

УДК 62–50

© 2002 г. Л.Д. Акуленко, А.М. Шматков

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДОСТИЖЕНИЕ СФЕРЫ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ С НУЛЕВОЙ СКОРОСТЬЮ

Исследуется задача об оптимальном по быстродействию достижении материальной точкой поверхности сферы с нулевой скоростью посредством ограниченной по модулю управляющей силы. Считается, что поверхность проницаема и посадка на сферу может производиться как снаружи, так и изнутри. Оптимальное управление в форме программы и синтеза, траектории, время быстродействия и функция Беллмана строятся на основе принципа максимума Понтрягина. Введением автомобильных переменных многомерная краевая задача сводится к численному решению алгебраического уравнения четвертой степени и трансцендентного уравнения. Установлено свойство вырождения краевой задачи, когда оптимальная траектория близка к прямолинейной; построено решение задачи синтеза в случае вырождения. Эффективность предлагаемого подхода иллюстрируется конкретными примерами, содержащими расчеты семейств траекторий, и анализом режимов управления.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение материальной точки постоянной массы m в пространстве произвольной размерности R^n , $n \geq 1$, под действием ограниченной по модулю силы F [1–3]

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = F, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0, \quad |F| \leq F_0 \quad (1.1)$$

Ставится задача оптимального по быстродействию приведения на сферу S_r^n произвольного радиуса $r \geq 0$ с нулевой скоростью ("мягкая посадка")

$$|x(t_f) - x_0| = r, \quad v(t_f) = 0, \quad t_f \rightarrow \min_F \quad (1.2)$$

Ограничения на возможные положения точки x не налагаются: она может находиться как внутри сферы, так и вне ее, а траектория может пересекать поверхность S_r^n . Ситуация, когда сфера "непроницаема", также представляет значительный интерес и требует отдельного рассмотрения. Отметим, что для некоторого множества начальных данных решение задачи (1.1), (1.2) дает также решение задачи с указанными фазовыми ограничениями ("мягкая посадка" снаружи или изнутри). Случай $r = 0$ вырожденный и отвечает приведению в геометрическую точку $x(t_f) = x_0$ с нулевой скоростью; полный синтез такой задачи оптимального быстродействия построен ранее [3]. Поэтому далее считаем, что $r > 0$.

Отметим, что задача наискорейшего приведения точки на цилиндрическую поверхность $S_r^m \times R^{n-m}$, $m < n$, сводится к задаче (1.1), (1.2) при $n = m$.

Постановка задачи управления (1.1), (1.2) и ее полное решение в форме программы и синтеза может представить определенный интерес для приложений к механике полета.

Задача оптимального быстродействия содержит $3n + 3$ параметров: n -векторы x^0 , x_0 , v^0 и скаляры m , F_0 , r . Посредством переноса системы координат x , v в точку $x = x_0$, $v = 0$, введения единицы длины r и времени $(mr / F_0)^{1/2}$ получим соотношения

типа (1.1), (1.2), в которых $x_0 = 0$, $r = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$. В безразмерных переменных задача управления содержит $2n$ параметров: n -векторы x^0 , v^0 , изменяющиеся в неограниченных пределах.

Выпишем необходимые условия оптимальности управления $u = F/F_0$ в форме задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана [1]

$$(T'_x, v) - |T'_v| = -1, \quad u^* = -T'_v |T'_v|^{-1} \quad (1.3)$$

$$T = T(x, v) > 0, \quad x \in S_1^n, \quad v \neq 0; \quad T = 0, \quad x \in S_1^n, \quad v = 0$$

Здесь T – функция Беллмана, u^* – оптимальное управление в форме синтеза. Незвестная $T(x, v)$ строится методом характеристик, что в алгоритмическом аспекте эквивалентно решению краевой задачи принципа максимума Понтрягина [1]. Из свойства центральной симметрии следует, что при $n \geq 2$ (случай $n = 1$ особый и требует отдельного рассмотрения) искомая функция T определяется тремя автомодельными переменными l , h и c , а задача Коши (1.3) принимает вид

$$T'_l c / l + T'_c h^2 - (T'^2_h + 2T'_h T'_c c / h + T'^2_c l^2)^{1/2} = -1, \quad T = T(l, h, c) \quad (1.4)$$

$$l = |x|, \quad h = |v|, \quad c = (x, v); \quad T > 0, \quad l \neq 1, \quad h \neq 0; \quad T = 0, \quad l = 1, \quad h = 0$$

Это означает, что задача оптимального быстрогодействия для $n \geq 2$ эквивалентна случаю $n = 2$, т.е. плоской задаче. Плоскость, в которой происходит оптимальное управляемое движение, определяется двумя ненулевыми векторами x , v . Очевидно, случай $c = \pm lh$, включающий также случаи $x = 0$ или (и) $v = 0$, приводит к вырожденному одномерному движению. Свойство (1.4) эквивалентности плоской задаче полезно для построения решения исходной многомерной ($n > 2$) задачи оптимальной по быстродействию "мягкой посадки" на сферу. Оно также проявляется при применении необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [3].

Отметим, что задача управления имеет решение при произвольных значениях векторов x^0 , v^0 . В качестве допустимого можно взять постоянное управление $u_{(1)} = -v^0/h^0$, $h^0 = |v^0|$ на первом участке, приводящем к полному торможению в момент времени $t_{(1)} = h^0$, в точке $x(t_{(1)}) = x^{(1)}$, где $x^{(1)} = x^0 + \frac{1}{2}v^0 h^0$. Из точки покоя затем можно двигаться по прямой, проходящей через выбранную точку сферы, в частности через ближайшую $x^{(2)} = x^{(1)} / l^{(1)}$, $l^{(1)} = |x^{(1)}|$; расстояние между точками $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ равно $\Delta l_2 = |l^{(1)} - 1|$. При движении по указанной прямой потребуется $t_2 = 2\Delta l_2^{1/2}$ времени для достижения сферы в точке $x^{(2)}$ с гашением скорости, т.е. имеем оценку сверху t^* для t_f

$$t_f \leq t^* = h^0 + 2 \left| \left(l^{02} + c^0 h^0 + \frac{1}{4} h^{04} \right)^{1/2} - 1 \right|^{1/2}$$

Расчеты свидетельствуют (см. разд. 6), что для начальных данных, приводящих к траекториям с возвращением, приближенно реализуется описанный выше режим управления.

2. Краевая задача принципа максимума. Применим к исходной задаче необходимые условия оптимальности управления u в форме принципа максимума [3]. Вводя n -век-

торы переменных p и q , сопряженных x и v соответственно, обычным способом получим выражения для оптимального управления u^* и краевой задачи [3]

$$u^* = q |q|^{-1}, \quad q = \eta - \mu v t / t_f, \quad |q| = (1 - 2\sigma \mu t / t_f + \mu^2 (t / t_f)^2)^{1/2}$$

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u^*, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0, \quad |x(t_f)| = 1, \quad v(t_f) = 0 \quad (2.1)$$

$$\mu \geq 0, \quad |\sigma| \leq 1, \quad v = p |p|^{-1}, \quad p = \text{const}, \quad \sigma = (\eta, v)$$

Здесь η, v – единичные n -векторы, σ – скалярное произведение этих векторов. Отметим, что функция Гамильтона постоянна вдоль траекторий системы (2.1) и равна $|\eta - \mu v| \geq 0$. Неизвестные скалярные параметры μ, σ, t_f и векторы η, v подлежат определению из граничных (конечных) условий и условий трансверсальности [1].

С этой целью проинтегрируем уравнения для v, x согласно (2.1)

$$v(t) = v^0 + V_\eta(t)\eta + \mu V_v(t)v$$

$$x(t) = x^0 + v^0 t + X_\eta(t)\eta + \mu X_v(t)v \quad (2.2)$$

Скалярные функции $V_{\eta, v}(t), X_{\eta, v}(t)$ зависят также от искоемых параметров μ, σ, t_f . Учитывая ограничения на t_f, μ, σ , представим эти функции в виде [3]

$$V_\eta(t) = \frac{t_f}{\mu} V(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t}, \quad V_v(t) = -\frac{t_f}{\mu^2} [|q(\tau)| + \sigma V(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$X_\eta(t) = V_\eta(t)t - \frac{t_f^2}{\mu^2} [|q(\tau)| + \sigma V(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t}, \quad V(t) = \text{arsh} \frac{\mu t / t_f - \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \quad (2.3)$$

$$X_v(t) = V_v(t)t + \left[\frac{t_f^2}{2\mu^3} (\mu \tau / t_f + 3\sigma) |q(\tau)| + \frac{t_f^2}{2\mu^3} (3\sigma^2 - 1) V(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

Подставляя выражения (2.3) в (2.2), получим искомые зависимости от t и от векторов η и v , куда в качестве неизвестных войдут t_f, μ и σ . Воспользуемся соответствующими конечными условиями для $v(t)$ и условиями трансверсальности принципа максимума [1] для $x(t)$ при $t = t_f$. Получим систему $2n$ уравнений, содержащую неизвестный вектор $x(t_f)$,

$$V_\eta(t_f)\eta + \mu V_v(t_f)v = -v^0$$

$$X_\eta(t_f)\eta + \mu X_v(t_f)v = -x^0 - v^0 t_f + x(t_f) \quad (2.4)$$

$$\beta x(t_f) = v, \quad \beta^2 = 1 \quad (\beta = \pm 1, \quad x(t_f) = \beta v)$$

Параметр β , входящий в условие трансверсальности, имеет смысл приведенного множителя Лагранжа, принимает дискретные значения. Исключая $x(t_f)$ и σ , получим замкнутую систему уравнений относительно η, v и t_f, μ ; параметр β также подлежит определению. Вычисление корней и их исследование при произвольных значениях векторов v^0 и x^0 представляет основную трудность решения исходной задачи оптимального управления. Для ее преодоления воспользуемся структурными свойствами

