составленных из солитонов несоответствия, вызванного нарушением трансляционного порядка.

Если межатомные потенциальные барьеры неизменны во времени, то, как видно из соотношений (4.1), (4.2), $s \sim t$, $\eta \sim y$ и фаза волны ($\eta + vC_2t$) линейна по времени и пространственным координатам. Тогда имеем дело с периодической в переменных x, y, t нелинейной волной, распространяющейся с постоянной скоростью vC_2 и амплитудой $\sim \ln[xK(v_1)/h]$ вдоль слоя. Это также псевдооптическая, но стационарная волна. Сохраняются скорость, частота и длина волны – расстояния между поперечными дефектами λ .

Межатомные барьеры могут снижаться по закону $f^2(t)$ как за счет внешних (макроскопических) деформаций, так и за счет температуры. Тогда кристалл приближается к точке структурного перехода [4], в которой резко снижается межслоевое сопротивление сдвигу или структурная прочность.

Именно с ним и связаны особенности решения (5.1) и прежде всего резкое возрастание скорости волны, ее разгон. Ему, оказывается, не препятствует и диссипация в решетке, которая учитывается в решении (5.1). При этом фаза волны оказывается нелинейной функцией времени согласно соотношению (4.4). Имеет место фазовая модуляция, возрастание скорости (до скорости звука) и длины волны во времени по мере ее распространения. Возрастает и расстояние между указанными дефектами и в конечном пределе, когда межатомные барьеры исчезают, дефекты уходят на бесконечность, формируется слоевая структура новой фазы [4], а псевдооптическая мода вырождается в акустическую (вторую), сопровождающую фазовое превращение. Известно, что рост мартенситной фазы в некоторых металлах носит взрывной характер. Однако здесь необходим дальнейший анализ.

Таким образом, обобщенное уравнение синус-Гордона (1.1) имеет ряд точных решений, отвечающих некоторым возрастающим и убывающим во времени внешним полям $f(t)$, которые создают эффекты компенсации механических потерь в энергетически открытой системе или, напротив, их активации. Предложенный метод адаптивного масштабирования, основанный на введении приведенных переменных, позволяет учесть баланс притока (оттока) энергии внешнего поля и диссипации в открытой системе. В результате ее описание упрощается и сводится к решениям классического уравнения синус-Гордона с постоянными коэффициентами. При этом внешние поля обеспечивают монотонное параметрическое управление открытой системой по принципу наименьших или наибольших механических потерь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэро Э.Л. Двумерные ориентационные деформации нематических жидких кристаллов в неоднородных электрических полях, порождаемых поверхностями с электрическим рельефом // Кристаллография. 1995. Т. 40. № 5. С. 889–899.
2. Аэро Э.Л. Слабозатухающие медленные моды ориентационных нелинейных колебаний в жидких кристаллах в дестабилизирующих структуру магнитных полях // Теорет. и мат. физика. 1997. Т. 111. № 1. С. 132–143.
3. Аэро Э.Л. Нелинейная теория упругого микросдвига в периодических структурах // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 674–682.
4. Aero E.L. Catastrophic microdeformations in crystalline lattice. Structure stability and modifications // Materials Physics and Mechanics. 2001. V. 3. № 1. P. 36–44.

Санкт-Петербург
e-mail: aero@microm.ipme.ru

Поступила в редакцию
19.X.2000