УДК 539.3

© 2001 г. И.Ю. Цвелодуб

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассматривается плоская конечная вязкоупругая область с физически нелинейным включением произвольной формы. Решается задача об отыскании таких действующих на внешней границе области нагрузок, которые обеспечивали бы во включении заданное однородное напряженно-деформированное состояние. Рассмотрены примеры, в частности, об оптимальном деформировании и разрушении включения, находящегося в условиях ползучести.

Ранее [1] была рассмотрена плоская конечная упругая область с физически нелинейным включением (ФНВ) произвольной формы, в котором необходимо было создать требуемое однородное напряженно-деформированное состояние (НДС) путем подбора соответствующих внешних усилий. В данной работе эта задача обобщается на случай линейной вязкоупругой области с ФНВ. Отдельно рассматривается включение, разупрочняющееся при ползучести, и исследуются связанные с ним обратные задачи о выборе внешних воздействий, приводящих к оптимальным (в указанном ниже смысле) путям деформирования включения и его разрушения вследствие ползучести.

1. НДС вязкоупругой области, содержащей ФНВ с заданным НДС. Рассмотрим изотропную конечную вязкоупругую область S плоскости Ox_1x_2 с ФНВ S^*. Внешней и внутренней границами области S являются простые замкнутые контуры L и L^* (т.е. L^* отделяет S от S^*).

Обобщая соотношения закона Гука для плоской задачи [1] на случай линейной вязкоупругости путем замены упругих постоянных на соответствующие операторы [2], в области S будем иметь

$$8\tilde{\mu}\varepsilon_{kl} = (\tilde{\varkappa}-1)\sigma_{nn}\delta_{kl} + 4\sigma_{kl}^0, \quad k,l=1,2 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{kl}^0 = \sigma_{kl} - \sigma_{nn}\delta_{kl}/2, \quad \tilde{\mu} = \mu(1+\tilde{K}_1), \quad \tilde{\varkappa} = \varkappa(1+\tilde{K}_2)$$

где μ и $\varkappa$ – упругие постоянные, $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$ – операторы Вольтерры, остальные обозначения – те же, что и ранее [1]; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2. Система координат выбрана так, что точка $(0,0) \in S^*$.

Определяющие уравнения для включения S^* выберем в виде [1]

$$\varepsilon_{kl}^* = \tilde{F}_{kl}(\sigma_{mn}^*), \quad k,l,m,n=1,2 \tag{1.2}$$

где $\tilde{F}_{kl}$ – нелинейные операторы достаточно общего вида.

Сформулируем обратную задачу, обобщающую рассмотренную ранее [1]: необходимо подобрать на границе L такие нагрузки, которые вызывали бы в ФНВ S^* требуемое однородное НДС, характеризуемое напряжениями $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$ и деформациями $\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl}^*(t)$ $(k,l=1,2)$, связанными соотношениями (1.2). В начальный момент времени $t = 0$ вся область $S^* \cup S$ находилась в естественном недеформированном состоянии. На границе L^* поля нагрузок p_k и перемещений u_k ($k = 1, 2$) непрерывны. Задача рассматривается в геометрически линейной постановке.

Поскольку σ_{kl}^* и ε_{kl}^* не зависят от координат x_1 и x_2, то рассуждения, аналогичные проведенным ранее [1], для функции напряжений $U^* = U^*(z, \bar{z}, t)$ и комплексного перемещения $w^* = u_1^* + iu_2^*$ (в предположении о том, что $w^*(0, 0, t) = 0$) во включении S^* дают

$$
\begin{gathered}
2U^* = Az\bar{z} + Bz^2/2 + \bar{B}\bar{z}^2/2 \\
2A(t) = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*, \quad 2B(t) = \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^*
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

$$
\begin{gathered}
2w^* = Cz + D\bar{z} \\
C(t) = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon^*, \quad D(t) = \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon_{12}^*
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

(ε^* – величина "вращения" в области S^*).

Обозначим через $z = \omega(\zeta)$ ($\zeta = \rho e^{i\theta}$) функцию, конформно отображающую бесконечную область, расположенную вне L^*, на внешность единичной окружности γ^* комплексной плоскости ζ. Тогда в силу непрерывности нагрузок и перемещений на границе L^* из (1.3) и (1.4) по аналогии с изложенной ранее процедурой [1] путем замены в соответствии с принципом Вольтерры [2] упругих постоянных μ и $\varkappa$ вязкоупругими операторами $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\varkappa}$ вида (1.1) для функций $\varphi(\zeta, t)$ и $\psi(\zeta, t)$, определяющих НДС в области S, будем иметь при $|\zeta| = 1$

$$
\begin{gathered}
\overline{\varphi(\sigma, t)} + \overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma, t)/\omega'(\sigma) + \psi(\sigma, t) = A(t)\overline{\omega(\sigma)} + B(t)\omega(\sigma) \\
\tilde{\varkappa}\overline{\varphi(\sigma, t)} - \overline{\omega(\sigma, t)}\varphi'(\sigma, t)/\omega'(\sigma) - \psi(\sigma, t) = \tilde{\mu}[\overline{C(t)}\ \overline{\omega(\sigma)} + \overline{D(t)}\omega(\sigma)]
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

на γ^*; $\sigma = e^{i\theta}$.

Из соотношений (1.5) вытекает граничное условие для функции $\varphi(\zeta, t)$, из которого для этой функции получим интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$
(\tilde{\varkappa} + 1)\varphi(\zeta, t) = [A(t) + \tilde{\mu}C(t)]\omega(\zeta) + [\overline{B(t)} + \tilde{\mu}D(t)]\overline{\omega}(\zeta^{-1}), \quad |\zeta| > 1 \tag{1.6}
$$

Если функция $\varphi(\zeta, t)$ найдена, то для $\psi(\zeta, t)$ вследствие первого граничного условия (1.5) будем иметь [1]

$$
\psi(\zeta, t) = -\overline{\varphi}(\zeta^{-1}, t) - \overline{\omega}(\zeta^{-1})\varphi'(\zeta, t)/\omega'(\zeta) + A(t)\overline{\omega}(\zeta^{-1}) + B(t)\omega(\zeta), \quad |\zeta| > 1 \tag{1.7}
$$

Функции $\varphi(\zeta, t)$ и $\psi(\zeta, t)$ определяют НДС в области S и искомые нагрузки на ее внешней границе L. Это решение имеет смысл, если контур γ плоскости ζ, соответствующий контуру L, целиком лежит в кольце $1 < |\zeta| < R$, в котором функции φ и ψ голоморфны [1].