коэффициентов $V_{\eta, v}(t_f)$, $X_{\eta, v}(t_f)$ как функций параметров t_f , μ , σ и приведем систему (2.4) к виду

$$\begin{aligned} x^0 &= \beta v + t_f^2(a_{\eta}\eta + \mu a_v v), \quad v^0 = t_f(b_{\eta}\eta + \mu b_v v) \\ a_{\eta} &= b_{\eta} = \mu^{-2}(a + \sigma b), \quad b_{\eta} = -b/\mu \\ a_{\eta} &= -\frac{1}{2}\mu^{-3}[(\mu + 3\sigma)a + \mu + (3\sigma^2 - 1)b] \\ a &= q(t)\Big|_{t=0}^{t=t_f} = (1 - 2\mu\sigma + \mu^2)^{1/2} - 1, \quad \mu \geq 0, \quad |\sigma| \leq 1 \\ b &= V(t)\Big|_{t=0}^{t=t_f} = \ln((\mu - \sigma + (1 - 2\mu\sigma + \mu^2)^{1/2})/(1 - \sigma)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дальнейший ход решения системы (2.5) аналогичен примененному в случае задачи попадания в начало координат $x(t_f) = 0$ с нулевой скоростью $v(t_f) = 0$ [3]. Существенное отличие от рассмотренного случая заключается в наличии слагаемого βv в соотношении (2.5) для x . Следует также отметить важное для дальнейшего анализа свойство независимости коэффициентов $a_{\eta, v}$, $b_{\eta, v}$ от неизвестной t_f . Кроме того, в ситуации общего положения имеют место строгие неравенства $\mu > 0$, $|\sigma| < 1$; случаи равенства являются критическими. Они требуют специального исследования и аккуратного предельного перехода (см. ниже).

3. Численно-аналитическое решение краевой задачи. Для решения системы трансцендентных уравнений (2.5) применим элементарные алгебраические преобразования и сведем ее к трем уравнениям относительно t_f , μ , σ . Такое приведение может быть реализовано различными способами [3]. Один из них заключается в разрешении относительно η , v линейной системы с блочно-диагональной матрицей. Эта операция довольно проста, хотя и громоздка. Итак, пусть векторы η^* , v^* определены как линейные функции векторов x^0 , v^0 посредством матрицы с блочно-диагональной структурой. Тогда могут быть получены три соотношения относительно неизвестных t_f , μ , σ : $\eta^{*2} = 1$, $v^{*2} = 1$, $(\eta^*, v^*) = \sigma$. После определения (с учетом двух возможностей $\beta = \pm 1$) корней этой системы t_{fi} , μ_i , σ_i выбирается оптимальный

$$t_{fi} \rightarrow \min_i, \quad t_{fi} > 0, \quad \mu_i > 0, \quad |\sigma_i| < 1$$

и подставляется в найденные выражения для η^* , v^* , которые используются при построении управления и траекторий, см. (2.1), (2.2).

Однако такой подход представляется громоздким. Поэтому на первом этапе решения системы (2.5) с помощью элементарных преобразований выписываются также три уравнения относительно t_f , μ , σ в другом виде

$$\begin{aligned} l^2 - 1 &= 2t_f^2\beta(\sigma a_{\eta} + \mu a_v) + t_f^4(a_{\eta}^2 + 2\mu\sigma a_{\eta}a_v + \mu^2 a_v^2) \\ h^2 &= t_f^2(b_{\eta}^2 + 2\mu\sigma b_{\eta}b_v + \mu^2 b_v^2) \equiv t_f^2 H^2(\mu, \sigma) \\ c &= \beta t_f(\sigma b_{\eta} + \mu b_v) + t_f^3(a_{\eta}b_{\eta} + \mu\sigma a_{\eta}b_v + \mu\sigma a_v b_{\eta} + \mu^2 a_v b_v) \\ l &= |x^0|, \quad h = |v^0|, \quad c = (x^0, v^0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

По аналогии с (1.4) в (3.1) для удобства введены скалярные параметры l , h , c , имеющие наглядный механический смысл. Напомним, что n -мерная система ($n \geq 2$) оказалась вновь эквивалентной двумерной системе ($n = 2$), допускающей удобное представление на плоскости. Во избежание недоразумений отметим, что при $n = 2$ фазовое пространство x , v будет четырехмерным. Без ограничения общности можно считать одно из значений x_1^0 или x_2^0 равным нулю.

Далее основное внимание уделяется определению корней системы (3.1) трансцендентных уравнений относительно t_f , μ , σ и их анализу как функций известных параметров l , h , c , изменяющихся в неограниченных пределах: $l, h \geq 0$, $|c| < \infty$. Трансцендентность обусловлена наличием степенных и логарифмических функций, см. (2.5). Это обстоятельство приводит к значительным вычислительным трудностям, так как при расчетах возникают степенные и логарифмические масштабы изменения искомых величин. Кроме того, эти трудности усугубляются в случае вырождения исходной многомерной задачи, т.е. когда оптимальное движение близко к прямолинейному, см. ниже и [3].

Итак, рассмотрим систему уравнений (3.1) и уменьшим ее порядок, исключив неизвестную $t_f > 0$. Это удобно осуществить с помощью второго соотношения, которое позволяет однозначно определить t_f через μ , σ

$$t_f = h / H(\mu, \sigma), \quad h, H > 0 \quad (3.2)$$

Функция H определена согласно (3.1). После подстановки выражения (3.2) в первое и третье уравнения (3.1) получается система относительно двух неизвестных μ , σ .

Введем новую переменную ω посредством соотношения

$$\sigma = \frac{\omega^2 - 2\mu\omega - 1}{(\omega - 1)^2} \quad (3.3)$$

Тогда выражение под знаком корня, с помощью которого определяется величина a в (2.5), примет вид

$$1 - 2\mu\sigma + \mu^2 = \left(\frac{\mu(\omega + 1) + 1 - \omega}{\omega - 1} \right)^2 \quad (3.4)$$

Далее, поскольку $\sigma \leq 1$, то из (3.3) получаем $\mu\omega \geq \omega - 1$. Так как $\mu > 0$, то $\mu(\omega + 1) > \omega - 1$. Следовательно, числитель дроби в (3.4) принимает положительные значения. С другой стороны, $\sigma \geq -1$ и из (3.3) имеем $\omega(\omega - (\mu + 1)) \geq 0$. В случае, когда $\omega > 0$, получаем $\omega \geq \mu + 1$, что в силу условия $\mu > 0$ дает $\omega > 1$. Итак, при $\omega > 0$ знаменатель дроби в (3.4) положителен. Тогда с учетом выражения (3.4) и последней строки в (2.5) получим

$$a = \mu(\omega + 1)/(\omega - 1) - 2, \quad b = \ln \omega \quad (3.5)$$

Соотношение (3.3) позволило превратить радикал, определяющий значение a , в линейное по μ и дробно-линейное по ω выражение. Одновременно, что представляется весьма неожиданным, удалось заменить выражение под знаком натурального логарифма, зависящее от неизвестных σ и μ , на ω . К сожалению, простой связи между поведением параметра ω и фазовыми переменными выявить не удалось.

Первое из уравнений (3.1) после подстановки выражения (3.2) и замены (3.3) переходит в уравнение четвертой степени относительно неизвестной μ . Коэффициенты этого полинома, зависящие только от ω , l , c , h и β , из-за своей громоздкости были построены с помощью компьютерной алгебры в форме фрагментов программы на языке C++. При проведении численного моделирования выяснилось, что при некоторых значениях этих четырех величин поиск корней указанного полинома не может быть проведен с удовлетворительной точностью из-за ошибок округления. Соответствующий анализ и преобразование коэффициентов были крайне затруднены из-за их громоздкости. Оказалось, однако, что существует сравнительно простая замена переменных, позволяющая не только значительно упростить все выражения, но и снизить влияние погрешностей счета.

Рассмотрим отрицательные значения вспомогательной переменной ω . Тогда знаменатель дроби в (3.4) отрицателен и последняя строка в (2.5) дает вместо представления для параметра b (3.5) выражение

$$b = \ln((\mu - \omega + 1)/(\mu\omega - \omega + 1))$$

Введем новую переменную s через μ , ω следующим образом:

$$s = \frac{\mu - \omega + 1}{\mu\omega - \omega + 1} \quad (3.6)$$

Введение неизвестной s позволяет установить интересный факт. Если исключить ω с помощью соотношения (3.6) и подставить в правую часть равенства (3.3), то получается выражение

$$\sigma = \frac{s^2 - 2s\mu - 1}{(s - 1)^2}$$

совпадающее с (3.3) с точностью до замены s на ω . Следовательно, все соотношения, полученные ранее, также справедливы с точностью до замены s на ω . В частности, в этом случае $b = \ln s$, где $s > 1$. Отсюда следует, что можно ограничиться значениями $\omega > 1$.

С помощью соотношения (3.6) можно выразить μ через s и ω и использовать в дальнейшем вне всякой связи со знаком ω . Имеем

$$\mu = \frac{s\omega + 1 - \omega - s}{s\omega - 1}$$

Подстановка этого выражения в уравнения (3.1) приводит к полиному четвертой степени относительно s . К сожалению, его коэффициенты также весьма громоздки, но они все же существенно компактнее, чем в случае полинома по μ , а главное, ни разу не приводили к указанным выше затруднениям при расчетах (кроме случаев, когда $\omega \approx 1$, см. ниже).

