

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова

ПРИЗНАК НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ИЛИ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Рассматриваются системы гиперболических уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения. Формулируется достаточное условие, при выполнении которого решение автомодельной задачи о распаде произвольного разрыва (или задачи о "поршне") либо не существует, либо не единственно. Предлагаемое достаточное условие определяется существованием таких неэволюционных разрывов, которые можно рассматривать как последовательность двух эволюционных разрывов, движущихся с одинаковыми скоростями, если такое представление единственно. Это условие является более общим, чем сформулированное авторами ранее условие, основанное на существовании не "своей" точки Жуге. Предложенный новый критерий выполняется для слабых квазипоперечных ударных волн в упругих средах при обоих знаках коэффициента при нелинейном члене деформации. Он позволяет сделать выводы о несуществовании или неединственности решений для задач теории упругости также в случае волн конечной амплитуды.

1. Введение. Рассматривается система квазилинейных однородных гиперболических уравнений, полученных из интегральных законов сохранения для одномерного нестационарного случая

$$\frac{\partial f_k(u_i(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial g_k(u_i(x,t))}{\partial x} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Функции f_k можно трактовать как плотности некоторых физических величин, а g_k – их потоки через единичную площадку, перпендикулярную оси x , u_i – искомые параметры состояния. Гиперболическая система (1.1) обладает n действительными характеристическими скоростями $c_1(u_i), \dots, c_n(u_i)$. Им соответствуют n непрерывных решений в виде волн Римана, которые могут опрокидываться, образуя разрывы.

Соотношения на разрывах получаются из тех же интегральных законов сохранения и имеют вид

$$[g_k] - W[f_k] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

где W – скорость разрыва, $[f] = f^+ - f^-$ – разность значений функции f за и перед скачком. Соотношения на разрыве позволяют для каждого состояния перед скачком $u_i^- = U_i$ и значения W указать возможные состояния u_i^+ за разрывом. Исключение из соотношений W дает ударную адиабату – кривую в пространстве состояний u_i , проходящую через начальную точку U_i , с самопересечением в этой точке, так как ветви ударной адиабаты касаются в этой точке интегральных кривых n волн Римана [1]. Из тех же уравнений (1.2) затем можно найти скорость скачка W как функцию положения точки на ударной адиабате.

Для системы (1.1) задача о распаде произвольного начального разрыва формулируется так: при $t = 0$ плоскость $x = 0$ разделяет два полупространства с различными

однородными состояниями: $x > 0$, $u_i = U_i = \text{const}$ и $x < 0$, $u_i = u_i^* = \text{const}$. При $t > 0$ от границы в обе стороны оси x идут последовательности автомодельных плоских волн в виде фронтов разрыва и центрированных волн Римана, которые требуется найти. Можно также рассматривать автомодельную задачу только в полупространстве $x > 0$, задавая на его границе постоянные значения $u_i = u_i^*$ (задача "о поршне").

Разрывы, которые могут использоваться в решении, должны кроме уравнения ударной адиабаты удовлетворять еще требованию неубывания энтропии и условиям эволюционности [1, 2]. Условия эволюционности представляют собой критерий однозначной разрешимости системы однородных алгебраических уравнений, полученных линеаризацией законов сохранения на разрыве (1.2), для амплитуд уходящих от разрыва малых одномерных возмущений. Условия эволюционности выражаются в виде систем неравенств между скоростью скачка W и характеристическими скоростями c_j^- , c_k^+ , ($j, k = 1, 2, \dots, n$) перед и за разрывом соответственно

$$c_k^- \leq W \leq c_{k+1}^-, \quad c_{k-1}^+ \leq W \leq c_k^+, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

Неравенства (1.3) выражают требование, чтобы число различных уходящих от разрыва типов возмущений (или, что то же самое, число уходящих характеристик) было равно $n - 1$. При этом n линеаризованных соотношений на разрыве (1.2) должны однозначно определять амплитуды $n - 1$ уходящих волн и возмущение скорости ударной волны.