Заметим, что для эллиптического ФНВ решение для НДС в области S может быть продолжено за границу L, включая бесконечно удаленную точку. При этом связи напряжений σ_{kl}^∞ и вращения ε^∞ на бесконечности с аналогичными величинами в области S^* будут иметь вид [1]

$$
\begin{gathered}
(\tilde{\varkappa} + 1)(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)/4 + 2i\tilde{\mu}\varepsilon^\infty = A + m_0\bar{B} + \tilde{\mu}(C + m_0 D) \\
(\tilde{\varkappa} + 1)(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty)/2 = -m_0 A - m_0^2\bar{B} + \tilde{\varkappa}(B + m_0 A) - \\
- \tilde{\mu}(\bar{D} + 2m_0 \operatorname{Re} C + m_0^2 D); \quad m_0 = (a - b)/(a + b)
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

где a и b – полуоси эллипса.

2. О единственности решения задачи. Как следует из соотношений (1.6) и (1.7) и аналогичных результатов для случая упругой среды S [1], вопрос о существовании решения рассмотренной выше задачи сводится к разрешимости интегрального уравнения (1.6) относительно функции $\varphi(\zeta, t)$ (при условии, что упомянутый контур γ целиком лежит в кольце $1 < |\zeta| < R$, в котором правая часть уравнения (1.6) – голоморфная функция). Считаем, что эти известные условия разрешимости [3] выполнены.

Это, например, имеет место, если ядро оператора $\tilde{K}_2$ из (1.1) ограничено, а правая часть равенства (1.6) при любом $|\zeta| > 1$ – суммируемая функция t или, если обе эти функции суммируемы с квадратом. К последнему случаю относятся и операторы со слабой особенностью, например с ядрами Абеля [2, 3] с показателем λ в знаменателе, удовлетворяющим неравенствам $0 < \lambda < 1/2$. Можно указать также достаточные условия однозначной разрешимости в соответствующих классах функций и при $1/2 \leqslant \lambda < 1$: были приведены ограничения [3], при которых операторы типа потенциала (в частности, и операторы Абеля) будут вполне непрерывными при $\lambda \in [0, 1)$.

По найденным из соотношений (1.6) и (1.7) функциям $\varphi(\zeta, t)$ и $\psi(\zeta, t)$ будут однозначно определяться и искомые нагрузки на внешней границе L области S [1]. Покажем теперь, что этим нагрузкам будет соответствовать (при некоторых ограничениях на связи (1.1) и (1.2), аналогичных указанным ранее [1]) единственное НДС в области $S^* \cup S$, которое и было получено выше, т.е. ФНВ будет находиться в однородном НДС. Для этого соотношениям (1.1) придадим более компактный вид, выразив $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(t)$ через $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(t)$:

$$\varepsilon_{kl}(t) = a_{klmn}\sigma_{mn}(t) + \varepsilon^{v}_{kl}(t)$$

$$\varepsilon^{v}_{kl}(t) = \int_0^t b_{klmn}(t-\tau)\sigma_{mn}(\tau)d\tau, \quad k, l = 1, 2 \tag{2.1}$$

где a_{klmn} и b_{klmn} – обладающие известными свойствами симметрии компоненты упругих податливостей и ядра ползучести.

Как и ранее [1], конкретизируем определяющие уравнения (1.2), считая, что их правые части – сумма упругих и неупругих ε^{*N}_{kl} деформаций

$$\varepsilon^*_{kl} = a^*_{klmn}\sigma^*_{mn} + \varepsilon^{*N}_{kl}, \quad k, l = 1, 2 \tag{2.2}$$

Достаточными для единственности решения задачи будут условия устойчивости для неупругих деформаций среды S и включения S^* [1]

$$I_1 \geqslant 0, \quad I_2 \geqslant 0; \quad I_1(t) \equiv \int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}^{v}_{kl}\Delta\sigma_{kl}dt, \quad I_2(t) \equiv \int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}^{*N}_{kl}\Delta\sigma^*_{kl}dt \tag{2.3}$$

$$\Delta\sigma_{kl}\,|_{t=0} = \Delta\sigma^*_{kl}\,|_{t=0} = 0, \quad k, l = 1, 2$$

где Δ – знак приращения соответствующей величины.

Первое неравенство (2.3) вытекает из условия положительности работы напряжений на деформациях линейной вязкоупругой среды [2]. Отметим, что для его выполнимости достаточно положительной определенности двух квадратичных форм, а именно

$$b_{klmn}(x)\xi_{kl}\xi_{mn} > 0, \quad [c_{klmn}(x)]'\xi_{kl}\xi_{mn} > 0 \quad (\xi_{kl}\xi_{kl} \neq 0) \tag{2.4}$$

при любых ξ_{kl} ($\xi_{kl} = \xi_{lk}$, $k, l = 1, 2$), где c_{klmn} – компоненты тензора, обратного к b_{klmn}; штрих означает дифференцирование по x.

Действительно, при учете условий $\Delta\sigma_{kl}\,|_{t=0}=0$ имеем

$$I_1(t)=\int\limits_0^t I_3(\tau)d\tau$$

где

$$I_3(t)\equiv x_{kl}(t)\int\limits_0^t b_{klmn}(t-\tau)\dot{x}_{mn}(\tau)d\tau=$$

$$=I_4(t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^t [c_{klmn}(t-\tau)]'y_{kl}(t,\tau)y_{mn}(t,\tau)d\tau+\frac{1}{2}c_{klmn}(0)y_{kl}(t,t)y_{mn}(t,t)$$

$$I_4(t)=\int\limits_0^t b_{klmn}(t-\tau)\dot{x}_{mn}(\tau)x_{kl}(\tau)d\tau$$

$$x_{kl}\equiv\Delta\sigma_{kl},\quad y_{kl}(t,\tau)\equiv\int\limits_0^\tau b_{klmn}(t-\xi)\dot{x}_{mn}(\xi)d\xi$$

причем предполагалось, что $c_{klmn}(0)$ существуют.