Вычисления выполнялись по следующей схеме. В качестве исходных данных использовались значения l , c и h . На первом этапе третье уравнение из (3.1) рассматривалось как определение некоторой функции $c^*(l, h, \omega, \beta, s(l, h, \omega, \beta))$. Поскольку l и h заданы, а $\beta = \pm 1$, то практически строились только зависимости $c^*(\omega)$ при $\beta = 1$ и $\beta = -1$. Значения s вычислялись по формулам Кардано как нули упомянутого полинома, в который превращается первое уравнение (3.1). Для каждого β в результате получалось до четырех ветвей на графике $c^*(\omega)$. Далее по виду графика определялись ветви, а также необходимые интервалы значений ω , содержавшие искомые корни уравнения $c^*(\omega) = c$. Это уравнение решалось численно методом бисекций. Если рассматривать расчет по формулам Кардано как элементарную операцию, то фактически приходилось решать только одно трансцендентное алгебраическое уравнение относительно одного неизвестного ω . Такая процедура проводилась для каждого корня каждой из ветвей, существование которого было установлено на предыдущем этапе. В конце выбиралось решение, соответствовавшее наименьшему времени движения t_f .

Для всех рассмотренных примеров большему значению ω соответствует большее значение времени движения, но доказать это аналитически затруднительно. Кроме того, каждая из ветвей при $\omega \gg 1$ всегда представляла собой монотонную функцию. Эти обстоятельства облегчали применение алгоритма. С другой стороны, когда оптимальная траектория является приближенно прямолинейной, оказывается, что соответствующие значения ω близки к единице; задача управления становится вырожденной. Возникающие при этом погрешности округления препятствуют нормальной работе программы. Можно использовать несколько способов преодоления указанных

трудностей. Во-первых, можно применять линейную интерполяцию графиков $c^*(\omega)$, так как искомое значение ω конечно. Во-вторых, можно применять точное решение для случая движения по прямой, описанное в разд. 5.

4. Определение решения задачи оптимального управления. После нахождения оптимального значения $\omega = \omega(l, h, c)$ и соответствующего ему значения $\beta = \pm 1$ ($\beta = \beta(l, h, c)$) для каждого фиксированного набора величин l, h, c по явным аналитическим формулам вычисляются параметры:

$$t_f = t_f(l, h, c), \quad \mu = \mu(l, h, c), \quad \sigma = \sigma(l, h, c) \quad (4.1)$$

Здесь t_f – минимальный корень системы (3.1) (время быстрогодействия), μ, σ – соответствующие вспомогательные параметры. Тем самым будут определены значения скалярных коэффициентов $a_{\eta, \nu}(l, h, c), b_{\eta, \nu}(l, h, c)$ в блочно-диагональной системе уравнений (2.5) относительно ортов η, ν , которая в ситуации общего положения невырождена [3]. Разрешая ее, получим искомые блочно-диагональные выражения для этих ортов через векторы x^0, v^0 в виде

$$\begin{aligned} \eta &= (-x^0 t_f b_{\nu} \mu + v^0 (t_f^2 a_{\nu} \mu + \beta)) \Delta^{-1} \\ \nu &= (x^0 t_f b_{\eta} - v^0 t_f^2 a_{\eta}) \Delta^{-1} \\ \Delta &= t_f b_{\eta} (t_f^2 a_{\nu} \mu + \beta) - t_f^3 a_{\eta} b_{\nu} \mu \neq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Коэффициенты при известных n -векторах x^0, v^0 представляют собой нелинейные функции этих векторов, определяемые численно на основе значений $l = |x^0|, h = |v^0|, c = (x^0, v^0)$. После подстановки ортов η, ν из (4.2) в выражение u^* из (2.1) получается n -вектор оптимального по быстродействию управления в форме программы u_p

$$\begin{aligned} u_p(t, x^0, v^0) &= -k_x(t, l, h, c) x^0 - k_v(t, l, h, c) v^0 \\ k_x &= (|q| \Delta)^{-1} \mu (b_{\nu} t_f + b_{\eta} t), \quad |q| \equiv Q(t, l, h, c) \\ k_v &= -(|q| \Delta)^{-1} (t_f (a_{\nu} t_f + a_{\eta} t) \mu + \beta), \quad \Delta = \Delta(l, h, c) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Время оптимального быстрогодействия t_f и параметр β определяются тремя величинами l, h, c согласно формулам (4.1) и результатам разд. 3. Отметим, что значения $\beta = \pm 1$ отвечают ситуациям, когда оптимальной оказывается посадка изнутри или снаружи соответственно [4]. При этом могут осуществляться движения без пересечения сферы, а также с одним или двумя пересечениями (см. ниже). Функция Q в (4.3) определяется формулой (2.1) и величинами t_f, μ, σ , найденными выше. Подстановка вектор-функции u_p из (4.3) в уравнения (2.1) и интегрирование по t приводит к траектории, которая может быть найдена аналитически в виде (2.2), (2.3), где все постоянные $t_f, \mu, \sigma, \eta, \nu$ определены через известные векторы x^0, v^0 . На основе этих параметров вычисляются различные характеристики оптимальной траектории; в частности, при $t = t_f$ угол γ между касательной к траектории и нормалью к поверхности определяется выражением

$$\cos \gamma = -(u, x)_{t_f} = -\beta (\sigma - \mu) (1 - 2\sigma\mu + \mu^2)^{-1/2}$$

Таким образом, полностью построено решение задачи оптимального программного управления о наискорейшем приведении материальной точки на сферу с нулевой скоростью из произвольного начального состояния посредством ограниченной силы в n -мерном ($n \geq 2$) пространстве. Вырожденный случай $n = 1$ (или случай движения по прямой) исследуется ниже в разд. 5.

Изложенный алгоритм применим для построения синтеза оптимального по быстродействию управления $u_s(x, v)$ и функции Беллмана $T(x, v)$, см. разд. 1. Для этой цели предположим, что измерения фазовых переменных и указанные в разд. 3 расчеты могут проводиться достаточно быстро, практически в каждый момент времени, или имеется возможность запоминания и аппроксимации функций трех переменных в достаточно широкой области их изменения. Тогда управление по обратной связи u_s и функция T определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_s(x, v) &= -k_{xs}(l, h, c)x - k_{vs}(l, h, c)v \\ T(x, v) &= t_f(l, h, c), \quad l = |x|, \quad h = |v|, \quad c = (x, v) \\ k_{xs}(l, h, c) &= k_x(0, l, h, c), \quad k_{vs}(l, h, c) = k_v(0, l, h, c) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Скалярные множители k_{xs} , k_{vs} в (4.4) имеют смысл коэффициентов обратной связи по положению x и скорости v соответственно. Интересно отметить, что матрицы коэффициентов обратных связей диагональны (пропорциональны единичным матрицам). В отличие от случая приведения точки в начало координат [3] эти коэффициенты, а также коэффициенты обратных связей по ортам x/l , v/h , зависят от трех переменных l , h , c . Это обстоятельство затрудняет численно-графическое их представление и построение полной картины синтеза. Синтез управления и соответствующие траектории могут быть представлены в виде эффективной вычислительной процедуры, см. ниже результаты расчетов и комментарии к ним в разд. 6. Отметим также, что функция Беллмана $T(x, v)$, определяемая как решение задачи Коши (1.3) или (1.4), и соответствующее оптимальное управление в форме синтеза $u_s(x, v)$ вычисляются в результате нахождения оптимального корня системы трансцендентных алгебраических уравнений и ортов (4.2).

5. Оптимальное по быстродействию управление при движении по прямой. В критическом случае, когда оптимальное управление и все основные соотношения вырождаются, требуется отдельное исследование. Как отмечалось, одномерное движение при $n \geq 2$ имеет место, если в некоторый момент времени t_0 , в частности $t_0 = 0$, выполняется хотя бы одно из равенств

$$x^0 = 0, \quad v^0 = 0, \quad (x^0, v^0) = \pm l^0 h^0 \quad (5.1)$$

Очевидно, при $n = 1$ справедливо последнее равенство из (5.1), именно $(x^0, v^0) = \pm l^0 h^0$. В случае, когда $|\sigma| = 1$, векторы η и v коллинеарны, и, следовательно, вектор управления во все моменты времени коллинеарен одной и той же прямой. Из условия трансверсальности следует, что эта прямая проходит через начало координат. Если вектор начальной скорости не коллинеарен указанной прямой, то невозможно сделать его нулевым ни за какое время. Итак, условие $|\sigma| = 1$ имеет следствием одномерное движение. Совершенно к тому же следствию приводит случай $\mu = 0$.

