

УДК 539.3

© 2001 г. Е.З. Король.

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН НА ЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Разработана методика решения краевых задач неосесимметричного продольно-поперечного изгиба тонких цилиндрических ортотропных линейно-термоупругих кольцевых и сплошных круговых пластин на линейно-упругом основании в классической постановке. Заданные и искомые функции представимы разложениями Фурье. Разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка бесселева типа. Решение однородной системы получено по развитой автором¹ методике (обобщение методики Вебера–Неймана–Шлефли [1–5]) определения фундаментальных решений в форме обобщенных степенных рядов – цилиндрических функций высшего порядка первого, второго и высших родов, основанной на свойстве непрерывной зависимости решений от параметров. Частные решения определяются методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных). Приведены результаты численных расчетов для пластины с шарнирно опертым внешним и нагруженным распределенным изгибающим моментом внутренним контурами.

В рамках модели цилиндрически ортотропных круговых пластин на линейно-упругом основании (см. монографии и обзоры [6–10]) были получены точные решения для осесимметричного изгиба [6, 7] и для частных случаев [8–10]. Решения задач продольно-поперечного неосесимметричного изгиба общего вида отсутствуют. Ниже дается такое решение.

1. Основные положения и уравнения задачи. Рассматривается круговая (кольцевая или сплошная) тонкая пластина постоянной толщины h , внешнего $r = a$ и внутреннего радиусов $r = b$ в полярной системе координат. Пластина скреплена с линейно-упругим (по Винклеру) основанием, коэффициенты сопротивления которого в радиальном K_u , кольцевом K_v и поперечном K_w направлениях постоянны. Пластина находится под действием распределенных радиальной $q_1(r, \theta)$, тангенциальной $q_2(r, \theta)$ и нормальной $q_z(r, \theta)$ нагрузок, приведенных к срединной поверхности пластины, и нагревается от начальной температуры $T_0(r, \theta, z)$ в естественном состоянии до температуры $T(r, \theta, z)$. Линейно-термоупругие (по Гуку–Дюамелю–Нейману) деформации пластины малы (по Коши), справедливы геометрические соотношения Кирхгоффа, а также условия обобщенного плоского напряженного состояния. Главные оси цилиндрической ортотропии совпадают с цилиндрической системой координат, связанной со срединной (базовой) поверхностью. Поверхности, эквидистантные срединной, изгибаются подобным образом, так что параметры Ламе и радиусы кривизны их совпадают. Внутренние слои пластины не оказывают давления друг на друга. Влияние продольных усилий на изгиб пластины пренебрежимо мало. Внешние распределенные по плоскости и по контурам нагрузки (удельные радиальные $N_{1b}(\theta)$, $N_{1a}(\theta)$ и поперечные $R_{1b}(\theta)$, $R_{1a}(\theta)$)

¹ Король Е.З. Фундаментальная система решений дифференциальных уравнений N -го порядка бесселевого типа и их приложения в МТДТ. Ч. I. Цилиндрические функции N -го порядка. Обобщение формул Неймана–Вебера–Шлефли. М.: НИИ Механики МГУ, 1998. 78 с. – Деп. ВИНТИ 03.04.98, № 990–В98.

усилия и изгибающие $M_{1b}(\theta)$, $M_{1a}(\theta)$ моменты, приведенные к срединной плоскости), распределение температуры или смещения (радиальные $u_b(\theta)$, $u_a(\theta)$, кольцевые $v_b(\theta)$, $v_a(\theta)$ и прогиб $w_b(\theta)$, $w_a(\theta)$), их производные и линейные их комбинации представимы рядами Фурье по окружной координате θ .

Требуется определить величины радиального $u(r, \theta)$ и тангенциального $v(r, \theta)$ смещений срединной (базовой) плоскости, ее прогиб $w(r, \theta)$, удельные усилия радиальные $N_1(r, \theta)$, кольцевые $N_2(r, \theta)$ и сдвига $S(r, \theta)$, удельные изгибающие радиальный $M_1(r, \theta)$, кольцевой $M_2(r, \theta)$ и крутящий $H(r, \theta)$ моменты, удельные поперечные усилия радиальное $Q_1(r, \theta)$ и кольцевое $Q_2(r, \theta)$, статически эквивалентные соответственно внутренним напряжениям и моментам внутренних напряжений относительно локальных осей координат, совпадающих с касательными к координатной сетке глобальной (цилиндрической) системе координат (r, θ, z) с началом, расположенным в центре окружности внутреннего контура пластины; ось z направлена по нормали к срединной плоскости.

Уравнения малого продольно-поперечного изгиба цилиндрически ортотропных тонких упругих пластин относительно радиальных $\bar{u}(\rho, \theta) = u/a$ и кольцевых (тангенциальных) $\bar{v}(\rho, \theta) = v/a$ смещений, отнесенных к радиусу a , и прогиба срединной поверхности $\bar{w}(\rho, \theta) = w/h$, отнесенного к толщине h , имеют вид [11, 12] (далее черту над величинами \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , а также над безразмерной относительной координатой $\bar{z} = z/h$ опускаем):

равновесие в радиальном и кольцевом направлениях (связная система из двух уравнений).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{c}{\rho^2} u + \frac{d}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (\omega_{21} + d) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{c+d}{\omega_{21} + d} \frac{v}{\rho} \right] = f_1(\rho, \theta) - k_u^2 u \quad (1.1)$$

$$\frac{\omega_{21} + d}{d} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{c+d}{\omega_{21} + d} \frac{u}{\rho} \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{c}{d} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = f_2(\rho, \theta) - k_v^2 v \quad (1.2)$$

равновесие при изгибе (несвязное одно уравнение)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} - \frac{c}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{c}{\rho^3} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{c}{\rho^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{2(\omega_{21} + 2d)}{\rho^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} - \frac{2(\omega_{21} + 2d)}{\rho^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \theta^2} + \frac{2(c + \omega_{21} + 2d)}{\rho^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = f_z(\rho, \theta) - k_w^4 w \quad (1.3)$$

Здесь

$$c = \frac{E_2}{E_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{D_2}{D_1}; \quad B_i = \frac{E_i h}{1 - \omega_{21} \omega_{12}}, \quad D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \omega_{12} \omega_{21})}, \quad i = 1, 2$$

$$2d = \frac{2G_{12}(1 - \omega_{21} \omega_{12})}{E_1} = \frac{B_3}{B_1} = \frac{D_3}{D_1}$$

$$e = \omega_{21} + 2d, \quad B_3 = G_{12} h, \quad D_3 = \frac{2G_{12} h^3}{12}$$

$$k_u^2 = \frac{K_u a^2}{B_1 h}, \quad k_v^2 = \frac{K_v a^2}{B_3 h}, \quad k_w^4 = \frac{K_w a^4}{D_1 h}$$

$$f_1(\rho, \theta) = \frac{q_1(\rho, \theta) a^2}{B_1} + q_{1T}(\rho, \theta), \quad f_2(\rho, \theta) = \frac{q_2(\rho, \theta) a^2}{B_3} + q_{2T}(\rho, \theta)$$

$$f_z(\rho, \theta) = \frac{q_z(\rho, \theta)a^4}{D_1 h} - q_{zT}(\rho, \theta)$$

$$q_{1T}(\rho, \theta) = (\alpha_1 + \omega_{21}\alpha_2) \frac{\partial n_T}{\partial \rho} + (\alpha_1(1 - \omega_{21}) + (\omega_{21} - c)\alpha_2) \frac{n_T}{\rho}$$

$$q_{2T}(\rho, \theta) = \frac{1}{d} \left[(\omega_{21}\alpha_1 + c\alpha_2) \frac{1}{\rho} \frac{\partial n_T}{\partial \theta} \right]$$