Отсюда вследствие неравенств (2.4) имеем

$$I_1(t)\geqslant I_5(t)\equiv\int\limits_0^t I_4(\xi)d\xi$$

Меняя порядок интегрирования в I_5 и интегрируя по частям, убеждаемся, что

$$I_5(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t b_{klmn}(t-\tau)x_{kl}(\tau)x_{mn}(\tau)d\tau$$

независимо от того, имеется или нет особенность (слабая) у ядер $b_{klmn}(x)$ при $x=0$.

Таким образом, из неравенств (2.4) следует, что $I_1(t)\geqslant 0$.

Заметим, что условиям (2.4) удовлетворяют известные ядра ползучести вида [2]

$$b_{klmn}(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}\,b^0_{klmn}\quad(\lambda>0)\quad\text{и}\quad b_{klmn}(x)=x^{-\lambda}b^0_{klmn}\quad(0\leqslant\lambda<1)$$

$$b^0_{klmn}=\mathrm{const},\quad b^0_{klmn}\xi_{kl}\xi_{mn}>0\quad\text{при}\quad\xi_{kl}\xi_{lk}\neq 0$$

Второе неравенство (2.3) и вытекающие из него ограничения на определяющие уравнения ФНВ вида (2.2) исследовались ранее [4].

Доказательство единственности аналогично применявшемуся ранее [1]. Предполагая существование двух решений, удовлетворяющих одним и тем же граничным условиям на контуре L (соответствующим найденным в разд. 1 функциям $\varphi(\zeta,t)$ и $\psi(\zeta,t)$), и применяя к разностям (которые обозначаем с помощью символа Δ) напряжений и скоростей деформаций уравнений виртуальных работ, вследствие непрерывности на контуре L^* нагрузок и перемещений будем иметь

$$\int\limits_S\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}\Delta\sigma_{kl}dS+\int\limits_{S^*}\Delta\dot{\varepsilon}^*_{kl}\Delta\sigma^*_{kl}dS=0$$

Подставляя в это равенство соотношения (2.1) и (2.2), интегрируя затем по времени от нуля до текущего момента t и учитывая, что $\Delta\sigma_{kl}\,|_{t=0}=0$ в области S и $\Delta\sigma^*_{kl}\,|_{t=0}=0$ в области S^* в силу единственности решения соответствующей моменту $t=0$ упругой или упругопластической задачи [1], получим

$$\int\limits_S\left(u(t)+\int\limits_0^t\Delta\dot{\varepsilon}^v_{kl}\Delta\sigma_{kl}dt\right)dS+\int\limits_{S^*}\left(v(t)+\int\limits_0^t\Delta\dot{\varepsilon}^{N^*}_{kl}\Delta\sigma^*_{kl}\right)dS=0$$
$$u(t)=\frac{1}{2}a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}(t)\Delta\sigma_{mn}(t),\quad v(t)=\frac{1}{2}a^*_{klmn}\Delta\sigma^*_{kl}(t)\Delta\sigma^*_{mn}(t)\tag{2.5}$$

что ввиду условий (2.3) возможно только при $\Delta\sigma_{kl}(t) = 0$ в области S и $\Delta\sigma^*_{kl}(t) = 0$ в области S^* при любом $t > 0$.

Заметим, что для доказательства единственности второе неравенство (2.3) может быть существенно ослабленно (как, впрочем, и первое, однако оно – следствие физически обоснованного требования положительности работы напряжений на вязкоупругих деформациях, поэтому по-прежнему считаем, что $I_1 \geqslant 0$): достаточно потребовать, чтобы

$$I_2(t) \geqslant -\int_0^t \lambda_0(t)v(t)dt$$

где $\lambda_0(t)$ – некоторая непрерывная положительная функция. Действительно, из соотношения (2.5) при учете первого неравенства (2.3) будем иметь

$$V(t) \leqslant \int_0^t \lambda_0(\tau)V(\tau)d\tau, \quad V(t) \equiv \int_{S^*} v(t)dS$$

откуда вследствие известного неравенства Гронуолла [5] $V(t) = 0$, т.е. $\Delta\sigma^*_{kl}(t) = 0$ в области S^*. Тогда из соотношения (2.5) вытекает, что и $\Delta\sigma_{kl}(t) = 0$ в области S.

3. Об оптимальном деформировании и разрушении ФНВ в условиях ползучести. Рассмотрим случай, когда неупругими деформациями включения являются деформации ползучести ε^{*c}_{kl} и определяющие уравнения для S^* имеют вид (2.2) при $\varepsilon^{*N}_{kl} \equiv \varepsilon^{*c}_{kl}$, причем [6]

$$\begin{aligned} &\eta^*_{kl} \equiv \dot{\varepsilon}^{*c}_{kl} = B_1 s^n (1-\Omega)^{-m} \partial s / \partial\sigma^*_{kl}, \quad k, l = 1, 2 \\ &\dot{\Omega} = B_2 s^p (1-\Omega)^{-m} \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $s = s(\sigma^*_{kl})$ – однородная первой степени выпуклая положительная функция, Ω $(0 \leqslant \Omega \leqslant 1)$ – параметр поврежденности (в естественном недеформированном состоянии $\Omega = 0$, а в момент разрушения $\Omega = 1$), B_1, B_2, m, n, p – положительные постоянные.

Зависимости (3.1) можно обратить, выразив σ^*_{kl} и $\dot{\Omega}$ через η^*_{kl} и Ω [6]:

$$\begin{aligned} &\sigma^*_{kl} = s\partial H / \partial\eta^*_{kl}, \quad k, l = 1, 2; \quad \dot{\Omega} = B_0 H^\alpha (1-\Omega)^\beta \\ &s = [B_1^{-1} H (1-\Omega)^m]^{1/n}, \quad B_0 = B_2 B_1^{-\alpha}, \quad \alpha = p/n, \quad \beta = m(\alpha - 1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $H = H(\eta^*_{kl})$ – однородная первой степени выпуклая положительная функция, такая, что $Hs = \eta^*_{kl}\sigma^*_{kl}$.