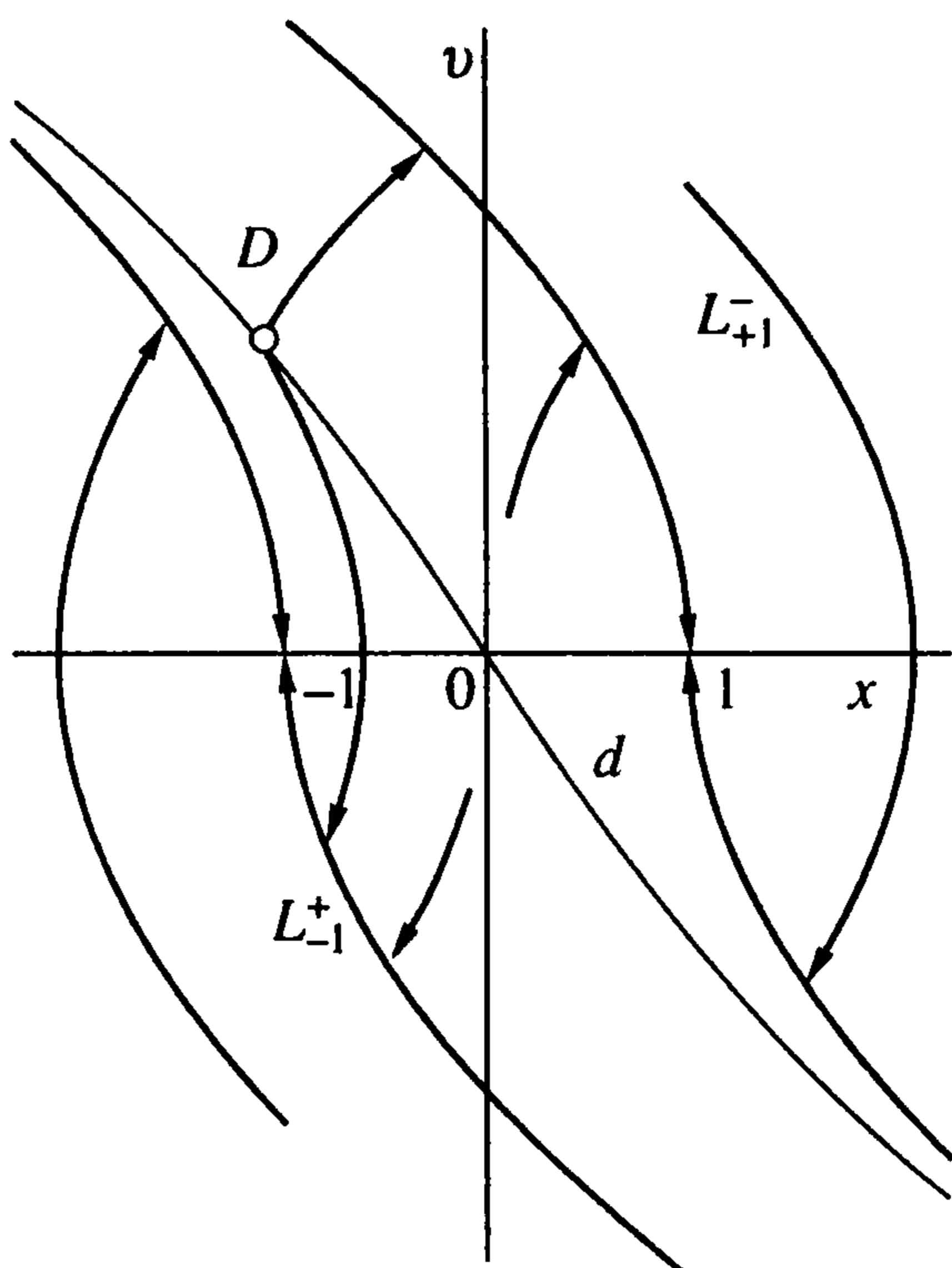
Итак, рассмотрим соответствующую задачу оптимального быстродействия для одномерной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0 \\ |x(t_f)| &= 1, \quad v(t_f) = 0, \quad t_f \rightarrow \min_u \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь x , v , u – скалярные переменные. Согласно (5.2), требуется привести систему из произвольной фазовой точки (x^0, v^0) в точку $(+1, 0)$ или $(-1, 0)$ за минимальное время t_f . С помощью принципа максимума решение задачи строится достаточно просто.

Фазовая плоскость (x, v) посредством антисимметричной кривой (сепаратрисы) разделяется на две части $P_{\pm 1}$ (фиг. 1)

$$x = -v(1 + (v/2)^2)^{1/2} \equiv d(v), \quad P_{\pm 1} = \{x, v: x \geq d(v)\} \quad (5.3)$$



Фиг. 1

В неограниченных областях $P_{\pm 1}$ оптимальное управление $u_{\pm 1}$ приводит систему из фазовой точки (x, v) в состояние $(\pm 1, 0)$ соответственно. Кривые переключений управлений имеют стандартный вид (фиг. 1)

$$L_{\pm 1} = \{x, v: x \pm 1 = \frac{1}{2} |v| v, (x, v) \in P_{\pm 1}\} \quad (5.4)$$

Простыми оценками устанавливается, что разделяющая кривая $x = d(v)$ в (5.3) расположена целиком между кривыми переключений $L_{\pm 1}$ из (5.4) и асимптотически приближается к L_{+1} при $v \rightarrow -\infty$ и к L_{-1} при $v \rightarrow \infty$. Каждая кривая $L_{\pm 1}$ состоит из двух полуветвей $L_{+1}^{\pm}, L_{-1}^{\pm}$, входящих в точки $(\pm 1, 0)$ при $u_{+1} = \pm 1, u_{-1} = \pm 1$ соответственно. Оптимальное управление в каждой области $P_{\pm 1}$ один раз изменяет знак при достижении системой фазовой кривой $L_{\pm 1}$. Оптимальная фазовая траектория остается в области $P_{\pm 1}$,

т.е. не пересекает кривой $x = d(v)$. Время быстрого действия $t_f = T_{\pm 1}$ определяется выражениями

$$T_{+1}(x, v) = \pm v + 2 \left(\pm(x-1) + \frac{1}{2} v^2 \right)^{\frac{1}{2}}, (x, v) \in P_{+1}, x-1 \geq -\frac{1}{2} |v| v \quad (5.5)$$

$$T_{-1}(x, v) = \pm v + 2 \left(\pm(x+1) + \frac{1}{2} v^2 \right)^{\frac{1}{2}}, (x, v) \in P_{-1}, x+1 \geq -\frac{1}{2} |v| v$$

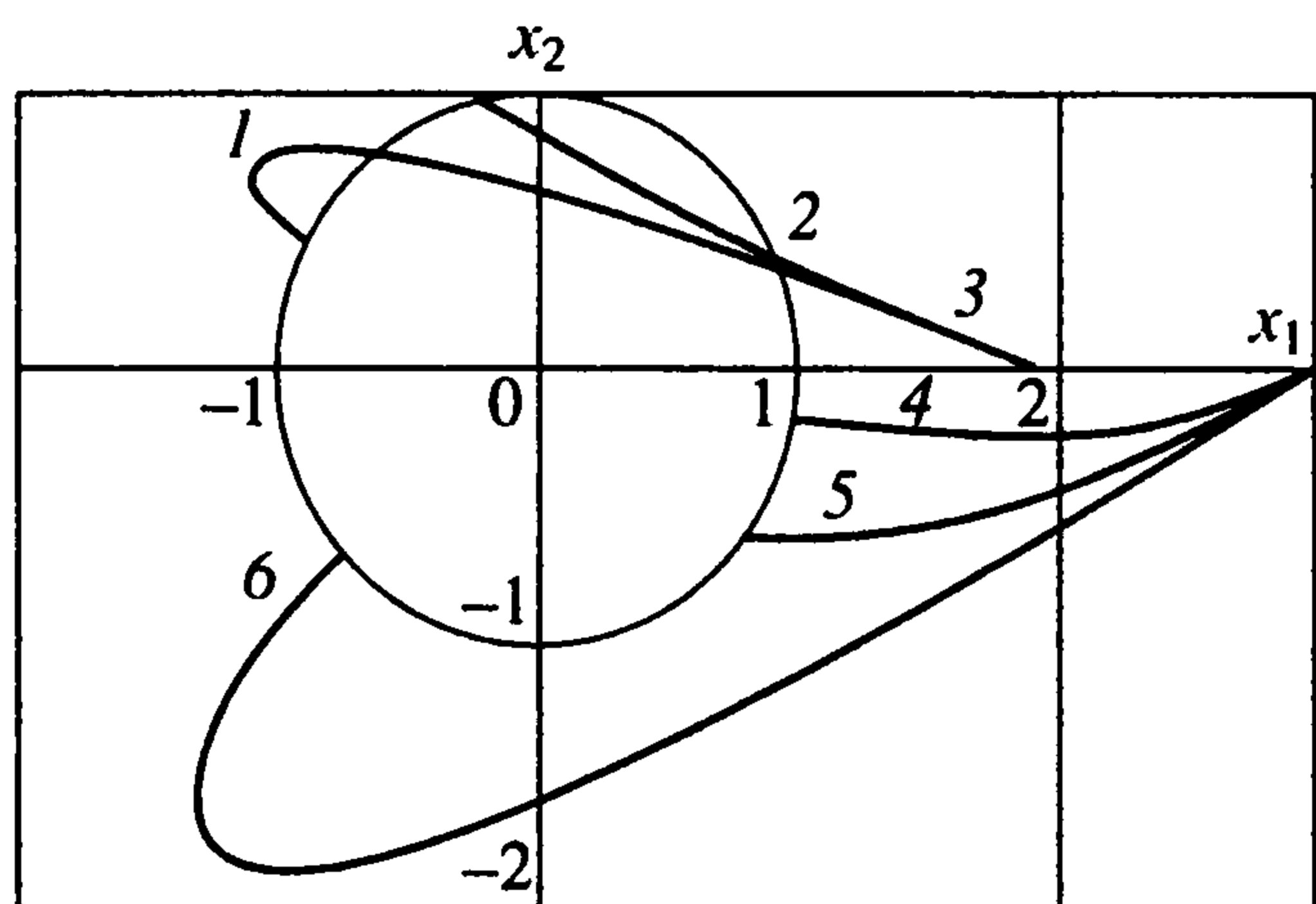
На разделяющей кривой $x = d(v)$ величины T_{+1} и T_{-1} из (5.5) совпадают и равны

$$\begin{aligned} T_{\pm 1}(d(v), v) &= T_d(v) = -v + 2 \left(-d(v) + 1 + \frac{1}{2} v^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= v + 2 \left(d(v) + 1 + \frac{1}{2} v^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = d(v) = -v \left(1 + \left(\frac{v}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