$$q_{zT}(\rho, \theta) = \frac{a^2}{h^2} \left\{ (\alpha_1 + \omega_{21}\alpha_2) \frac{\partial^2 m_T}{\partial \rho^2} + ((\alpha_1 + \omega_{21}\alpha_2) - c(\omega_{12}\alpha_1 + \alpha_2)) \frac{1}{\rho} \frac{\partial m_T}{\partial \rho} + c(\omega_{12}\alpha_1 + \alpha_2) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 m_T}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$n_T = \int_{-1/2}^{1/2} t(\rho, \theta, z) dz, \quad m_T = 12 \int_{-1/2}^{1/2} t(\rho, \theta, z) z dz$$

$$t(\rho, \theta, z) = T(\rho, \theta, z) - T_0(\rho, \theta, z)$$

$\rho = r/a$ – безразмерная радиальная координата, $\rho \leq 1$; z – относительная координата по толщине, $-1/2 \leq z \leq 1/2$; c – коэффициент ортотропии; E_1 и E_2 – модули Юнга в радиальном и кольцевом направлениях; B_i – жесткости на растяжение – сжатие; D_i – изгибные жесткости; $2d$ – коэффициент сдвиговой ортотропии; e – приведенный коэффициент сдвиговой ортотропии; ω_{21} и ω_{12} – коэффициенты поперечной деформации в направлении 2 (или 1) при растяжении (сжатии) в направлении 1 (или 2) (коэффициенты Пуассона); B_3 – сдвиговая жесткость; D_3 – крутильная жесткость; k_u^2 – радиальный, k_v^2 – кольцевой и k_w^2 – поперечный приведенные коэффициенты "постели"; $f_1(\rho, \theta)$ – радиальная, $f_2(\rho, \theta)$ – тангенциальная и $f_z(\rho, \theta)$ – нормальная обобщенные "силовые" нагрузки; $q_1(\rho, \theta)$ – радиальная, $q_2(\rho, \theta)$ – кольцевая и $q_z(\rho, \theta)$ – нормальная заданные распределенные силовые нагрузки; $q_{1T}(\rho, \theta)$ – радиальная, $q_{2T}(\rho, \theta)$ – кольцевая и $q_{zT}(\rho, \theta)$ – нормальные заданные распределенные "термические нагрузки"; α_1 и α_2 – коэффициенты линейного термического расширения в радиальном и кольцевом направлениях; n_T – средняя температура и m_T – средний градиент температуры по толщине пластины; $t(\rho, \theta, z)$ – разность температур текущего и естественного $T_0(\rho, \theta, z)$ ненапряженного и недеформированного состояния.

Для модулей упругости ортотропного тела, коэффициентов Пуассона и коэффициентов линейного термического расширения справедливы следующие соотношения:

$$E_1 \omega_{21} = E_2 \omega_{12}, \quad E_1 \alpha_1^2 = E_2 \alpha_2^2$$

последние из которых следуют из анализа [13] термодинамических потенциалов (внутренней энергии $U(\epsilon, q)$, свободной энергии $F(\epsilon, T)$, потенциала Гиббса $X(\sigma, T)$ и энтальпии $Y(\sigma, q)$).

2. Разрешающая система уравнений. Представим известные

$$\{u_1, u_\beta, \vartheta_1, \vartheta_\beta, n_{11}, n_{1\beta}, m_{11}, m_{1\beta}, s_{1\beta}, s_{11}, r_{11}, r_{1\beta}\}$$

распределенные по плоскости и по внутреннему $\rho = \beta = b/a$ и внешнему $\rho = 1$ контурам нагрузки и температуру, а также искомые функции

$$\{u, v, w, n_1, n_2, s_1, m_1, m_2, h_1, r_1, r_2\}$$

где силовые характеристики отнесены к жесткостям

$$n_{(1,2)} = \frac{N_{(1,2)}}{B_1}, \quad m_{(1,2)} = \frac{M_{(1,2)} a^2}{D_1 h}, \quad r_{(1,2)} = \frac{R_{(1,2)} a^3}{D_1 h}, \quad h_1 = \frac{H a^3}{D_3 h}, \quad s_1 = \frac{S}{B_3}$$

разложениями Фурье вида

$$(u, v, w)(\rho, \theta) = \frac{1}{2}(u, v, w)_0(\rho) + \sum_{p=1}^{\infty} [(u, v, w)_{cp}(\rho) \cos p\theta + (u, v, w)_{sp}(\rho) \sin p\theta] \quad (2.1)$$

где функции $(u, v, w)_{cp}(\rho)$ и $(u, v, w)_{sp}(\rho)$ – коэффициенты при косинусах (символ c) и синусах (символ s) зависят от номера гармоники p . Исходная система уравнений в частных произведениях при этом сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого (четвертого и четвертого) порядка для одной группы компонент, например, при косинусах

$$\begin{aligned} B_{11}^{(2)}\{u_{cp}\} + \lambda_{12}^s E_{12}^{(1)}\{v_{sp}\} &= f_{1cp}(\rho)\rho^2 \\ \lambda_{21}^c E_{21}^{(1)}\{u_{cp}\} + B_{22}^{(2)}\{v_{sp}\} &= f_{2sp}(\rho)\rho^2 \\ B_{33}^{(4)}\{w_{cp}\} &= f_{zcp}(\rho)\rho^4 \end{aligned} \quad (2.2)$$

и аналогичная для другой (при синусах), отличающаяся только знаками коэффициентов $\lambda_{12}^s = -\lambda_{12}^c$ и $\lambda_{21}^s = -\lambda_{21}^c$.

Здесь использованы следующие обозначения дифференциальных операторов порядка L_{ij} эйлера и бесселева типов:

$$E_{ij}^{(L_{ij})}\{y\} = \prod_{l=1}^{L_{ij}} (D - v_{ijl})\{y\}, \quad B_{ij}^{(L_{ij})}\{y\} = E_{ij}^{(L_{ij})}\{y\} + k_y^{L_{ij}} \rho^{Z_{ij}} y$$

представимых в полиномиальном виде коммутативным произведением элементарных биномиальных эйлеровых операторов $E_{ij}^{(1)}\{y\} = (D - v_{ij})\{y\}$, где

$$D\{y\} = \rho \frac{dy}{d\rho}, \quad D^{(n)}\{y\} \equiv \underbrace{\rho \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\dots \left(\rho \frac{dy}{d\rho} \right) \right] \right\}}_{n \text{ раз}}$$

– дифференциальный оператор в полярной системе координат;

$$v_{11(1,2)} = \pm(c + dp^2)^{1/2}, \quad v_{121} = -v_{211} = \frac{c + d}{\omega_{21} + d}$$

$$v_{22(1,2)} = \pm \left(\frac{d + cp^2}{d} \right)^{1/2}, \quad v_{33(1,2)} = 1 \pm \lambda_{331}, \quad v_{33(3,4)} = 1 \pm \lambda_{332}$$

$$\lambda_{33(1,2)} = \left[\frac{1 + A_3}{2} \pm \left[\left(\frac{1 - A_3}{2} \right)^2 - B_3^* \right]^{1/2} \right]^{1/2}$$

– характеристические параметры v_{ijl} биномиальных операторов;

$$A_3 = c + 2ep^2, \quad B_3^* = [cp^2 - 2(c + e)]p^2, \quad \lambda_{12}^{s,c} = \pm p(\omega_{21} + d), \quad \lambda_{21}^{c,s} = \mp p \frac{\omega_{21} + d}{d}$$

– коэффициенты системы; Z_{ij} – показатель степени бесселева добавка.