Соотношения (3.1) (или (3.2)) описывают процессы изотермического деформирования в условиях ползучести и разрушения хрупких и вязких разупрочняющихся материалов.

Сформулируем некоторые обратные задачи для вязкоупругой среды S с включением S^*, определяющие уравнения для которых имеют вид (1.1), (2.2) и (3.1).

Задача 1 (*об оптимальном деформировании включения*). Необходимо подобрать на внешней границе L области S такие нагрузки p_k, действующие в интервале времени $[0, t_0]$, при которых деформации ползучести ε^{*c}_{kl} в области S^* в момент $t = t_0$ будут иметь требуемые значения ε^{*c}_{kl**}, не зависящие от координат точек области S^*, при наименьшей величине наибольшей в S^* поврежденности $\Omega_{\max} = \max_{S^*} \Omega$. При этом продолжительность t_0 внешнего воздействия и допустимые напряжения ограничены: $0 < t_0 \leqslant t_{**}$ и $\max_{S^*} s \leqslant s_{**}$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (t_{**} и s_{**} – заданные величины).

Задача 2 (*об оптимальном разрушении включения*). При тех же ограничениях на t_0 и s подобрать такие нагрузки p_k на границе L, чтобы вся область S^* разрушилась за время $t_0 \leqslant t_{**}$ (т.е. чтобы $\Omega(x_1, x_2, t_0) = 1$ для всех точек $(x, x_2) \in S^*$) при минимальном уровне рассеянной при ползучести энергии

$$A^c \equiv \int\limits_{S^*} \int\limits_0^{t_0} \eta^*_{kl} \sigma^*_{kl} dt\, dS$$

В обеих задачах считается, что при $t < 0$ вся область $S \cup S^*$ находилась в недеформированном состоянии, поэтому $\Omega = 0$ и $\varepsilon^{*c}_{kl} = 0$ $(k, l = 1, 2)$ при $t = 0$ всюду в S^*.

Как и прежде [6], предполагается, что указанные ограничения совместны, т.е. соответствующие пути однородного деформирования в условиях ползучести области S^* существуют.

Рассмотрим вкратце каждую из задач отдельно, используя полученные ранее [6] результаты.

Задача 1. В зависимости от величины α из (3.2) следует различать три случая [6].

1°. $\alpha > 1$. Среди всех путей, приводящих к заданным деформациям ε^{*c}_{kl**}, наилучшим (в смысле накопления наименьшей поврежденности) является путь с постоянными скоростями деформаций ползучести во всем возможном интервале времени $[0, t_{**}]$, т.е. при $t_0 = t_{**}$ и $\eta^*_{kl} = \varepsilon^{*c}_{kl**} / t_{**}$. Соответствующие напряжения σ^*_{kl} определяются из первого соотношения (3.2)

$$\sigma^*_{kl} = s\frac{\partial H_{**}}{\partial \varepsilon^{*c}_{kl**}}, \quad H_{**} = H(\varepsilon^{*c}_{kl**})$$

$$s = \left(\frac{1}{B_1}\frac{H_{**}}{t_{**}}\right)^{1/n}\left[1-(1-\beta)B_0\left(\frac{H_{**}}{t_{**}}\right)^{\alpha} t\right]^{m/[n(1-\beta)]} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_{**}) \tag{3.3}$$

Таким образом, в этом случае оптимальным НДС в S^* будет однородное при $0 \leqslant t \leqslant t_{**}$, определяемое формулами (2.3), (3.1)–(3.3).

2°. $\alpha = 1$. Оптимальным является любое простое деформирование (для деформаций ε^{*c}_{kl}), т.е. когда $\varepsilon^{*c}_{kl} = \varepsilon^{*c}_{kl**} f(t)$ $(f(0) = 0,\ \dot f(t) > 0)$ в любом интервале $[0, t_0]$ $(t_0 \leqslant t_{**})$ при условии, что $s_{\max}(t) \leqslant s_{**}$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$. Напряжения σ^*_{kl} легко находятся из первого соотношения (3.2).

3°. $\alpha < 1$. В этом случае $\sigma^*_{kl}(t) = \mathrm{const}$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, причем $s = s_{**}$, т.е. имеет место простое деформирование. Из соотношений (3.1) и (3.2) найдем

$$\sigma^*_{kl} = s_{**}\frac{\partial H_{**}}{\partial \varepsilon^{*c}_{kl**}}, \quad t_0 = \frac{1-(1-B_1^{-1}B_2 s_{**}^{p-n} H_{**})^{m+1}}{B_2(m+1)s_{**}^p}$$

что возможно, если $t_0 \leqslant t_{**}$.

Таким образом, в каждом из трех случаев в области S^* должно быть реализовано соответствующее однородное НДС, задаваемое приведенными выше формулами. Поэтому задача сводится к рассмотренной в разд. 1, т.е. по известным величинам A, B, C и D функции $\varphi(\zeta, t)$ и $\psi(\zeta, t)$, определяющие НДС в S и искомые нагрузки p_k на L, находятся из соотношений (1.6) и (1.7).

Задача 2. Здесь также следует различать три случая, но в зависимости от величины $\gamma_0 \equiv p/(n + 1)$ [6].

1°. $\gamma_0 > 1$. Было показано [6], что оптимальным (в смысле энергетических затрат) для разрушения элемента среды, находящегося в однородном НДС, является такое деформирование, при котором $s(t) = s_{**}$ $(0 < t \leqslant t_0)$, где время t_0 до разрушения определяется из соотношения (3.1): $t_0^{-1} = B_2(m+1)s_{**}^p$.

2°. $\gamma_0 = 1$. В этом случае затраченная на разрушение удельная энергия $A_*^c = B_1 B_2^{-1}$, т.е. не зависит от пути деформирования.