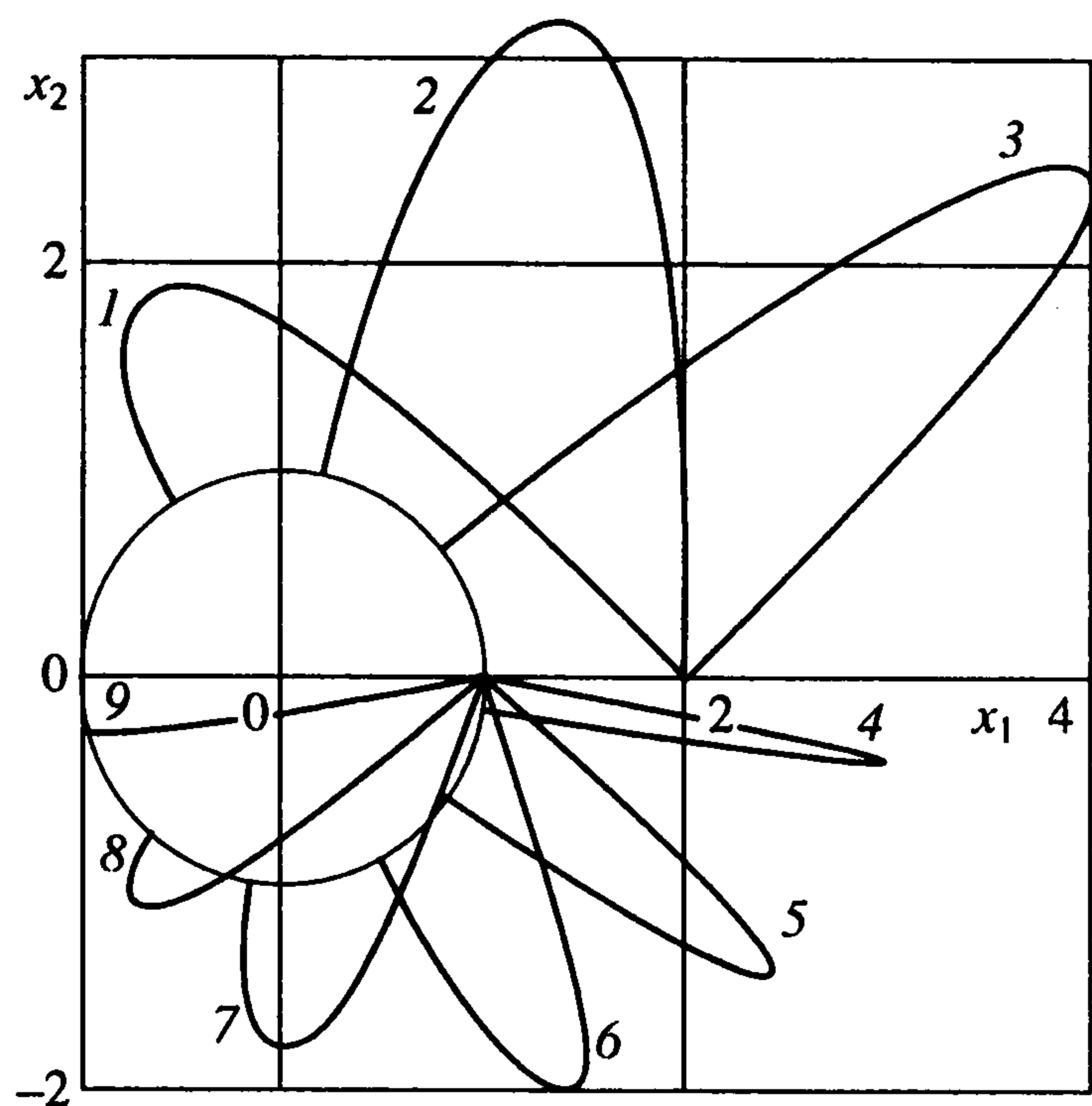
Итак, если фазовая точка D лежит на разделяющей кривой, то решение задачи оптимального быстрого действия двузначно (неединственно), см. фиг. 1. Происходит движение либо в точку $(+1, 0)$, либо $(-1, 0)$; время определяется соотношениями (5.6).

Таким образом, картина синтеза, оптимальное управление и время быстрого действия для одномерной задачи полностью определены, см. фиг. 1. По аналогии со стандартным подходом можно построить программное управление и траектории оптимального движения. Описано множество точек особого управления (решение задачи неединственно). Представляет интерес построение особого множества в общем случае двумерной системы ($n = 2$).

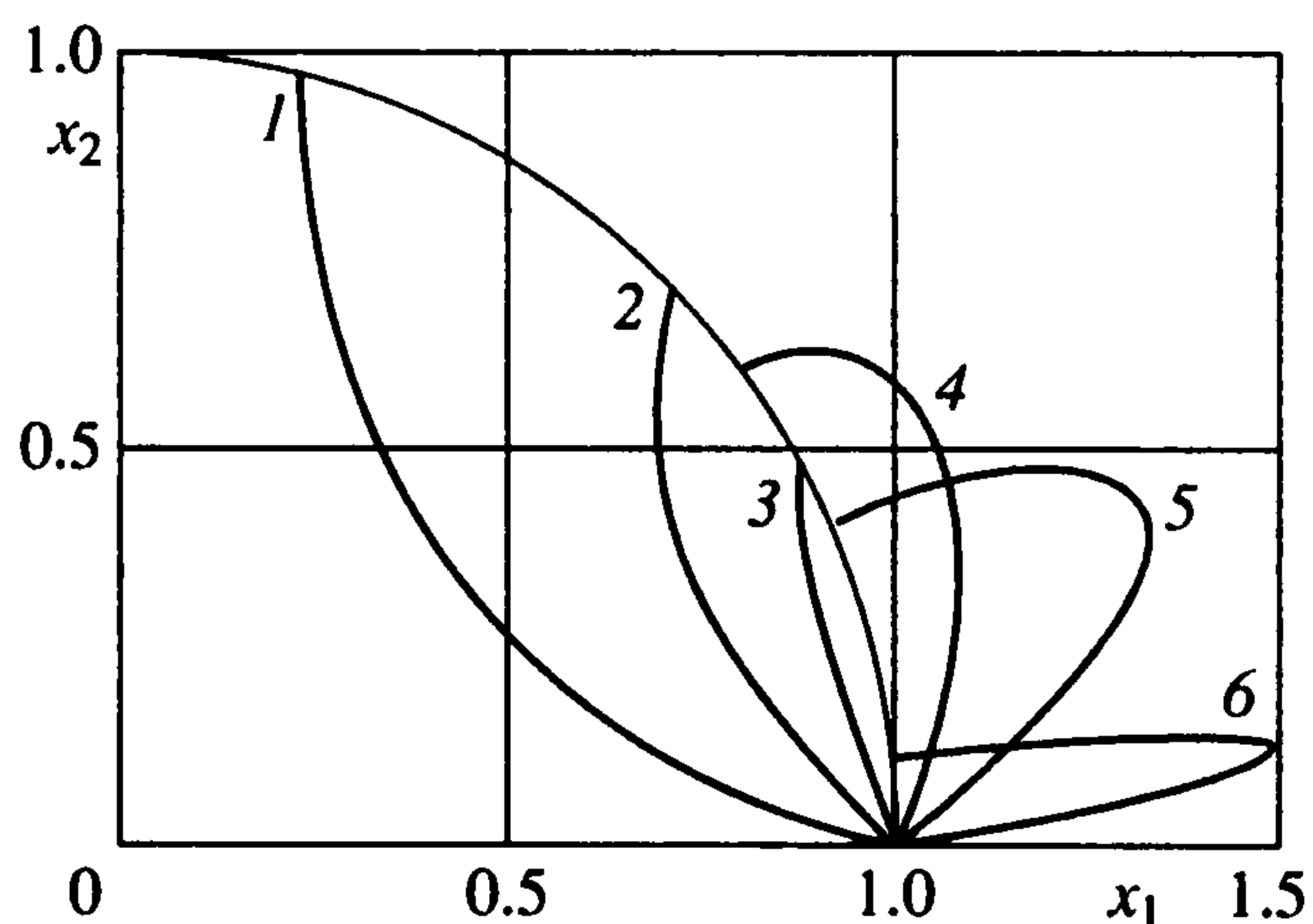
6. Результаты математического моделирования и выводы. Эффективность расчетов оптимального управления и движений, согласно методике разд. 4, подтверждается решением ряда задач для широкой области начальных значений двумерных векторов x^0, v^0 . Естественный интерес в теоретическом аспекте представляют ситуации, когда начальная точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ находится вблизи окружности ($l \approx 1$) или на окружности ($l = 1$). С прикладной точки зрения важны случаи, когда начальная точка находится