3. Решение системы. Решение системы (2.2), состоящее из общего решения $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ однородной системы, выраженного через фундаментальные $\{\bar{u}_l(\rho), \bar{v}_l(\rho), \bar{w}_l(\rho)\}$ решения и произвольные постоянные A_l , и частного решения $U(\rho), V(\rho), W(\rho)$ неоднородной системы

$$u_{cp}(\rho) = \sum_{l=1}^4 A_{cpl} \bar{u}_{cpl}(\rho) + U_{cp}(\rho), \quad v_{sp}(\rho) = \sum_{l=1}^4 A_{spl} \bar{v}_{spl}(\rho) + V_{sp}(\rho) \quad (3.1)$$

$$w_{cp}(\rho) = \sum_{l=1}^4 B_{cpl} \bar{w}_{cpl}(\rho) + W_{cp}(\rho),$$

как системы бесселева типа, представим в виде обобщенных степенных рядов [9]

$$y_l(\rho) = \rho^{\nu_l} \left(C_{yl}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{yl}^{(m)} \rho^m \right), \quad y_l(\rho) = \{(u, v, w)_{cpl}(\rho), (u, v, w)_{spl}(\rho)\} \quad (3.2)$$

Характеристические показатели ν_l определяются из соответствующих характеристических уравнений.

Система фундаментальных решений двух связанных уравнений второго порядка и одного несвязного уравнения четвертого порядка бесселева типа в соответствии с формой (3.2) содержит числа ν_l , являющиеся корнями характеристических (вековых) уравнений.

Для дифференциального уравнения четвертого порядка (2.2), представляющего собой сумму эйлера оператора $E_{33}^{(4)}\{w\}$ четвертого порядка и бесселева добавка $k_w^4 \rho^4 w$, вековое уравнение определяется характеристическими параметрами эйлера оператора, и в данном случае имеем биквадратное уравнение

$$P_3^{(4)}(\nu) = (\nu - 1)^4 - (1 + A_3)(\nu - 1)^2 + (A_3 + B_3^*) = 0, \quad (3.3)$$

корни которого ν_n совпадают с показателями ν_{33l} ($l = 1, 2, 3, 4$).

Нумерацию корней или параметров ν_{33l} примем такой, чтобы при $c \geq 1$ их значения с возрастанием номера располагались в убывающем порядке. Отметим, что при $p = 1$ и произвольном c (когда $\lambda_{331} = 1 + (c + 2e)^{1/2}$ и $\lambda_{332} = 0$) два корня $\nu_{332} = \nu_{333} = 1$ совпадают, а при $p = 0$ и $c = 1$ (когда $\lambda_{331} = \lambda_{332} = 1$) совпадают две пары корней: $\nu_{331} = \nu_{332} = 2$ и $\nu_{333} = \nu_{334} = 0$. Первому случаю соответствует изгиб по первой гармонике, а второму – осесимметричные формы изгиба изотропной круговой пластины.

Характеристическое уравнение для системы (2.2) двух дифференциальных уравнений бесселева типа получаем из определителя соответствующей системы эйлера типа (когда в левой части оставлены только полные эйлеровы операторы) заменой $D \Rightarrow \nu$. Имеем

$$P_4^{(4)}(\nu) = \det \begin{vmatrix} P_{11}^{(2)}(\nu) & \lambda_{12}^s P_{12}^{(1)}(\nu) \\ \lambda_{21}^c P_{21}^{(1)}(\nu) & P_{22}^{(2)}(\nu) \end{vmatrix} = 0$$

$$E_{ij}^{(L_{ij})}\{y\} = \prod_{l=1}^{L_{ij}} (D - \nu_{ijl})\{y\} \Rightarrow P_{ij}^{(L_{ij})}(\nu) = \prod_{l=1}^{L_{ij}} (\nu - \nu_{ijl})$$

В результате имеем также биквадратное характеристическое уравнение

$$P_4^{(4)}(\nu) = \nu^4 - A_4 \nu^2 + B_4 = 0 \quad (3.4)$$

где характеристические корни – показатели ν_{44l} таковы:

$$\nu_{44(1,4)} = \pm \lambda_{441}, \quad \nu_{44(2,3)} = \pm \lambda_{442}, \quad \lambda_{44(1,2)} = \{A_4 / 2 \pm [(A_4 / 2)^2 - B_4]^{1/2}\}^{1/2}$$

$$A_4 = (c + dp^2)(1 + 1/d) + p^2(\omega_{21} + d)^2 / d, \quad B_4 = (c + dp^2)^2 / d - p^2(c + d)^2 / d$$

Характеристические корни при $p \geq 2$ простые (некратные и их попарные разности некратны двум). При $p = 1$ и произвольных c (когда $\lambda_{441} = (c + d)(1 + 1/d) + (\omega_{21} + d)^2/d$, $\lambda_{442} = 0$) имеем два одинаковых характеристических числа $\nu_{442} = \nu_{443} = 0$, а при $p = 0$ (когда $\lambda_{441} = \sqrt{c}$ и $\lambda_{442} = \sqrt{c/d}$) система распадается на два несвязных уравнения с независимыми характеристическими числами.

Фундаментальные решения зависят от кратности корней, в частности, некратным корням соответствуют простые решения в виде обобщенных степенных рядов, а кратным – обобщенные степенные ряды со степенями логарифмов, равными показателю кратности корней.

4. Классификация решений. Мультипликаторы характеристических корней. Классифицируем решения уравнений N -го порядка по методике, описанной в работе, цитированной в сноске 1. Введем антисимметричную матрицу мультипликаторов, компоненты которой образованы из попарных разностей характеристических чисел (корней, показателей), расположенных в убывающем порядке и отнесенных к показателю степени Z_{ij} Бесселева добавка. Компоненты мультипликаторов, между которыми справедливы соотношения

$$\mu_{ijkl} = \frac{\nu_{ijk} - \nu_{ijl}}{Z_{ij}}, \quad \mu_{ijkl} = -\mu_{ijmk} + \mu_{ijml}, \quad k, l, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.1)$$

$$\nu_{ijk} \geq \nu_{ijl} \geq \nu_{ijm} \quad \text{при} \quad m \geq k \geq l$$

в строке образуют возрастающую последовательность. Например, для корней первого векового уравнения (когда $Z_{33} = 4$ совпадает с порядком уравнения) и для второго (когда $Z_{44} = 2$ не совпадает с порядком системы) элементы матриц мультипликаторов таковы:

$$\mu_{33kl} = \frac{\nu_{33k} - \nu_{33l}}{4}, \quad \mu_{44kl} = \frac{\nu_{44k} - \nu_{44l}}{2}, \quad k, l = 1, 2, 3, 4$$

Наддиагональные компоненты матрицы $|\mu_{33kl}|$ всегда положительные, диагональные – нулевые, а поддиагональные – отрицательные.

Коэффициенты рядов (3.2) содержат в знаменателе произведения

$$\prod_{k=1}^4 \prod_{\xi=1}^m (\mu_{ijkl} + \xi)$$

состоящие из сумм мультипликаторов μ_{ijkl} и натуральных чисел $\xi = m \in N$, которые обращаются в нуль при целочисленных отрицательных значениях мультипликаторов. Будем различать строки мультипликаторов: простые, содержащие только дробные поддиагональные компоненты, и особые, имеющие целочисленные отрицательные или нулевые поддиагональные. Род (или кратность) строки определим числом ее особых элементов. Две строки – k -я простая и l -я особая называются сопряженными по мультипликатору

$$\mu_{ijkl} = -\mu_{ijkl} = m_{ijkl} = 0, 1, 2, \dots$$

Первая (простая) называется основной производящей, а вторая – сопряженно-производящей. Две строки, первая основная производящая и первая особая первого рода, имеющая только один особый элемент, образуют корневую пару. Через них выражаются все кратные решения второго, третьего родов и т.д. Корневых пар может быть несколько, и для каждой – соответствующее число родов. Простой строке соответствует решение первого рода, а особым – решения второго, третьего родов и т.д. Для рассматриваемых систем имеем чаще всего решения первого и второго и реже третьего родов.