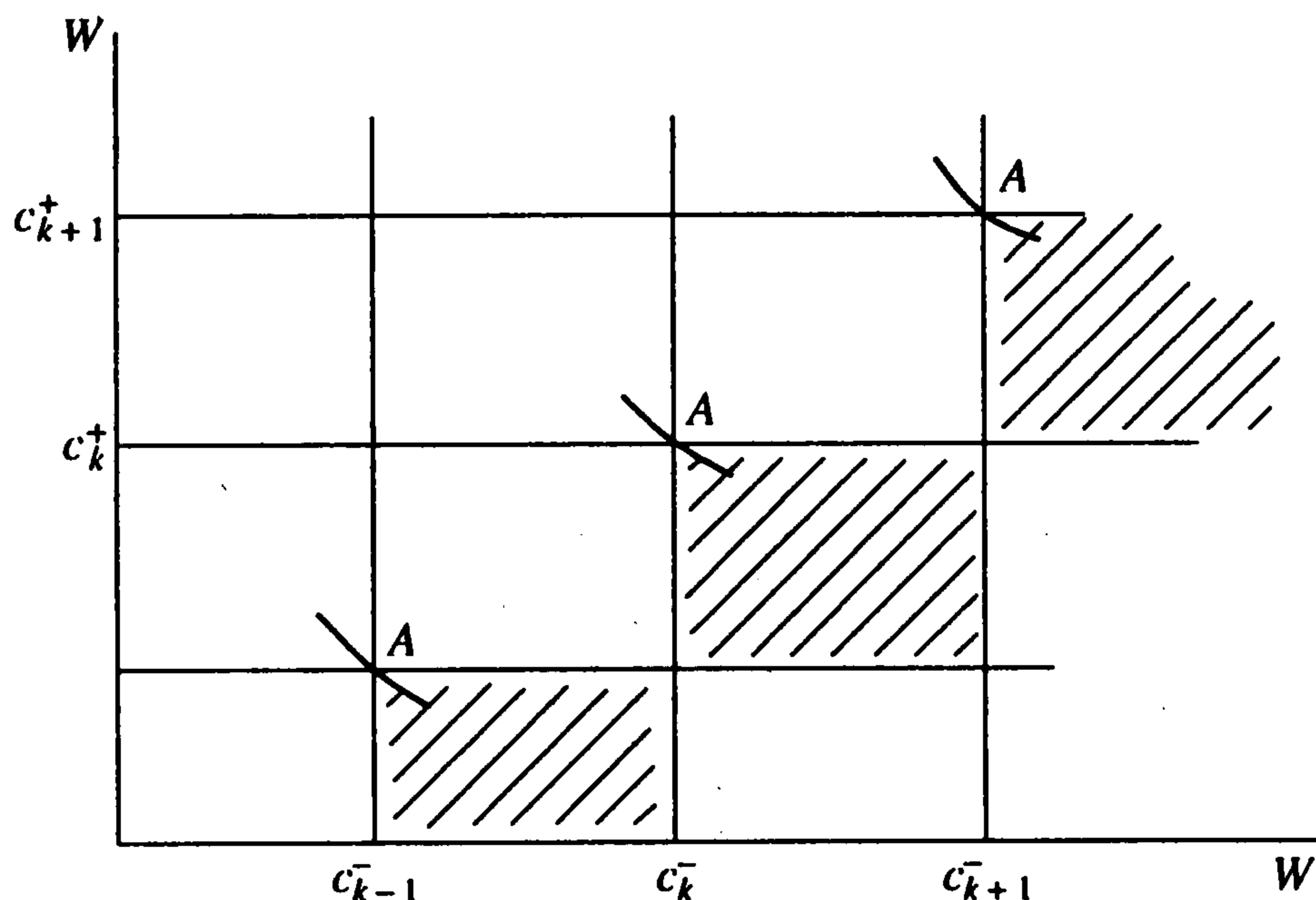
Для каждого k такая пара неравенств определяет тип разрывов, которые называются разрывами k -го типа. Очевидно, существует n типов разрывов в зависимости от номера k (в условиях (1.3) следует исключить неравенства, содержащие несуществующие c_0^+ и c_{n+1}^-).

Неравенства (1.3) выделяют на ударной адиабате отрезки, соответствующие эволюционным ударным волнам. На концах этих отрезков скорость скачка совпадает с какой-нибудь из характеристических скоростей по состоянию перед разрывом (если $W = c_k^-$) или состоянию за разрывом (если $W = c_k^+$). Эти точки (кроме начальной) называются точками Жуге.

Для наглядного представления неравенств (1.3) удобно пользоваться диаграммой, где по взаимно ортогональным осям отложены скорости, участвующие в неравенствах (1.3), и тем самым изображено выполнение этих неравенств [3]. На фиг. 1 каждый из заштрихованных прямоугольников соответствует определенному (k -му) типу ударных волн. Поскольку известно, как меняются скорости W и c_k^+ вдоль ударной адиабаты (c_j^- не меняются), то на указанной диаграмме можно изобразить след ударной адиабаты как функцию W вдоль нее. Скорость бесконечно слабого k -го разрыва, т.е. скорость скачка в начальной точке A , совпадает с характеристическими скоростями перед и за разрывом $W = c_k^- = c_k^+$. Это значит, что на диаграмме фиг. 1 начальное состояние $A(c_k^-, c_k^+)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) будет изображено n узлами сетки.