Фиг. 2



Фиг. 3



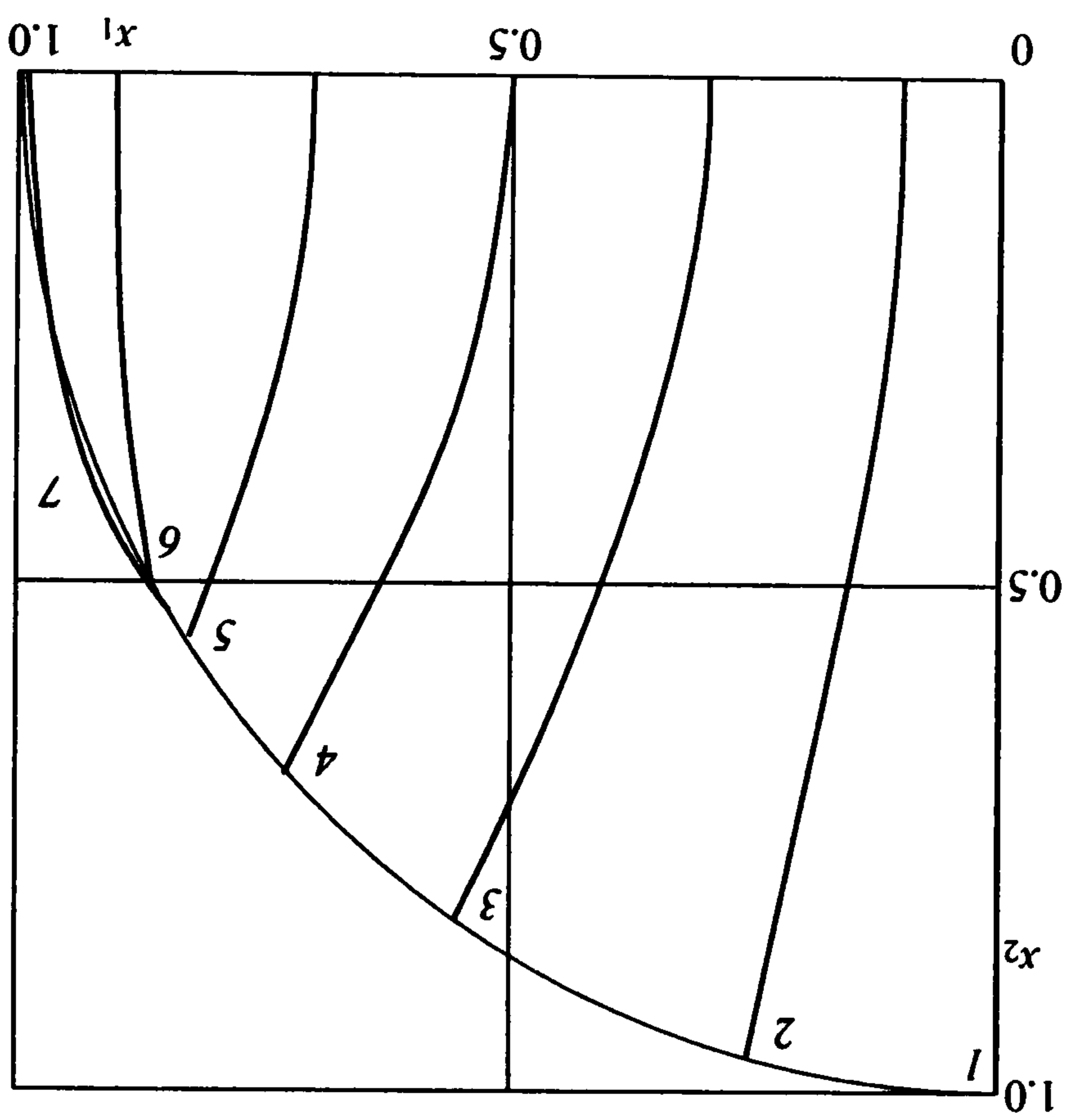
Фиг. 4

далеко от круга ($l \gg 1$) или близко к началу координат ($0 < l \ll 1$). Конечно, вид оптимальных траекторий и законы управления движением будут существенно зависеть от параметров $h = |\nu^0|$ и $c = (x^0, \nu^0) = lh \cos \alpha$. Как отмечалось, без ограничения общности можно положить $x_2^0 = 0$, т.е. $l = |x_1^0|$.

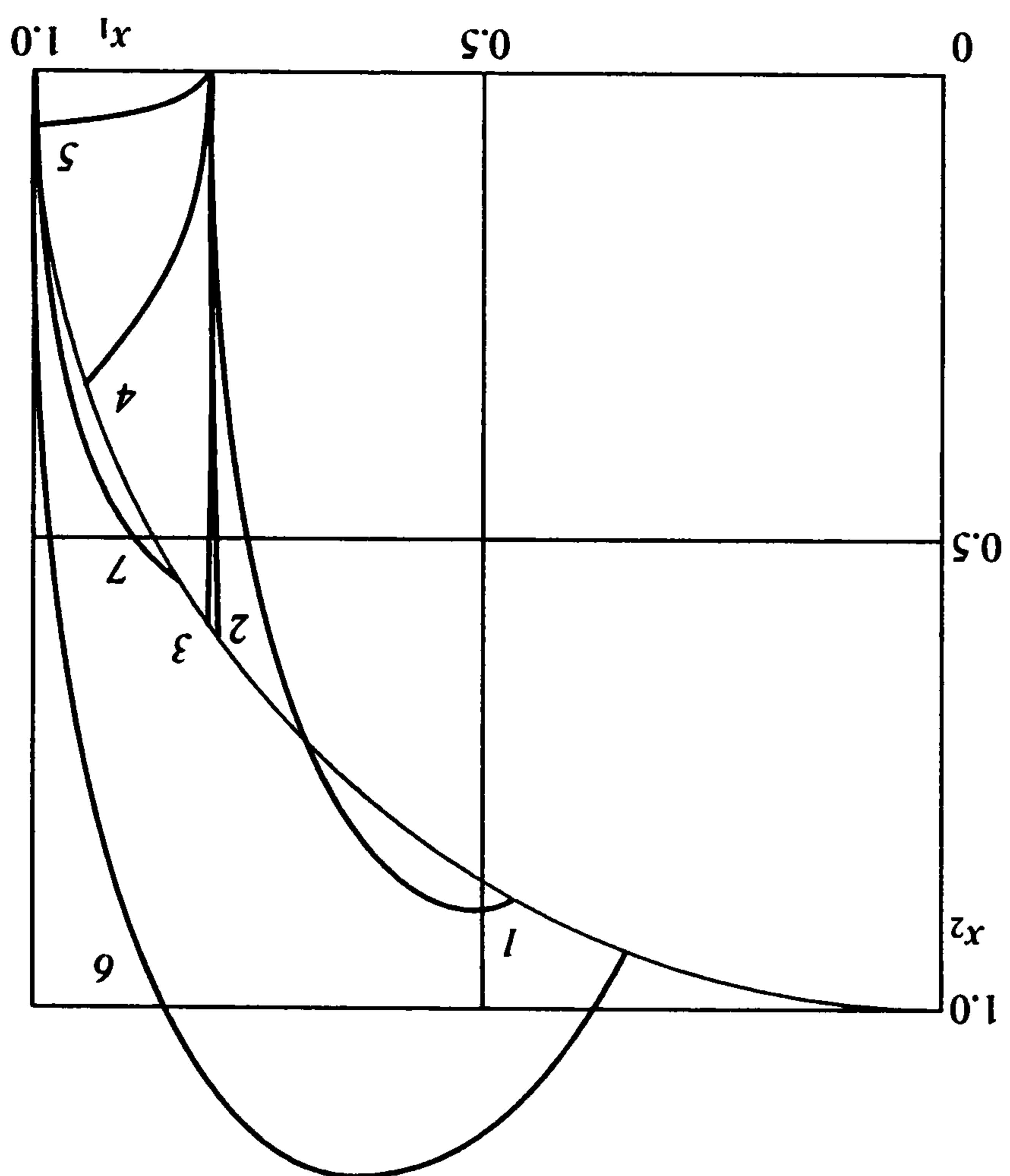
Представляется затруднительным описать множество режимов управления с исчерпывающей полнотой. Поэтому прокомментируем типичные ситуации, которые представлены на фиг. 2–6 (траектории) и фиг. 7–10 (управления и скорости).

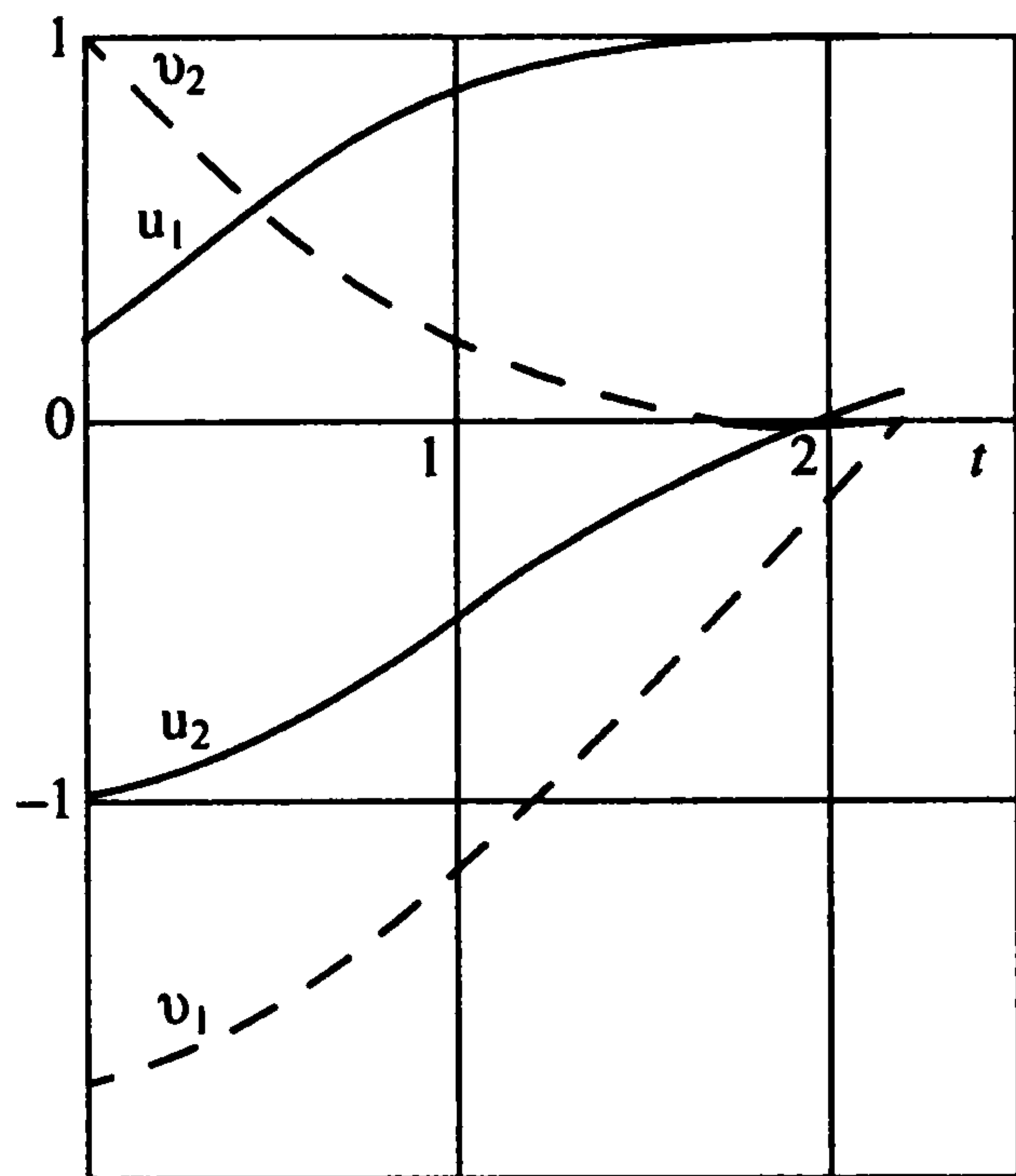
На фиг. 2 приведены два семейства траекторий 1–3 и 4–6, различающиеся в основном тем, что луч начального вектора скорости пересекает круг для первого семейства ($\alpha = 160^\circ$) и не пересекает – для второго ($\alpha = -150^\circ$). Также разнесены стартовые точки $x_1^0 = 2$ и $x_1^0 = 3$ при одинаковой начальной координате $x_2^0 = 0$; при этом $h = 2.5, 2.2, 1.5, 1, 2, 3$. В зависимости от величины скорости h может происходить как однократное (кривая 2) или двукратное (кривая 1) пересечение окружности, так и не происходить (остальные кривые). Кроме того, осуществляются либо относительно простые движения "в режиме торможения" (кривые 2–5 на фиг. 2, см. также фиг. 7, на которой представлены управления $u_{1,2}$ и скорости $\nu_{1,2}$), либо траектории "с возвратом" (кривые 1, 6). На фиг. 8 представлены управления и скорости, соответствующие кривой 6 на фиг. 2, для которой $x_1^0 = 3$, $h = 3$, $\alpha = -150^\circ$. "Возвратные" траектории