5. Решения первого рода. Используя стандартную процедуру [1–4, 14, 15] определения коэффициентов разложения обобщенного степенного ряда (3.2) для случая простых мультипликаторов, решения первого рода представим так:

для прогиба $\bar{w}_{cpr}^{(1)}$ при $n = 1, 2, 3, 4$

$$\bar{w}_{cpr}^{(1)} = \rho^{v_{33n}} \sum_{33n}^{(4)}(\rho) \quad (5.1)$$

$$\sum_{ijn}^{(L_{ij})}(\rho) = \left\{ Z_{ij} \prod_{k=1, k \neq n}^{L_{ij}} (\mu_{ijkn}) \right\}^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_w \rho}{Z_{ij}} \right)^{L_{ij} m} \left\{ \prod_{k=1}^{L_{ij}} \prod_{\xi=1}^m (\mu_{ijkn} + \xi) \right\}^{-1}$$

для смещений $\bar{u}_{cpr}^{(1)}$ и $\bar{v}_{spr}^{(1)}$ при $n = 1, 2, 3, 4$

$$\bar{u}_{cpr}^{(1)} = \rho^{v_{44n}} \left(C_{u,n}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{u,n}^{(m)} \rho^{2m} \right), \quad \bar{v}_{spr}^{(1)} = \rho^{v_{44n}} \left(C_{v,n}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{v,n}^{(m)} \rho^{2m} \right) \quad (5.2)$$

Коэффициенты $C_{u,n}^{(m)}$ и $C_{v,n}^{(m)}$ при $m \geq 1$ даются рекуррентными соотношениями

$$\|C_{i,n}^{(m)}\| = \|\alpha_{ij,n}^{(m)}\| \|C_{j,n}^{(m-1)}\| = \prod_{k=1}^m \|\alpha_{ij,n}^{(k)}\| \|C_{j,n}^{(0)}\|, \quad i, j = u, v$$

или

$$C_{u,n}^{(m)} = \alpha_{11,n}^{(m)} C_{u,n}^{(m-1)} + \alpha_{12,n}^{(m)} C_{v,n}^{(m-1)}, \quad C_{v,n}^{(m)} = \alpha_{21,n}^{(m)} C_{u,n}^{(m-1)} + \alpha_{22,n}^{(m)} C_{v,n}^{(m-1)}$$

$$C_{u,n}^{(0)} = C_{u,n}^{(0)}, \quad C_{v,n}^{(0)} = \frac{P_{11}^{(2)}(v_{44n})}{\lambda_{12}^s P_{12}^{(1)}(v_{44n})} C_{u,n}^{(0)} \quad (5.3)$$

с матрицей коэффициентов $\|\alpha_{ij,n}^{(m)}\|$, определяемых выражениями

$$\alpha_{11,n}^{(m)} = -k_u^2 \tilde{P}_{11}^{(2)}, \quad \alpha_{12,n}^{(m)} = \lambda_{12}^s k_v^2 \tilde{P}_{12}^{(1)},$$

$$\alpha_{21,n}^{(m)} = \lambda_{21}^s k_u^2 \tilde{P}_{21}^{(1)}, \quad \alpha_{22,n}^{(m)} = -k_v^2 \tilde{P}_{22}^{(1)}$$

$$\tilde{P}_{ij}^{(k)} = \frac{P_{ij}^{(k)}(v_{44n} + 2m)}{P_{44}^{(4)}(v_{44n} + 2m)}, \quad i, j, k = 1, 2$$

Четыре произвольных постоянных интегрирования $A_{cpr} = C_{1,n}^{(0)}$ для продольных смещений и четырех постоянных B_{cpr} для поперечных смещений ($n = 1, 2, 3, 4$) определяем из граничных условий.

Для целочисленных мультипликаторов $\mu_{33nk} = -\mu_{33kn} = m_{33nk}$ решения первого рода $\tilde{w}_{cpr}^{(1)}$ и $\bar{w}_{cpr}^{(1)}$ линейно зависимы.

6. Линейная зависимость сопряженных решений. Используя "нормированную" форму представления решений через Γ -функции

$$\tilde{w}_{cpr}^{(1)}(\rho) = \bar{w}_{cpr}^{(1)}(\rho) \left\{ \prod_{k=1}^4 \Gamma(\mu_{33kn} + 1) \right\}^{-1}$$

а также выражение

$$\Gamma^{(L_{ij})}(\mu_{ijn} + m + 1) = \prod_{k=1}^{L_{ij}} \Gamma(\mu_{ijkn} + m + 1)$$

по "стандартной" процедуре [1–4, 7] приходим к линейной зависимости двух сопряженных решений по параметру для целочисленных мультипликаторов $\mu_{33kn} = -\mu_{33nk} = m_{33kn} \in \mathbb{N}$

$$\tilde{w}_{cpk}^{(1)}(\rho) = (-1)^{m_{33nk}} (k_w / 4)^{4m_{33nk}} \tilde{w}_{cpn}^{(1)}(\rho) \quad (6.1)$$

Решения второго и старших родов определим по обобщенной формуле Неймана – Вебера – Шлефли [1–5, 15], в основе которой лежит свойство непрерывной зависимости решений от параметра [12, 14, 15]

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{cpk}^{(2)}(\rho) &= \pi \lim_{\mu_{33nk} \rightarrow m_{33nk}} \frac{\tilde{w}_{cpn}^{(1)}(\rho) \cos \mu_{33nk} \pi - (k_w / 4)^{-4m_{33nk}} \tilde{w}_{cpk}^{(1)}(\rho)}{\sin \mu_{33nk} \pi} = \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{w}_{cpn}^{(1)}}{\partial \mu_{33nk}} - (-1)^{m_{33nk}} \left(\frac{k_w}{4} \right)^{-4m_{33nk}} \frac{\partial \tilde{w}_{cpk}^{(1)}}{\partial \mu_{33nk}} \right) \Bigg|_{\mu_{33nk} = m_{33nk}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Формулы типа (6.2) определяют решения второго рода для каждой корневой пары. Аналогично представляются решения второго рода для целочисленных мультипликаторов μ_{44nk} второй системы.

7. Решения второго рода. Решения второго рода для рассматриваемой задачи определим по приведенным ранее формулам (см. работу, указанную в сноске 1)².