Формула Лакса [1] для скорости слабых ударных волн $W = (c_k^- + c_k^+)/2$ позволяет заключить, что в окрестностях упомянутых узлов сетки ударная адиабата, проходящая через них, одним концом уходит в эволюционный прямоугольник, а другим — в "симметричный" ему неэволюционный прямоугольник, как это изображено на фиг. 1. Таким образом, ударная адиабата всегда содержит хотя бы по одному эволюционному отрезку каждого из n типов разрывов (а может быть, и более).

Для разрывов, соответствующих прямоугольникам на фиг. 1, расположенных выше заштрихованных, линеаризованных законов сохранения на разрыве (1.2) недостаточно



Фиг. 1

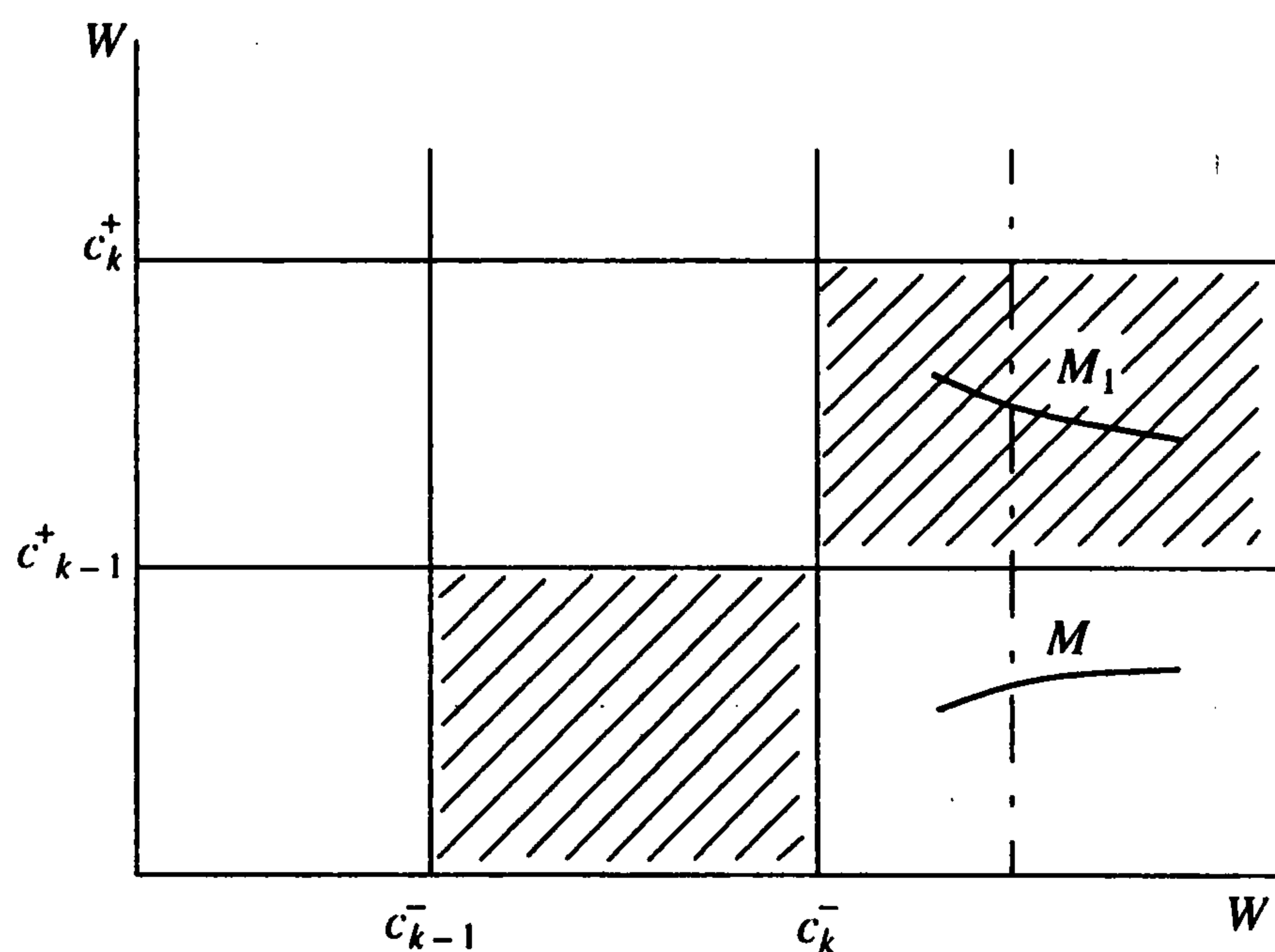
для их эволюционности. Сделать такие ударные волны эволюционными может добавление к системе (1.2) соотношений, независимых от законов сохранения.