Фиг. 6

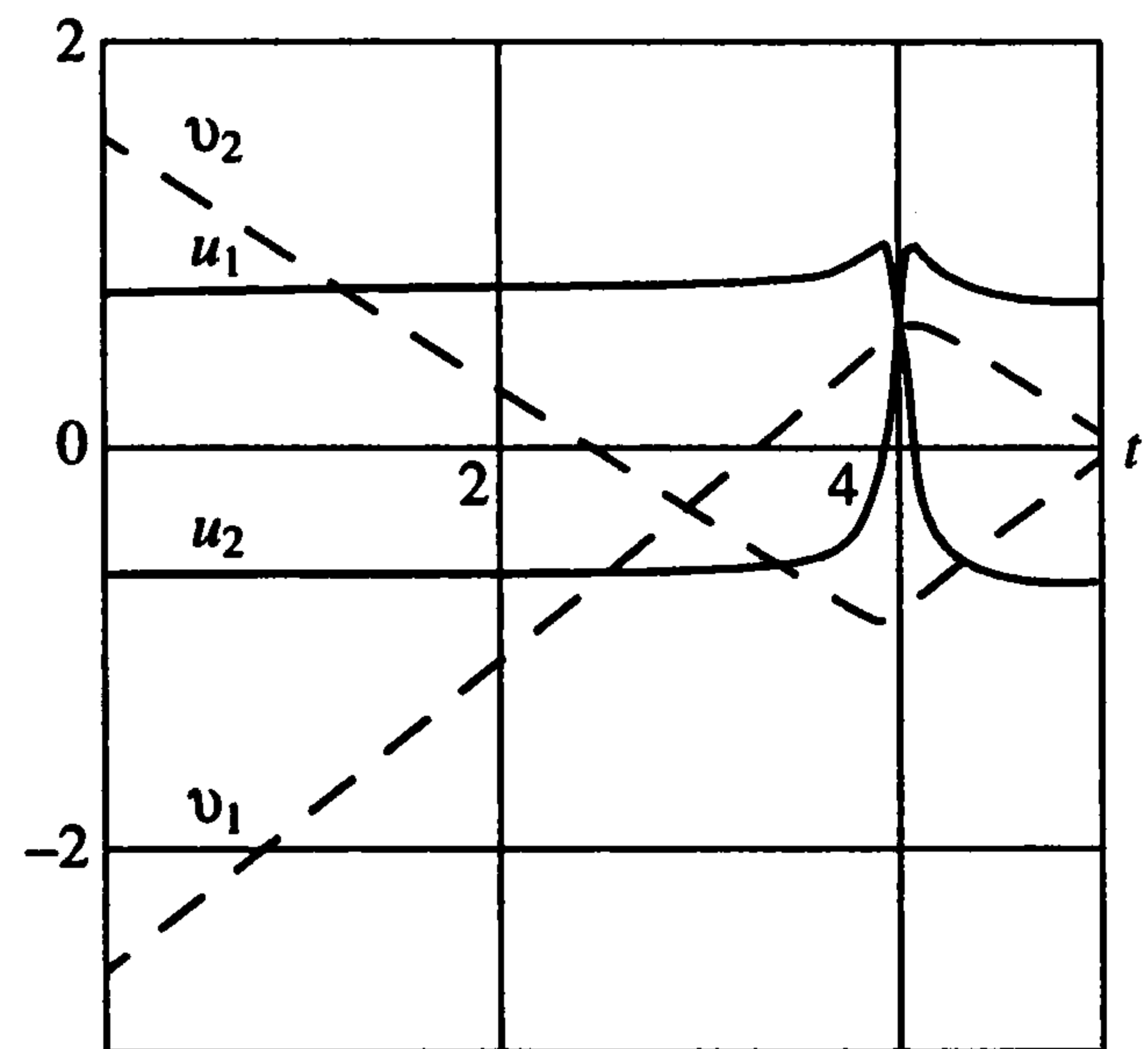


Фиг. 5

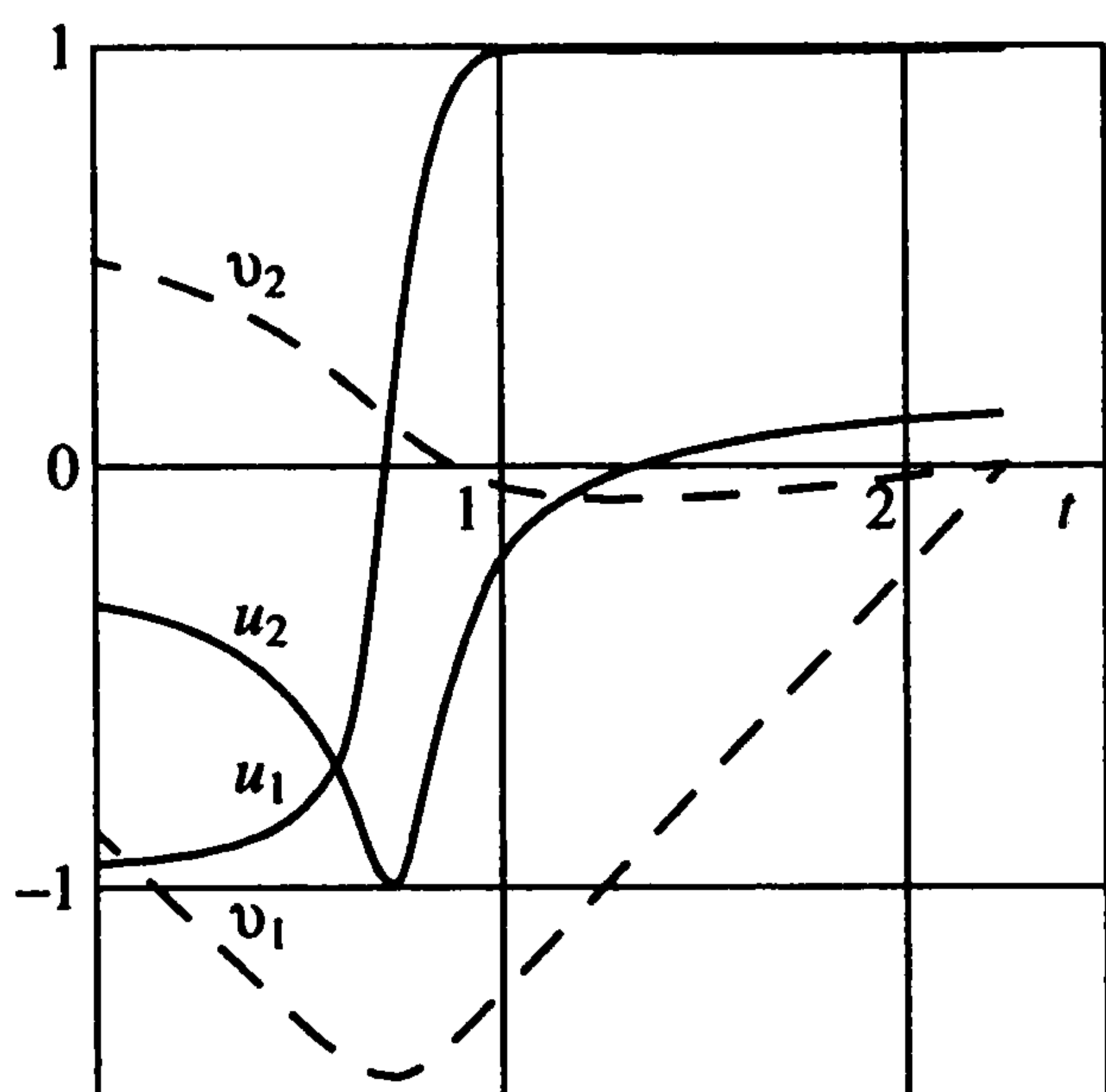




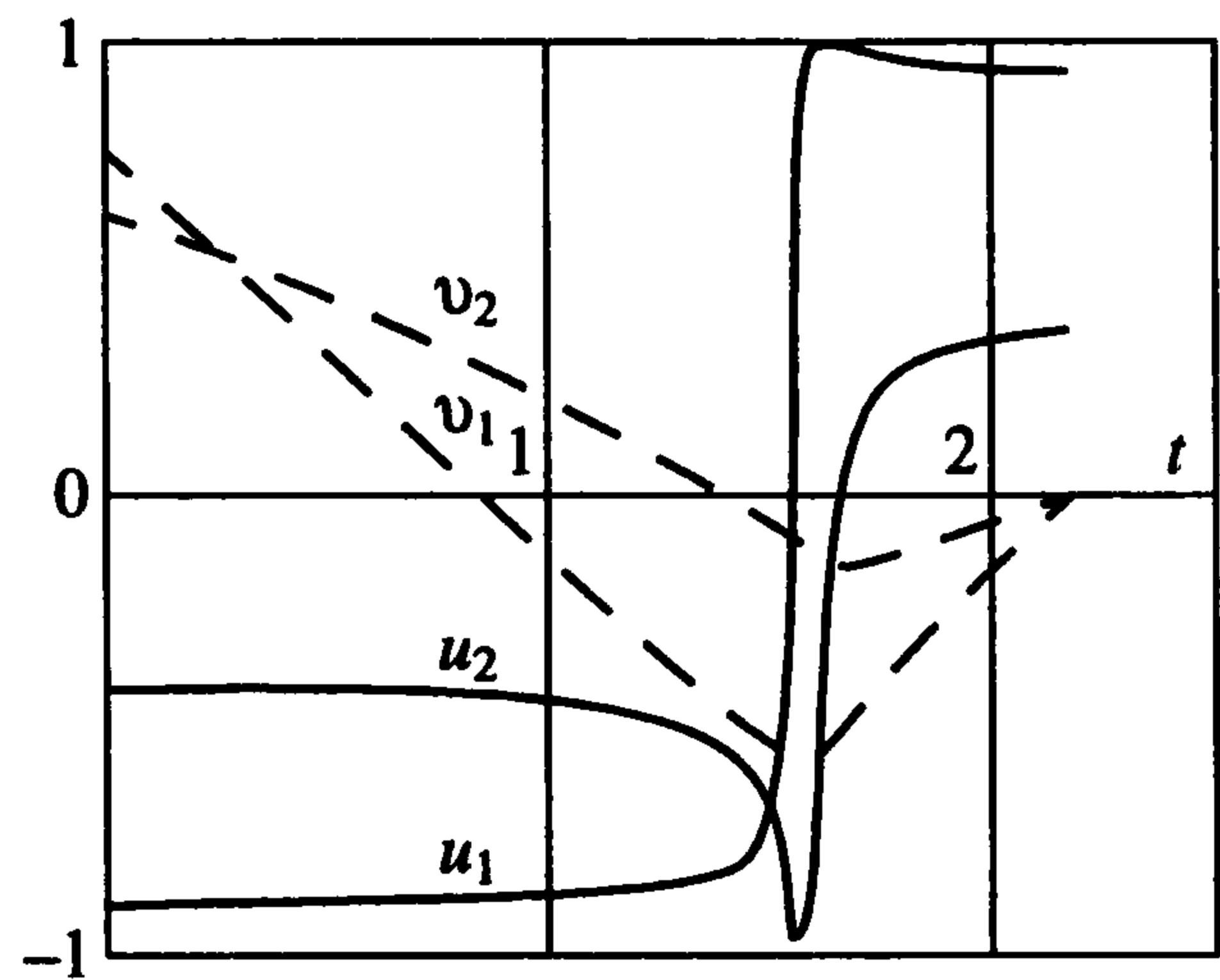
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

сопровождаются резко выраженными промежуточными участками движения с малой скоростью ("поворот" на кривой 6 и связанная с ним область малых скоростей на фиг. 8), а также "переключением управления" (фиг. 8). Время быстродействия t_f для траекторий 1–6 составляет величины

$$t_f \approx 3.58, 2.21, 1.50, 2.25, 2.20, 5.06$$

Для траекторий с возвращением t_f изменяется быстрее с ростом h , чем в случаях движения "в режиме торможения".

Аналогично можно прокомментировать траектории и режимы управления, представленные на фиг. 3, содержащей два семейства кривых 1–3 и 4–9. Отметим, что все траектории "возвратные". Кривым 1–3 отвечает $x_1^0 = 2$, $h = 2.5$, $\alpha = 135^\circ, 90^\circ, 45^\circ$. Траектории 4–9 начинаются на границе круга со скоростью $h = 2.5$ и различными углами

$$\alpha = -10^\circ, -40^\circ, -70^\circ, -110^\circ, -140^\circ, -170^\circ$$

Очевидно, траектории 1–6 не пересекают круг, а 7–9 – пересекают, что обусловлено направлением и величиной скорости. Все посадки на окружность происходят снаружи. Величина t_f , соответствующая кривым 1–9, принимает значения

$$t_f = 4.36, 5.56, 6.31, 4.82, 4.68, 4.38, 3.73, 3.07, 2.29$$

Примерами траекторий наиболее резко выраженного возвратного типа служат кривые 3–5. Наряду с "предельными" режимами управления, представленными на фиг. 7–8, могут реализовываться "промежуточные" режимы (фиг. 9).

На фиг. 4 приведено семейство траекторий 1–6 для величины скорости $h = 1$, меньшей чем для кривых 4–9 на фиг. 3. Траектории 4–6, не пересекающие окружность, качественно сходны с кривыми "возвратного" типа 1–9 на фиг. 3. Траектории 1–3, попадающие внутрь круга, могут быть отнесены к движениям "в режиме торможения", см. кривые 2–5 на фиг. 2 (см. также траектории 3–5 на фиг. 5 и кривые на фиг. 6). Время быстрогодействия t_f для траекторий 1–6 принимает значения

$$t_f \approx 1.91, 1.37, 1.01, 1.67, 2.19, 2.40$$

Следует отметить, что зависимость времени быстрогодействия от начального угла наклона вектора скорости немонотонна.

Было также замечено, что свойство невырожденности при $t = 0$ сохраняется для $0 < t < t_f$.

На фиг. 5 представлены два семейства кривых, для которых вектор скорости в начальный момент времени $t = 0$ направлен ортогонально оси x_1 , т.е. $\alpha = 90^\circ$. Для первого семейства (кривые 1–5) $x_1^0 = 0.8$, для второго (кривые 6, 7) $x_1^0 = 1$. В обоих случаях параметром семейства является величина скорости h . Для первого семейства это соответственно $h = 1.3, 1.101, 1.0910, 0.7, 0.1$, а для второго – $h = 1.5, 1$. Интересно отметить, что для первого семейства существует критическое значение $h^* \approx 1.1$, для которого режим торможения (см. кривую 3) переходит в режим с возвращением (см. кривую 2) и "посадка" происходит снаружи. Все кривые остаются внутри круга при $0 < h < h^*$, а при $h > h^*$ траектории пересекают границу. Значения времени оптимального быстрогодействия для кривых 1–7 равны соответственно