3°. $\gamma_0 < 1$. Оптимальным является деформирование с постоянной удельной мощностью диссипации $W \equiv \eta_{kl}^* \sigma_{kl}^* = W_0$ в течение максимально возможного времени, т.е. в интервале $[0, t_{**}]$. При этом [6]

$$W_0 = B_1 [B_2 (m + 1 - \gamma_0 m) t_{**}]^{-1/\gamma_0}$$

Таким образом, для оптимального разрушения ФНВ в каждом из трех случаев достаточно создать в области S^* соответствующее однородное НДС (неединственное), удовлетворяющее соотношениям (2.2), (3.1), (3.2) и указанным выше равенствам для t_0 и s или W. Искомые функции $\varphi(\zeta, t)$ и $\psi(\zeta, t)$ будут определяться из соотношений (1.6) и (1.7).

Сформулируем еще две задачи об оптимальном разрушении, отличающиеся от предыдущей тем, что в момент разрушения включения задаются деформации ползучести ε_{kl**}^{*c}.

Задачи 3а и 3б. При соответствующем подборе нагрузок p_k на границе L необходимо создать в области S^* такое однородное (зависящее только от времени) НДС, при котором разрушение происходит при заданных деформациях ε_{kl**}^{*c}: а) с наименьшей величиной t_0 продолжительности процесса; б) с наименьшей рассеянной при ползучести энергией A^c.

Начальные условия – те же, что и в задачах 1 и 2.

Очевидно, что проблема сводится к нахождению оптимальных путей деформирования в условиях ползучести для элемента среды (для точки) при заданных деформациях ε_{kl**}^{*c} в момент разрушения с минимальными временными или энергетическими затратами. Заметим, что такие задачи в [6] не изучались.

Прежде чем перейти к ним, сделаем несколько замечаний. Рассмотрим множество таких путей деформирования (или нагружения) элемента среды, которые в момент разрушения приводят к заданным деформациям ε_{kl**}^{*c}. Вместо переменной t будем рассматривать величину Ω $(0 \leqslant \Omega \leqslant 1)$, являющуюся, ввиду соотношений (3.1) или (3.2), возрастающей функцией t, т.е. считаем, что $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(\Omega)$ и $\varepsilon_{kl}^{*c} = \varepsilon_{kl}^{*c}(\Omega)$, причем $\varepsilon_{kl}^{*c}(0) = 0$ и $\varepsilon_{kl}^{*c}(1) = \varepsilon_{kl**}^{*c}$ для любого пути.

Переходя в соотношениях (3.1) и (3.2) к дифференцированию по Ω и учитывая однородность функции $H = H(\xi_{kl})$ и равенства

$$\frac{d}{d\Omega} = \frac{1}{B_2} s^{-p} (1 - \Omega)^m \frac{d}{dt} = \frac{1}{B_0} [H(\eta_{kl}^*)]^{-\alpha} (1 - \Omega)^{-\beta} \frac{d}{dt}$$

получим

$$\varepsilon_{kl}^{*c\prime} = \frac{B_1}{B_2} s^{n-p} \frac{\partial s}{\partial \sigma_{kl}^*}, \quad H(\varepsilon_{kl}^{*c\prime}) = \frac{B_1}{B_2} s^{n-p} = \frac{1}{B_0} [H(\eta_{kl}^*)]^{1-\alpha} (1 - \Omega)^{-\beta} \tag{3.4}$$

где штрих означает дифференцирование по Ω.

Время t_* до разрушения определяется из соотношений (3.1) и (3.2) и является функционалом от $s = s[\sigma_{kl}^*(\Omega)]$ или $H = H[\eta_{kl}^*(\Omega)]$:

$$\begin{aligned} t_* &= \frac{1}{B_2} \int_0^1 \{s[\sigma_{kl}^*(\Omega)]\}^{-p} (1 - \Omega)^m d\Omega \\ t_* &= \frac{1}{B_0} \int_0^1 \{H[\eta_{kl}^*(\Omega)]\}^{-\alpha} (1 - \Omega)^{-\beta} d\Omega \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ввиду выпуклости и однородности функции $H = H(\xi_{kl})$ справедливо неравенство [6]

$$H(\xi_{kl}^{(2)}) \geqslant \partial H / \partial \xi_{kl}\Big|_{\xi_{kl}=\xi_{kl}^{(1)}} \xi_{kl}^{(2)},$$

из которого, полагая $\xi_{kl}^{(1)} = \varepsilon_{kl}^{*c}$ и $\xi_{kl}^{(2)} = \varepsilon_{kl}^{*c'}$, найдем

$$H(\varepsilon_{kl}^{*c'}) \geqslant [H(\varepsilon_{kl}^{*c})]'$$

причем знак равенства имеет место только для простых путей деформирования. Отсюда при учете соотношений (3.4) получим

$$H_{**} \equiv H(\varepsilon_{kl**}^{*c}) = \int_0^1 [H(\varepsilon_{kl}^{*c})]' d\Omega \leqslant \int_0^1 H(\varepsilon_{kl}^{*c'}) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{B_0(1-\beta)} \int_0^1 [H(\eta_{kl}^*)]^{1-\alpha} d\Omega_1, \quad 1-\Omega_1 = (1-\Omega)^{1-\beta} \quad (1-\beta > 0) \tag{3.6}$$

Условие $\beta < 1$ в (3.6) вытекает из (3.2) в предположении о том, что при деформировании с постоянной скоростью, т.е. при H = const, время t_* до разрушения, а следовательно, и деформации ε_{kl}^{*c} в момент $t = t_*$ конечны.

Рассмотрим теперь отдельно каждую из задач 3а и 3б.