Для поперечных смещений, когда $p = 1$ и $c \neq 1$, имеем $\nu_{332} = \nu_{333} = 1$ и, значит, $\mu_{3323} = \mu_{3332} = 0$ и пара решений первого рода $\tilde{w}_{cp3}^{(1)}(\rho)$ и $\tilde{w}_{cp2}^{(1)}(\rho)$ линейно зависимы с коэффициентом $(-1)^{m_{3323}} (k_w / 4)^{4m_{3323}}$. Потому решение второго рода имеет вид

$$\tilde{w}_{c13}^{(2)} = \left(\frac{\partial \tilde{w}_{c12}^{(1)}}{\partial \mu_{3323}} - (-1)^{m_{3323}} \left(\frac{k_w}{4} \right)^{-4m_{3323}} \frac{\partial \tilde{w}_{c13}^{(1)}}{\partial \mu_{3332}} \right) \Bigg|_{\mu_{3323} = m_{3332} = 0} \quad (7.1)$$

где решения первого рода даются выражениями

$$\tilde{w}_{c1l}^{(1)} = \rho \sum_{33l}^{(4)}(\rho)$$

Для поперечных смещений, когда $c = 1$ и $p = 0$ (при этом $\lambda_{331} = \lambda_{332} = 1$ и $\nu_{331} = \nu_{332} = 2$, $\nu_{333} = \nu_{334} = 0$), а мультипликаторы $\mu_{3312} = \mu_{3321} = \mu_{3334} = \mu_{3343} = 0$, имеем две пары линейно зависимых решений $\tilde{w}_{c02}^{(1)}$ и $\tilde{w}_{c01}^{(1)}$ с коэффициентом пропорциональности $(-1)^{m_{3312}} (k_w / 4)^{4m_{3312}}$ и пару $\tilde{w}_{c04}^{(1)}$, $\tilde{w}_{c03}^{(1)}$ с коэффициентом $(-1)^{m_{3334}} (k_w / 4)^{4m_{3334}}$, в результате чего получаем решения второго рода

$$\tilde{w}_{c02}^{(2)} = \left(\frac{\partial \tilde{w}_{c01}^{(1)}}{\partial \mu_{3312}} - (-1)^{m_{3312}} \left(\frac{k_w}{4} \right)^{-4m_{3312}} \frac{\partial \tilde{w}_{c02}^{(1)}}{\partial \mu_{3321}} \right) \Bigg|_{\mu_{3312} = m_{3321} = 0} \quad (7.2)$$

$$\tilde{w}_{c04}^{(2)} = \left(\frac{\partial \tilde{w}_{c03}^{(1)}}{\partial \mu_{3334}} - (-1)^{m_{3334}} \left(\frac{k_w}{4} \right)^{-4m_{3334}} \frac{\partial \tilde{w}_{c04}^{(1)}}{\partial \mu_{3343}} \right) \Bigg|_{\mu_{3334} = m_{3343} = 0}$$

где решения первого рода даются выражениями

$$\tilde{w}_{c0l}^{(1)} = \rho^2 \sum_{33l}^{(4)}(\rho), \quad l = 1, 2; \quad \tilde{w}_{c0l}^{(1)} = \sum_{33l}^{(4)}(\rho), \quad l = 3, 4$$

² См. также: Григолюк Э.И., Король Е.З., Измайлова М.Е., Вознесенская М.Е. Изгиб тонких цилиндрически ортотропных круговых пластин на упругом основании. М.: НИИ механики МГУ, 1997. 89 с. – Деп. ВИНТИ 07.10.97, № 2974–В97.

Для продольных смещений, когда $p = 0$ и c – произвольная величина, характеристические параметры $v_{441} = -v_{442} = \sqrt{c}$ и $v_{443} = -v_{444} = \sqrt{c/d}$ зависят только от c , и при целочисленных значениях \sqrt{c} и $\sqrt{c/d}$ имеем две пары линейно зависимых решений первого рода: первую пару $\tilde{u}_{c01}^{(1)}$ и $\tilde{u}_{c02}^{(1)}$ с коэффициентом пропорциональности $(-1)^{m_{4412}} (k_u/4)^{2m_{4412}}$ и вторую пару $\tilde{v}_{s01}^{(1)}$ и $\tilde{v}_{c02}^{(1)}$ с коэффициентом $(-1)^{m_{4434}} (k_v/2)^{2m_{4434}}$. В соответствии с этим решения второго рода имеют вид

$$\tilde{u}_{c02}^{(2)} = \left(\frac{\partial \tilde{u}_{c01}^{(1)}}{\partial \mu_{4412}} - (-1)^{m_{4412}} \left(\frac{k_u}{2} \right)^{-2m_{4412}} \frac{\partial \tilde{u}_{c02}^{(1)}}{\partial \mu_{4421}} \right) \Big|_{\mu_{4412} = m_{4421} = 0} \quad (7.3)$$

$$\tilde{v}_{s02}^{(2)} = \left(\frac{\partial \tilde{v}_{s01}^{(1)}}{\partial \mu_{4434}} - (-1)^{m_{4434}} \left(\frac{k_v}{2} \right)^{-2m_{4434}} \frac{\partial \tilde{v}_{s02}^{(1)}}{\partial \mu_{4443}} \right) \Big|_{\mu_{4434} = m_{4443} = 0}$$

где решения первого рода представляются так:

$$\tilde{u}_{c0l}^{(1)} = \rho^{\pm\sqrt{c}} \sum_{44l}^{(2)}(\rho), \quad \tilde{v}_{s0l}^{(1)} = \rho^{\pm\sqrt{c/d}} \sum_{44l}^{(2)}(\rho); \quad l = 1, 2$$

(здесь использованы приведенные в (5.1) обозначения). В частных случаях ($c = 1$), а также при $p = 0, 1$ и $c \neq 1$ эти решения совпадают с известными [5–7, 9] и выражаются цилиндрическими функциями Бесселя.

При $k_u = k_v = k_w = 0$, когда нет сопротивления среды, в структуре решений исчезают ряды и решения переходят в известные [9, 10, 13] для продольно-поперечного изгиба ортотропных круговых пластин, а когда $p = 0$ – для осесимметричного нагружения и при $c = 1$ – для изотропного материала.

8. Частные решения неоднородного уравнения изгиба. Частные решения неоднородного уравнения изгиба определим по методу Лагранжа в форме

$$U_{cp}(\rho) = \sum_{l=1}^4 A_{cpl}(\rho) \tilde{u}_{cpl}(\rho), \quad V_{sp}(\rho) = \sum_{l=1}^4 A_{spl}(\rho) \tilde{v}_{spl}(\rho) \quad (8.1)$$

$$W_{cp}(\rho) = \sum_{l=1}^4 B_{cpl}(\rho) \tilde{w}_{cpl}(\rho),$$

что приводит к отысканию функций $A_{cpl}(\rho)$ и $B_{cpl}(\rho)$.

Для неоднородных уравнений N -го порядка с переменными коэффициентами по известной системе фундаментальных решений $\tilde{w}_n(\rho)$ частное решение представляется в виде [15, 16]

$$W(\rho) = \sum_{n=1}^N \tilde{w}_n(\rho) \int \frac{V_{Nn}(\rho)}{V_N(\rho)} f(\rho) d(\rho) \quad (8.2)$$

Здесь

$$V_N(\rho) = V_N\{\tilde{w}_n\} = \det \left\| \frac{d^k \tilde{w}_l(\rho)}{d\rho^k} \right\|, \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, 3, 4$$

$V_N(\rho)$ – определитель Вронского, $V_{Nn(\rho)}$ – алгебраическое дополнение определителя на пересечении четвертой строки и n -го столбца, полученный заменой этого столбца столбцом свободных членов $\{0, 0, 0, \rho^4 f(\rho)\}$. По формуле Лиувилля – Остроградского для рассматриваемых уравнений продольно-поперечного изгиба определитель Вронского равен $V_4(\rho) = \rho^{-2}$.