$$t_f = 1.67, 1.10, 1.09, 0.91, 0.89, 2.60, 1.13$$

Следует также отметить, что изменение времени оптимального быстрогодействия для кривых первого семейства немонотонно с возрастанием скорости. Сперва оно несколько убывает с ростом h ; например при $h = 0.1$ время $t_f \approx 0.89$, а при $h = 0.4$ время $t_f \approx 0.88$. Для $h \geq 0.5$ начинает возрастать, например $t_f \approx 0.91$ для $h = 0.7$ и $t_f \approx 1.09$ для $h = 1.09$.

На фиг. 6 представлено семейство траекторий (кривые 1–7), для которых $h = 1$, $\alpha = 90^\circ$, $u_1^0 = 0$, $u_2^0 = 1$, а значение x_1^0 изменяется в пределах $0 < x_1^0 < 1$. Кривой 1 отвечает $x_1^0 = 0.001$, а кривой 7 – $x_1^0 = 0.99$; траектории 2–6 начинаются при $x_1^0 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$. Все режимы управления на фиг. 6 соответствуют "торможению". В строгом смысле движение в режиме торможения имеет место при $x_1^0 = 0$. Однако уже при $x_1^0 = 0.001$ заметен вначале короткий ($\Delta t \approx 0.25$) участок разгона ($u_2 \approx 1, u_1 \approx 0$) вдоль оси x_2 , а затем участок торможения ($u_2 \approx -1, u_1 \approx 0$). При $x_1^0 = 0.1$ (кривая 2) на коротком начальном участке $\Delta t \approx 0.25$ управление u_2 изменяется почти так же, как и для $x_1^0 = 0.001$ (модуль u_2 несколько меньше); управление u_1 отлично от нуля и приводит к заметному смещению конца траектории вправо. Интересно отметить поведение кривой 7 вблизи границы круга: оптимальная траектория пересекает окружность и посадка происходит снаружи. Кривым 1–7 соответствуют следующие значения времени быстрогодействия:

$$t_f \approx 1.45, 1.44, 1.37, 1.24, 1.09, 1.01; 1.11$$

Следует обратить внимание на интересный факт: при приближении величины x_1^0 к правой границе отрезка $[0, 1]$ время быстрогодействия сравнительно быстро убывает (что представляется естественным), а затем возрастает, что не совсем очевидно. Это свойство зависимости от x_1^0 аналогично рассмотренному выше свойству зависимости от h для траекторий 1–5 на фиг. 5. Довольно распространенное свойство немонотонной зависимости времени быстрогодействия от параметров усугубляется, естественно, тем, что терминальное множество представляет из себя не точку, а окружность.

Таким образом, изложенные результаты расчетов свидетельствуют о высокой эффективности разработанного алгоритма для построения оптимальных по быстродействию режимов движения при решении модельной задачи о наискорейшей мягкой посадке объекта на сферу посредством ограниченной силы. Исследование оптимальных траекторий позволяет установить ряд интересных качественных особенностей управляемых движений, отмеченных выше.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00252, 02-01-00201) и в рамках гранта поддержки ведущих научных школ (00-15-96013).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию приведения материальной точки в заданное положение с нулевой скоростью // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 129–138.
4. Акуленко Л.Д. Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию пересечения сферы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 724–735.

Москва

Поступила в редакцию
16.II. 2001