Задача 3а. При $\alpha > 1$ оптимальном среди всех путей из упомянутого множества, а при $\alpha < 1$ – среди простых путей того же множества является путь с постоянными скоростями деформаций, т.е. при $\eta_{kl_0}^* = \varepsilon_{kl_{**}}^{*c} / t_0$, где время t_0 до разрушения определяется следующим образом:

$$t_0 = [B_0(1-\beta) H_{**}^{\alpha}]^{1/(\alpha-1)} \tag{3.7}$$

Действительно, для отмеченного пути (простого) в (3.6) будет иметь место знак равенства, т.е.

$$\frac{1}{B_0(1-\beta)} \int_0^1 H_0^{1-\alpha} d\Omega_1 = H_{**}, \quad H_0 \equiv H(\eta_{kl_0}^*)$$

Тогда для любого другого пути $\eta_{kl}^* = \eta_{kl}^*(\Omega_1)$ из соотношений (3.5) и (3.6) получим

$$t_* = \frac{1}{B_0(1-\beta)} \int_0^1 H^{-\alpha} d\Omega_1, \quad \int_0^1 (H^{1-\alpha} - H_0^{1-\alpha}) d\Omega_1 \geqslant 0, \quad H = H(\eta_{kl}^*) \tag{3.8}$$

Отсюда найдем

$$t_* - t_0 = \frac{1}{B_0(1-\beta)} \int_0^1 [(H^{1-\alpha})^{\alpha/(\alpha-1)} - (H_0^{1-\alpha})^{\alpha/(\alpha-1)}] d\Omega_1 \geqslant I_6$$

$$I_6 \equiv \frac{1}{B_0(1-\beta)} \frac{\alpha}{\alpha-1} H_0^{-1} \int_0^1 (H^{1-\alpha} - H_0^{1-\alpha}) d\Omega_1 \tag{3.9}$$

где учтено, что H_0 = const, и использовано очевидное неравенство для функции $f_1(x) = x^{\alpha/(\alpha-1)}$:

$$f_1(x) - f_1(x_0) \geqslant f_1'(x_0)(x - x_0)$$

поскольку

$$f_1''(x) = \alpha(\alpha-1)^{-2} x^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} > 0$$

при $x > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Из соотношений (3.8) и (3.9) видно, что $I_6 \geqslant 0$ при $\alpha > 1$ для любого пути и $I_6 = 0$ для любого простого пути при $\alpha \neq 1$, что и доказывает сформулированное выше утверждение. Соотношение (3.7) для оптимального времени t_0 следует из (3.8) при $H = H_0 = H_{**} / t_0$.

Заметим, что при указанном режиме деформирования, когда $H = \mathrm{const}$, напряжения в момент разрушения равны нулю, т.е. $\sigma^*_{kl}\big|_{\Omega=1} = 0$ $(k, l = 1, 2)$, что следует из первого соотношения (3.2). Поэтому, согласно соотношению (2.2) имеем $\varepsilon^*_{kl}\big|_{\Omega=1} = \varepsilon^{*c}_{kl**}$, т.е. в этот момент полные деформации совпадают с деформациями ползучести.

В случае, когда $\alpha = 1$, из второго соотношения (3.2) имеем $\dot{\Omega} = B_0 H(\eta^*_{kl})$. Поэтому для любого пути справедливо равенство

$$\int_0^{t_*} H(\eta^*_{kl})dt = B_0^{-1}$$

откуда при $\eta^*_{kl} = \varepsilon^{*c}_{kl**} / t_0$ получим $H_{**} = B_0^{-1}$, т.е. решение существует, если заданные деформации ε^{*c}_{kl**} удовлетворяют условию $H(\varepsilon^{*c}_{kl**}) = B_0^{-1}$. Ясно, что при выполнении последнего условия оптимальным является путь с максимально возможной (из физических соображений) величиной $H(\eta^*_{kl})$. Например, если есть ограничение на $s: s(t) \leqslant s_{**}$ (как в задачах 1 и 2), то, согласно соотношениям (3.2), $H_{\max} = B_1 s^n_{**}(1-\Omega)^{-m}$ и время до разрушения $t_* = [B_2(m+1)s^n_{**}]^{-1}$.

Задача 3б. При $n + 1 - p > 0$ оптимальным (по крайней мере, среди всех простых) является путь при постоянных напряжениях $\sigma^*_{kl} = \sigma^*_{kl_0}$. Последние определяются из соотношений (3.3) и (3.4)

$$\sigma^*_{kl_0} = s_0 \partial H_{**} / \partial \varepsilon^{*c}_{kl**}, \quad s_0 = (B_1^{-1} B_2 H_{**})^{1/(n-p)}$$

Для доказательства данного утверждения заметим, что из соотношений (3.4) и (3.6) следует, что

$$H_{**} \leqslant \int_0^1 H(\varepsilon^{*c'}_{kl})d\Omega = \frac{B_1}{B_2}\int_0^1 s^{n-p}d\Omega, \quad A^c = \frac{B_1}{B_2}\int_0^1 s^{n-p+1}d\Omega \qquad (3.10)$$

(Знак равенства в неравенстве (3.10) имеет место только для простых путей.)

Из неравенства (3.10) по аналогии с соотношениями (3.8) и (3.9) получим (нулевой индекс относится к величинам, соответствующим напряжениям $\sigma^*_{kl} = \sigma^*_{kl_0}$)

$$\int_0^1 (s^{n-p} - s_0^{n-p})d\Omega \geqslant 0, \quad A^c - A_0^c = \frac{B_1}{B_2}\int_0^1 [(s^{n-p})^q - (s_0^{n-p})^q]d\Omega \geqslant I_7$$

$$I_7 \equiv \frac{B_1}{B_2} q s_0 \int_0^1 (s^{n-p} - s_0^{n-p})d\Omega, \quad q = \frac{n-p+1}{n-p} \qquad (3.11)$$

Последнее неравенство в (3.11) выполняется в силу того, что вторая производная функции $f_2(x) = x^q$ положительна при $n - p + 1 > 0, x > 0, n \neq p$.

Из последнего неравенства в (3.11) следует, что $A^c \geqslant A_0^c$ при $n - p + 1 > 0$ для простых путей $(I_7 = 0)$; если же $n - p > 0$, то $A^c \geqslant A_0^c$ для любого пути $(I_7 \geqslant 0)$.