Для компонент смещения, например, при осесимметричном нагружении $U_c(\rho)$, $V_s(\rho)$ в форме (8.2) $V_2(\rho)$ – определитель матриц $\|\bar{u}_{0n}\|$ или $\|\bar{v}_{0n}\|$, $n = 1, 2$, а $V_{2n}(\rho)$ – алгебраические дополнения соответствующих определителей на пересечении второй строки и n -го столбца, полученные заменой n -го столбца столбцом свободных членов $(0, f_1(\rho))$ или $(0, f_2(\rho))$. Определитель Вронского в этом случае равен $V_2(\rho) = \rho^{-1}$, и решение имеет вид

$$U_0(\rho) = \frac{\bar{u}_{01}^{(1)}(\rho)}{V_{111} - V_{112}} \int \bar{u}_{02}^{(1)}(\rho) \rho f_{10}(\rho) d\rho + \frac{\bar{u}_{02}^{(1)}(\rho)}{V_{112} - V_{111}} \int \bar{u}_{01}^{(1)}(\rho) \rho f_{10}(\rho) d\rho \quad (8.3)$$

$$V_0(\rho) = \frac{\bar{v}_{01}^{(1)}(\rho)}{V_{221} - V_{222}} \int \bar{v}_{02}^{(1)}(\rho) \rho f_{20}(\rho) d\rho + \frac{\bar{v}_{02}^{(1)}(\rho)}{V_{222} - V_{221}} \int \bar{v}_{01}^{(1)}(\rho) \rho f_{20}(\rho) d\rho.$$

При отсутствии реакции основания $k_u = k_v = k_w = 0$ представленные решения совпадают с известными [5–7, 9, 13].

9. Постоянные интегрирования A_{cpl} , B_{cpl} . Пакет вычислительных программ и результаты расчетов. Значения коэффициентов A_{cpl} , B_{cpl} определяются из граничных условий различного (кинематического и силового) типов, представленных компонентами разложения Фурье:

смещений и прогиба на внешнем ($\rho = 1$) или на внутреннем ($\rho = \beta$) контурах

$$(u, w)_{cp}(\rho = 1, \beta) = (u, w)_{cpl, \beta}, \quad v_{sp}(\rho = 1, \beta) = v_{sp1, \beta} \quad (9.1)$$

угла поворота нормали $\vartheta = \partial w(\rho, \theta) / \partial \rho = w'_\rho(\rho, \theta)$

$$\vartheta_{1cp}(\rho = 1, \beta) = w'_{cp}(\rho = 1, \beta) = w'_{cpl, \beta} \quad (9.2)$$

усилий и моментов

$$(n, m, r)_{1cp}(\rho = 1, \beta) = (n, m, r)_{1cpl}, \quad (s, h)_{1sp}(\rho = 1, \beta) = (s, h)_{1sp1, \beta} \quad (9.3)$$

упругой заделки на внешнем ($\rho = 1$) или внутреннем ($\rho = \beta$) контуре

$$(n, m, r)_{1cp}(\rho) = \Lambda_{(n, m, r)}(u, \vartheta, w)_{cp}(\rho), \quad (s, h)_{1sp}(\rho) = \Lambda_{(s, h)}(v, \vartheta)_{sp}(\rho) \quad (9.4)$$

$$\Lambda_{(n, s, m, r, h)} = \begin{cases} \Lambda_{1(n, s, m, r, h)} & \text{при } \rho = 1 \\ \Lambda_{\beta(n, s, m, r, h)} & \text{при } \rho = \beta \end{cases}$$

для сплошной пластины ($\beta = 0$) в центре ($\rho = 0$) ставится условие ограниченности радиальных $u(0, \theta)$, кольцевых $v(0, \theta)$ и поперечных $w(0, \theta)$ смещений.

Относительно коэффициентов A_{cpl} , B_{cpl} ($l = 1, 2, 3, 4$) имеем системы алгебраических уравнений четвертого порядка вида

$$\|a_{pkl}\| \|A_{cpl}\| = \|b_{pk}\|, \quad \|g_{pkl}\| \|B_{cpl}\| = \|d_{pk}\| \quad (9.5)$$

где a_{pkl} , g_{pkl} – значения выражений (9.1)–(9.4), а b_{pk} , d_{pk} – граничные значения функций $(u, v, w, n_1, s_1, r_1)_\rho$. При формулировке граничных условий и вычислении характеристик напряженного состояния нормированные величины

$$n_{(1,2)}(\rho, \theta) = \frac{N_{(1,2)}(\rho, \theta)}{B_1}, \quad m_{(1,2)}(\rho, \theta) = \frac{M_{(1,2)}(\rho, \theta)a^2}{D_1 h}$$

$$r_{(1,2)}(\rho, \theta) = \frac{R_{(1,2)}(\rho, \theta)a^3}{D_1 h}, \quad h_1(\rho, \theta) = \frac{H(\rho, \theta)a^3}{D_3 h}, \quad s_1(\rho, \theta) = \frac{S(\rho, \theta)}{B_3}$$

определялись по соотношениям термоупругости

$$n_1(\rho, \theta) = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \omega_{21} \left(\frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - (\alpha_1 + \omega_{21} \alpha_2) n_T(\rho, \theta)$$

$$s_1(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \quad h_1(\rho, \theta) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$m_1(\rho, \theta) = -\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} - \omega_{21} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{a^2}{h^2} (\alpha_1 + \omega_{21} \alpha_2) m_T(\rho, \theta)$$

$$r_1(\rho, \theta) = -\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{c}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\omega_{21} + c}{\rho^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\omega_{21}}{\rho^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \theta^2}$$

$$-\frac{a^3}{h^3} \left((\alpha_1 + \omega_{21} \alpha_2) \frac{\partial m_T(\rho, \theta)}{\partial \rho} + [(\alpha_1 + \omega_{21} \alpha_2) - c(\omega_{12} \alpha_1 + \alpha_2)] \frac{m_T(\rho, \theta)}{\rho} \right)$$

$$n_2(\rho, \theta) = c \left[\omega_{12} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - (\omega_{12} \alpha_1 + \alpha_2) n_T(\rho, \theta)$$

$$m_2(\rho, \theta) = -c \left[\omega_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] - \frac{a^2}{h^2} (\omega_{12} \alpha_1 + \alpha_2) m_T(\rho, \theta)$$

$$r_2(\rho, \theta) = -\frac{\omega_{21}}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^2 \partial \theta} - \frac{c + 4d}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{4d}{\rho^3} \frac{dw}{d\theta} - \frac{c}{\rho^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{a^3}{h^3} c (\omega_{12} \alpha_1 + \alpha_2) \frac{1}{\rho} \frac{\partial m_T(\rho, \theta)}{\partial \theta}$$

При анализе зависимости напряженно-деформированного состояния пластин от термомеханических и геометрических параметров использованы полученные "автомодельные решения", где число параметров сведено к минимуму. При расчетах принималось:

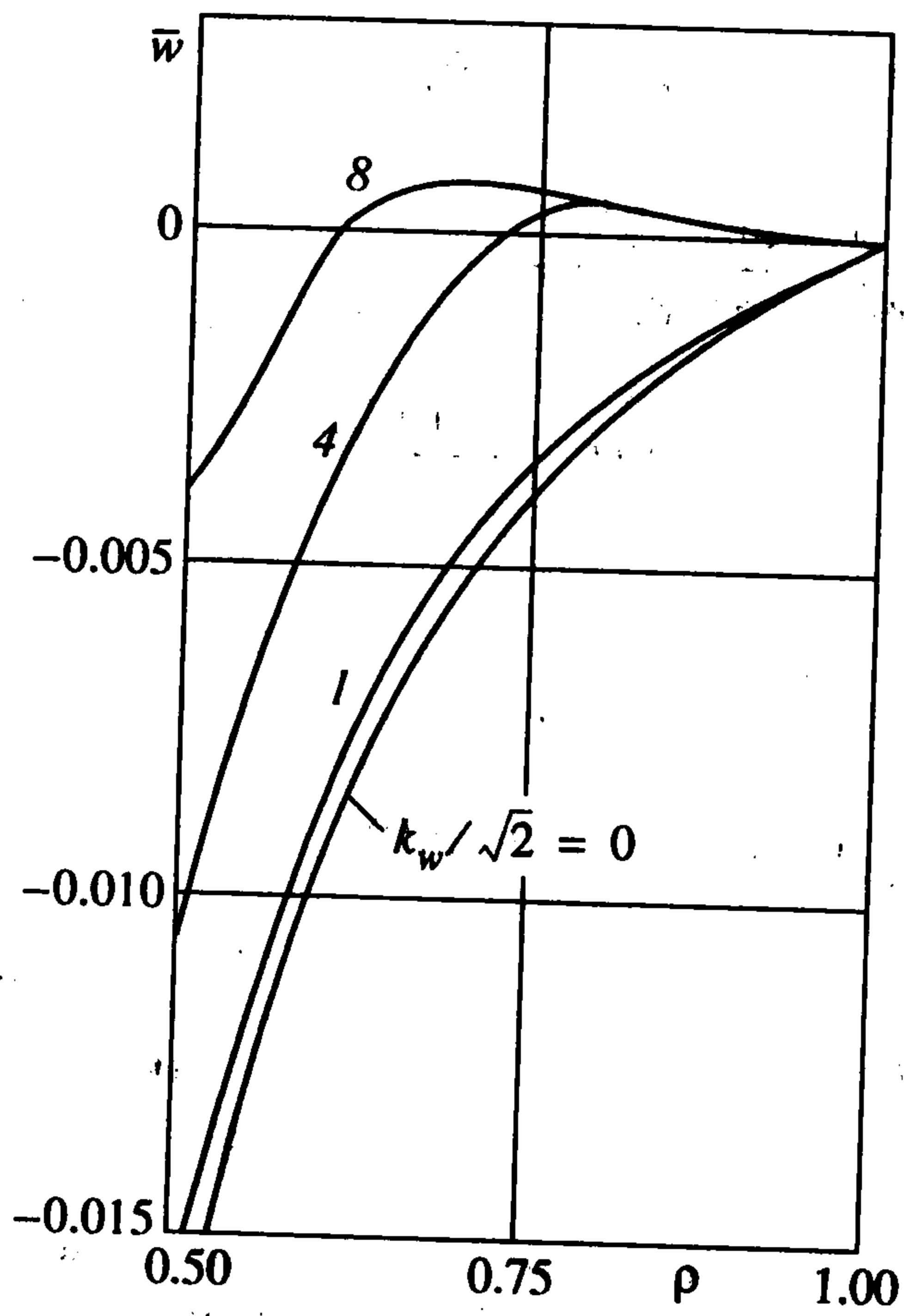
$$\omega_{12} \omega_{21} = \omega_0^2 = 0.0144, \quad \omega_{12} = \frac{\omega_0}{\sqrt{c}}, \quad \omega_{21} = \omega_0 \sqrt{c}$$

$$\frac{2G_{12}}{E_1} = \frac{\sqrt{c}}{1 + \omega_0}, \quad E_2 = cE_1, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \frac{a}{h} = 10$$

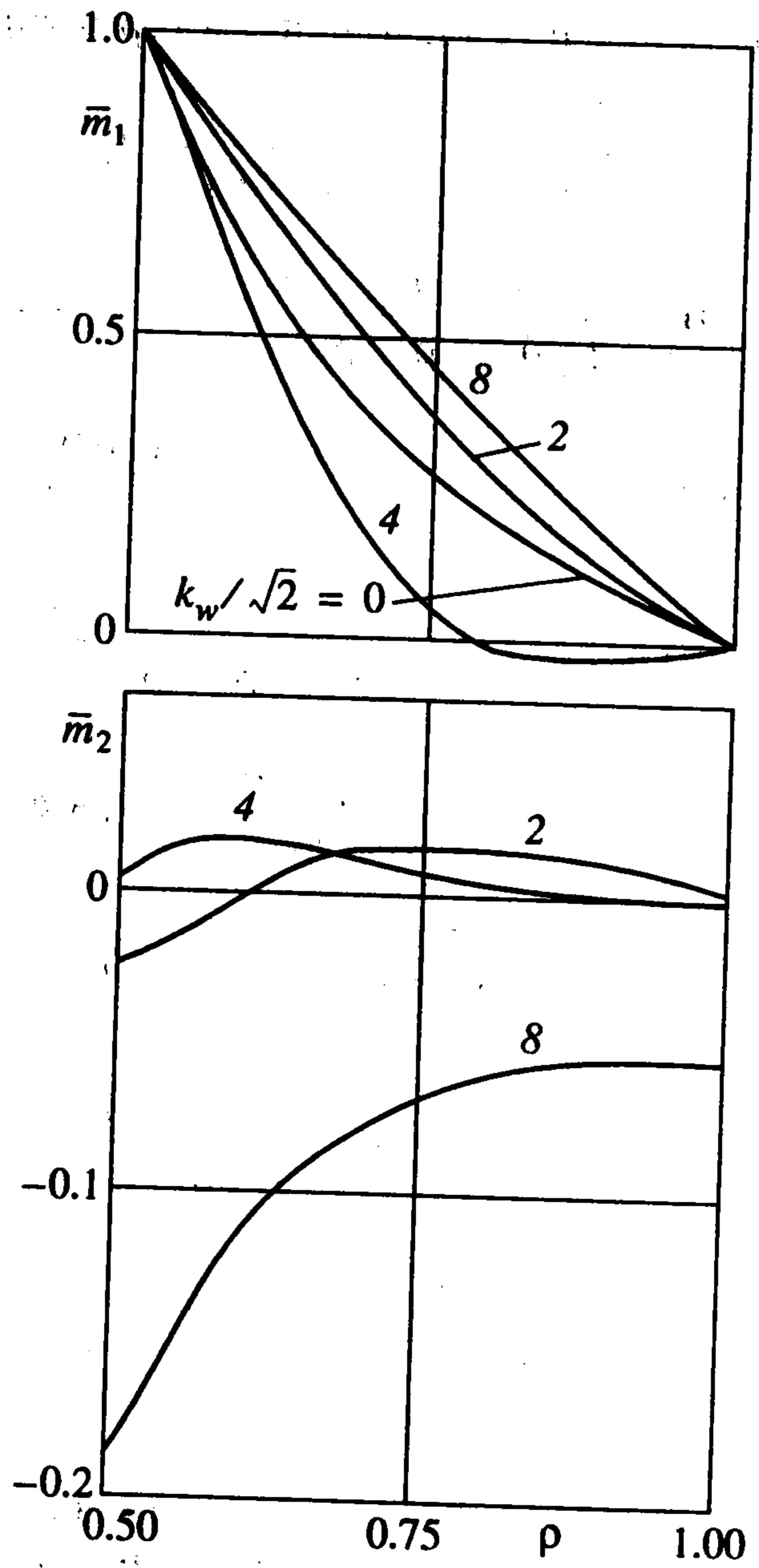
$$\alpha_1^2 + 2\omega_0 \alpha_1 \alpha_2 + c\alpha_2^2 = \text{const}, \quad \alpha_1 = \sqrt{c} \alpha_2$$