Как и в задаче 3а, случай, когда $p = n$ (т.е. $\alpha = 1$), требует отдельного рассмотрения. Решение будет существовать, если $H_{**} = B_0^{-1} = B_1 B_2^{-1}$. Согласно второму соотношению (3.10) при $p = n$ оптимальным будет путь с минимально возможной (физически) величиной $s = s(\sigma^*_{kl})$, например, равной ненулевому пределу ползучести (если он существует), ниже которого ползучесть практически отсутствует.

Если есть ограничение на время t_0 до разрушения: $t_0 \leqslant t_{**}$ (как в задаче 2), то, как показано ранее [6] (случай $\gamma_0 = n(n+1)^{-1} < 1$ в задаче оптимального разрушения), оптимальным будет деформирование с постоянной мощностью диссипации W при $t_0 = t_{**}$.

Заметим, что при $p = n$ задача 3б соответствует рассмотренной ранее [6] при $\gamma_0 < 1$, хотя в последней и не требовалось, чтобы

$$\int_0^{t_*} H(\eta^*_{kl})dt = H_{**} \equiv H(\varepsilon^{*c}_{kl**})$$

(это равенство следует из (3.2) только при $\alpha = 1$, т.е. при $\gamma_0 = n(n+1)^{-1}$).

При $n + 1 - p = 0$ затраченная на разрушение удельная энергия не зависит от пути деформирования и является характеристикой материала [6].

Пусть $n + 1 - p < 0$. В этом случае функция $f_2(x) = x^q$ имеет отрицательную вторую производную, и во втором неравенстве (3.11) знак будет меняться на противоположный, т.е. рассмотренный выше путь при $s = s_0 = \text{const}$ – самый неблагоприятный (по крайней мере, среди всех простых путей) в смысле затрат энергии.

Для оптимального пути (при $n + 1 - p < 0$) есть естественное ограничение снизу $A_0^c \geqslant 0$, причем теоретически возможно (в пределе) достижение нижней границы $A_0^c = 0$. В качестве примера рассмотрим два множества зависящих от параметра $\xi > 0$ простых путей

$$\varepsilon^{*c}_{kl} = \varepsilon^{*c}_{kl**}F_i(\Omega), \quad i = 1, 2 \qquad (3.12)$$
$$F_1 = \Omega^\xi, \qquad F_2 = 1 - (1-\Omega)^\xi$$

В обоих случаях найдем из соотношений (3.4) и (3.10)

$$A^c = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{1/(n-p)} H^q_{**}F(\xi), \quad F(\xi) = \frac{\xi^q}{(\xi-1)q+1}$$

Видно, что функция $F = F(\xi)$ имеет максимум при $\xi = 1$ (что, согласно соотношениям (3.4) и (3.12), соответствует упомянутому случаю, когда $s = \text{const}$) и $F(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$ и $\xi \to \infty$. Очевидно, что эти предельные ситуации лишены физического смысла, поскольку вследствие соотношений (3.12) приводят к мгновенному деформированию от $H = 0$ при $\Omega = 0$ до $H = H_{**}$ при $0 < \Omega \leqslant 1$ либо от $H = 0$ при $0 \leqslant \Omega < 1$ до $H = H_{**}$ при $\Omega = 1$. Поэтому можно рассматривать лишь достаточно малые (или большие) значения ξ, при которых напряжения и время до разрушения будут конечными величинами, что и должно иметь место в реальном процессе.

Анализ соотношений (3.12) с использованием равенств (3.1) и (3.4) показывает, что эти ограничения будут выполняться, если $\alpha^{-1} < \xi < 1$ для $F_1(\xi)$ и $\alpha^{-1}(1-\beta) < \xi < 1$ для $F_2(\xi)$, где $\alpha = p/n > 1 + n^{-1}$, $\beta = m(\alpha - 1) > m/n$ и $\beta < 1$ (о чем упоминалось выше). Отсюда видно, что нижняя граница для ξ у F_1 лежит правее, чем у F_2. Поэтому $F_2 = F_2(\xi)$ можно выбрать в качестве функции, характеризующей путь деформирования, близкий к оптимальному, и учитывающий ограничения физического характера, если значение ξ близко к $\alpha^{-1}(1-\beta)$. Соответствующие напряжения и время до разрушения легко находятся из соотношений (3.2), (3.4) и (3.5).

4. Примеры. Рассмотрим бесконечную вязкоупругую область (плоскость) S, содержащую эллиптическое ФНВ, определяющие уравнения для которого имеют вид (2.2) и (3.1). Соотношения (1.1) для S по аналогии с (2.1) разрешим относительно деформаций, считая для простоты, что ядра ползучести, действующие на шаровую и девиаторную части плоского тензора напряжений, различаются только постоянными множителями:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{\tilde{\varkappa}-1}{8\tilde{\mu}}\sigma_{nn}\delta_{kl} + \frac{1}{2\tilde{\mu}}\sigma^0_{kl}, \quad k, l = 1, 2 \qquad (4.1)$$

Здесь

$$\frac{\tilde{\varkappa}-1}{\tilde{\mu}}x = \frac{\varkappa-1}{\mu}J_1(x), \quad \frac{1}{\tilde{\mu}}x = \frac{1}{\mu}J_2(x)$$

$$J_k(x) \equiv x(t) + \beta_k \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad \beta_k = \text{const}, \quad k = 1, 2$$

Тогда, согласно соотношениям (1.8) и (4.1), при заданном однородном НДС в области S^* напряжения и вращение на бесконечности будут определяться из системы уравнений

$$\frac{\varkappa+1}{\mu}\left[X_k(t) - \beta_0 \int_0^t K(t-\tau)X_k(\tau)d\tau\right] = \Phi_k, \quad k = 1, 2 \tag{4.2}$$

$$X_1 = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4} + 2i\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\varkappa}+1}\varepsilon^\infty, \quad X_2 = \frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty}{2}$$

$$\Phi_1 = C + m_0 D + \frac{1}{\tilde{\mu}}(A + m_0\overline{B})$$

$$\Phi_2 = -(\overline{D} + m_0^2 D + 2m_0 \operatorname{Re} C) + \frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\mu}}(B + m_0 A) - \frac{m_0}{\tilde{\mu}}(A + m_0\overline{B})$$

$$\beta_0 = -\frac{\beta_1(\varkappa-1) + 2\beta_2}{\varkappa+1}$$

Как известно [2, 3], решение уравнений (4.2) имеет вид

$$X_k(t) = \frac{\mu}{\varkappa+1}\left[\Phi_k(t) + \beta_0 \int_0^t \Gamma(\beta_0, t-\tau)\Phi_k(\tau)d\tau\right], \quad k = 1, 2 \tag{4.3}$$

где $\Gamma(\beta_0, t-\tau)$ – резольвента ядра $K(t-\tau)$ из (4.2). Например, для широко распространенного в теории линейных вязкоупругих сред ядра Абеля резольвентой является хорошо изученная дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова [2].

Поскольку границей L^* служит эллипс с полуосями a и b, то отображающая функция имеет вид [1]

$$\omega(\zeta) = R_0(\zeta + m_0\zeta^{-1}), \quad 2R_0 = a + b, \quad 2m_0 R_0 = a - b$$

При однородном НДС в области S^* точки контура L^*, соответствующие значениям $z = z_0 \equiv \omega(\sigma)$ ($\sigma = e^{i\theta}$), после деформации перейдут в новое положение, определяемое соотношением $z = z_0 + w^*(z_0, \bar{z}_0)$, откуда вследствие соотношений (1.4) получим

$$z = (1 + C/2)\omega(\sigma) + (D/2)\overline{\omega(\sigma)} = R_1 e^{i\alpha_1}(\sigma_1 + m_1\sigma_1^{-1}) \tag{4.4}$$

$$\sigma_1 = e^{i\theta_1}, \quad \theta_1 = \theta + (\varphi_1 - \varphi_2)/2, \quad \alpha_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$$

$$R_1 e^{i\varphi_1} = R_0[1 + (C + m_0 D)/2], \quad m_1 R_1 e^{i\varphi_2} = R_0[m_0 + (m_0 C + D)/2]$$

Таким образом, контур L^* будет деформироваться в новый эллипс с полуосями $R_1(1 + m_1)$ и $R_1(1 - m_1)$ (эти величины положительны ввиду малости деформаций ε_{kl}^* и вращения ε^*). Его оси симметрии повернуты относительно старых на угол α_1. Следовательно, путем подбора функций $C(t)$ и $D(t)$ из (1.4) можно деформировать исходную границу L^* в требуемый эллипс (естественно, близкий по форме к исходному) с параметрами $R_1(t)$, $m_1(t)$ и $\alpha_1(t)$ ($0 \leqslant t \leqslant t_*$, t_* – момент разрушения).

Пусть, например, при $t = t_*$ исходный контур $L^* : z = R_0(\sigma + m_0\sigma^{-1})$ $(0 < m_0 \ll 1)$ должен превратиться в окружность радиуса R_1. Тогда из соотношения (4.4), полагая $\alpha_1 = 0$, получим для C_* и D_* (звездочкой отмечены величины в момент $t = t_*$)

$$C_* + m_0 D_* = 2(R_1 R_0^{-1} e^{i\varphi_{1*}} - 1)$$
$$m_0 C_* + D_* = -2m_0 \qquad (4.5)$$

Пусть вращение $\varepsilon_*^* = 0$ (или $\varepsilon_{12*}^* = 0$). Тогда (поскольку m_0 – действительная постоянная) из (4.5) и (1.4) следует, что $\varepsilon_{12*}^* = 0$ (или, соответственно, $\varepsilon_*^* = 0$), $\varphi_{1*} = 0$ и

$$\varepsilon_{kk*}^* = \frac{R_1 R_0^{-1} - (1 + (-1)^{k+1} m_0)}{1 - (-1)^{k+1} m_0}, \quad k = 1, 2 \qquad (4.6)$$

Если, наоборот, исходный круговой контур $L^* : z = R_0\sigma$ превращается в эллипс $z = R_1(\sigma + m_1\sigma^{-1})$, то из соотношений (4.4) при $\varphi_1 = \varphi_2 = m_0 = 0$ найдем

$$\varepsilon_{12*}^* = \varepsilon_*^* = 0, \quad \varepsilon_{kk*}^* = (1 + (-1)^{k+1} m_1) R_1 R_0^{-1} - 1, \quad k = 1, 2 \qquad (4.7)$$

Если оптимальным является путь с постоянными скоростями деформаций ползучести (как, например, в задаче 3а), то, учитывая, как отмечалось выше, что при таком режиме в момент разрушения полные деформации и деформации ползучести совпадают, найдем что для указанного пути выполняются равенства $\eta_{kl_0}^* = \varepsilon_{kl*}^* / t_0$, величина t_0 определена выражением (3.7). Из соотношений (3.2) находятся соответствующие напряжения σ_{kl}^*, а из (4.3) – искомые напряжения σ_{kl}^∞.

В рассмотренных двух примерах деформации ε_{kl*}^* определяются согласно соотношениям (4.6) и (4.7), причем $\varepsilon_{12*}^* = 0$, т.е. $\eta_{120}^* = 0$. Отсюда (по крайней мере, для изотропной среды) следует, что $\sigma_{12}^* = 0$, поэтому и $\varepsilon_{12}^* = 0$ в любой момент времени $t \in [0, t_0]$. Тогда величины вращений в области S^* и на бесконечности будут равны, поскольку условие равенства мнимых частей в первом уравнении (4.2) имеет вид

$$\varepsilon^\infty = \varepsilon^* + m_0 \left(\varepsilon_{12}^* - \frac{1}{2\bar{\mu}} \sigma_{12}^* \right)$$

Поэтому $\varepsilon^\infty = 0$, если принять, что $\varepsilon^* = 0$ при любом $t \in [0, t_0]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00551).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвелодуб И.Ю.* Об одной обратной задаче для упругой среды, содержащей физически нелинейное включение // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 424–430.
2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
3. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А.* и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
4. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. 201 с.
5. *Beckenbach E.F., Bellman R.* Inequalities. Berlin, ect.: Springer, 1961. = *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.
6. *Цвелодуб И.Ю.* Об оптимальных путях деформирования и разрушения в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 108–114.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.IX.2000