$$k_w / \sqrt{2} = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8\}$$

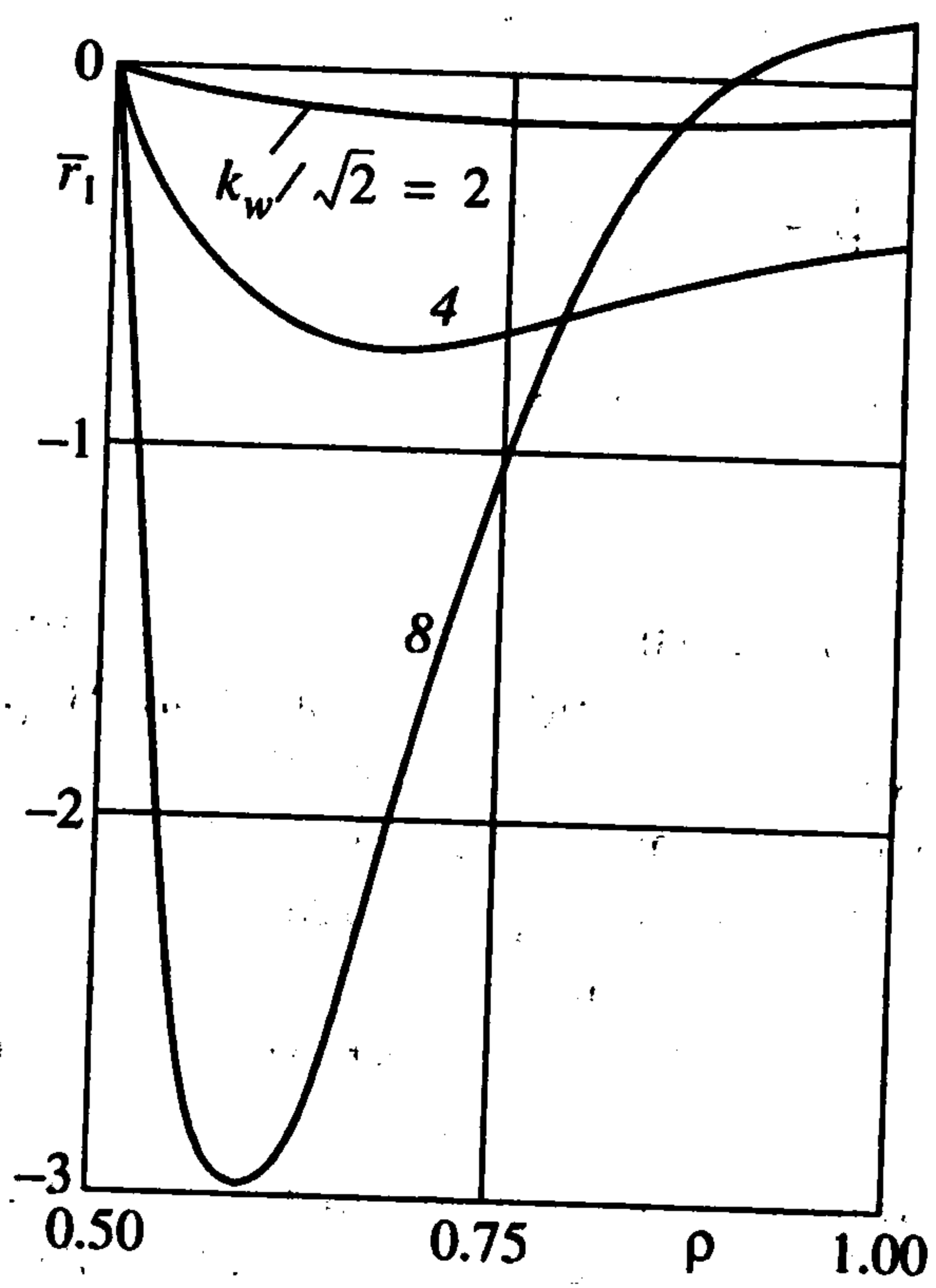
На фиг. 1–3 представлены расчетные характеристики диска, шарнирно опертого по внешнему контуру и нагруженного радиальным равномерно распределенным изгибающим моментом по внутреннему контуру. Расчеты показали, что достаточно ограничиться 10–15 слагаемыми в разложениях (3.1), чтобы дальнейшее увеличение числа слагаемых привело к изменению результата, не превышающему сотых долей процентов при вычислении поперечных и продольных усилий и изгибающих момента, т.е. производных искомым функций – компонентов смещений. Как видно из представлений (5.1) и (5.2), при $k_w = k_u = k_v = 0$ (отсутствие сопротивления основания) эти решения совпадают с решениями задачи продольно-поперечного изгиба круговых анизотропных пластин [9, 12] при неосесимметричном нагружении и нагреве. Наличие множителей типа ρ^{v_1-k} ($k = 1, 2, 3$) указывает на особенность зависимости усилий



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

и моментов в окрестности $\rho = 0$ от параметра анизотропии c : при $c < 1$ они резко возрастают, а при $c > 1$ – стремятся к нулю [11, 13]. При $c = 1$ (изотропная пластина на упругом основании) решения (5.1) переходят в известные [5–10], выраженные через цилиндрические функции второго порядка – функции Бесселя. Анализ графиков (фиг. 1–3) при постоянном коэффициенте анизотропии ($c = 16.8$) показывает на существенную зависимость, прежде всего, профиля изгибаемой пластины (прогиба $\bar{w} = w/h$) от коэффициента упругости k_w основания (фиг. 1): с увеличением сопротивления основания действие нагрузки (в данном случае радиального изгибающего момента) локализуется; изменяются эпюры распределения приведенного радиального $\bar{m}_1 = M_1 / M_0$ и приведенного кольцевого $\bar{m}_2 = M_2 / M_0$ изгибающих моментов (фиг. 2), отнесенных к действующему на внутреннем контуре моменту M_0 , и приведенного поперечного усилия $\bar{r}_1 = R_1 a / M_0$ (фиг. 3), отнесенного к величине M_0/a .

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927. = Уиттекер Э.Г., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
2. Weber H. Über eine Darstellung willkürlicher Funktionen durch Bessel'schen Funktionen // Math. Ann. 1873. Bd. 6. S. 146–161.
3. Schläfli L. Sull'uso delle linee lungo le quali il valore assoluto di una funzione e costante // Ann. Math. 1873–1875. V. 6. R. 1–20.
4. Neumann K. Theorie der Bessel'schen Funktionen. Leipzig.: Teubner, 1867. 72 p.
5. Lommel E.L. Integration der Gleichung $\left(x^{m+1/2} \frac{\delta^{2m+1} y}{\delta x^{2m+1}} \pm y = 0 \right)$ durch Bessel'sche Funktionen // Math. Ann. 1870. Bd. 2. S. 624–635.
6. Динник А.Н. Избранные труды. Т. 2. Приложения функций Бесселя к задачам теории упругости. Киев.: Изд-во АН УССР, 1955. 223 с.
7. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.
8. Григолюк Э.И., Магеррамова Л.А. Устойчивость круговых однородных и неоднородных пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 111–138.
9. Григолюк Э.И. Прочность, колебания, устойчивость круговых пластин. Ч. 1. М.: НИИ механики МГУ, 1997. 134 с.
10. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Пластины и диски, балки-стенки. Киев: Госстройиздат, 1959. 1049 с.
11. Король Е.З. Краевые задачи изгиба цилиндрически ортотропных круговых пластин на упругом неоднородном основании, // Тез. докл. 4-й Междунар. конф. по механике неоднородных структур. Тернополь, 1995. С. 165–166.
12. Король Е.З. К расчету ортотропных круговых пластин при продольно-поперечном изгибе // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2000. № 2. С. 62–70.
13. Король Е.З. К феноменологии термомеханики обратимых процессов анизотропных деформируемых сред // Юбилейный междунар. симпоз. "Актуальные проблемы механики сплошных сыпучих сред". Тез. докл. М.: МАИ, 1997. С. 105.
14. Coddington E.A., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations N.Y.: McvGraw-Hill, 1955. = Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
15. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков.: Гос. науч.-техн. изд-во, 1939. 719 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.2000