В дальнейшем исследовании основной интерес представляют разрывы, соответствующие на фиг. 1 прямоугольникам, примыкающим к эволюционным снизу и справа. Для эволюционности таких разрывов число граничных условий должно быть равно $n - 1$, в то время как на самом деле число соотношений (1.2) равно n , т.е. на единицу больше, чем нужно для эволюционности этих разрывов. Такие разрывы будем в дальнейшем называть неэволюционными {1} (в фигурных скобках стоит избыток граничных условий).

Покажем, что условиям эволюционности не противоречит формальная возможность замены такого неэволюционного разрыва двумя эволюционными разрывами, которые движутся с одинаковыми скоростями. Действительно, в области между этими разрывами имеется n различных типов малых возмущений, т.е. все возможные типы возмущений, каждое из которых уходит либо от одного, либо от другого разрыва. Во внешнюю область от комбинации двух разрывов уходит $n - 2$ возмущения, так же как от неэволюционного разрыва, который они заменяют. Таким образом, полное число уходящих возмущений от двух разрывов оказывается равным $2n - 2$. Если от каждого из них уходит одинаковое число возмущений, равное $n - 1$, то оба разрыва будут эволюционными. Возможно ли на самом деле представление неэволюционного разрыва последовательностью двух эволюционных разрывов (будем называть это распадом) зависит от свойств ударной адиабаты, и этот вопрос будет рассматриваться ниже.

Отметим, что неэволюционный {1} разрыв может распадаться только на два эволюционных разрыва, движущихся с одинаковыми скоростями, так как при распаде на большее число эволюционных разрывов для определения амплитуд малых возмущений и возмущений скоростей разрывов не хватило бы соотношений, следующих из законов сохранения. Кроме того, из приведенных выше рассуждений следует, что если один из двух разрывов, на которые распадается неэволюционный {1} разрыв, эволюционный, то второй — также эволюционный.

2. О распаде неэволюционных {1} разрывов и единственности решений. На диаграмме эволюционности фиг. 1 при изображении ударной адиабаты (когда фиксировано состояние перед ударной волной) величины c_i^- определяются начальным состоянием и потому постоянны. Поэтому скорость W по горизонтальной оси можно изображать в некотором фиксированном масштабе. По вертикальной оси этого



Фиг. 2

добиться невозможно из-за переменности величин c_i^+ вдоль ударной адиабаты. При этом точки ударной адиабаты, лежащие на диаграмме на одной вертикали, соответствуют разрывам, движущимся с одинаковыми скоростями по одному и тому же начальному состоянию.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на фиг. 2, когда над неэволюционным {1} отрезком ударной адиабаты с начальной точкой A расположен эволюционный отрезок (на фиг. 2 изображены только части ударной адиабаты). Рассмотрим точки M и M_1 ударной адиабаты, соответствующие одной и той же скорости W . В фазовом пространстве u_i на ударной адиабате также имеются соответствующие точки, которые будем обозначать теми же буквами M и M_1 . Так как разрывы $A \rightarrow M$ и $A \rightarrow M_1$ (A – начальная точка ударной адиабаты) движутся с одной и той же скоростью W , то выполнение законов сохранения (1.2) означает выполнение законов сохранения и на разрыве $M_1 \rightarrow M$, движущемся с той же скоростью W . Таким образом, разрыв $A \rightarrow M$ распадается, т.е. существует последовательность разрывов $A \rightarrow M_1$ и $M_1 \rightarrow M$, каждый из которых движется с той же скоростью W , что и неэволюционный {1} разрыв $A \rightarrow M$, причем состояния впереди (A) и позади (M) у них совпадают. Согласно предыдущему, из эволюционности разрыва $A \rightarrow M_1$, который принадлежит k -му типу, следует эволюционность разрыва $M_1 \rightarrow M$, который, очевидно, принадлежит $(k-1)$ -му типу. Будем в дальнейшем при упоминании ударных адиабат указывать в скобках их начальные точки.

Рассмотрим серию задач о распаде произвольного разрыва (или задач "о поршне"), в которых фиксированы все волны (которые могут быть разрывами или волнами Римана), кроме волн с номерами k и $k-1$. При этом состояние перед k -й волной (A) будет фиксировано и будет приниматься в качестве начального состояния для ударной адиабаты (A). Найдем в пространстве u_i множество точек, в которые можно попасть из точки A при помощи последовательности двух разрывов k -го и $(k-1)$ -го типов. Согласно предыдущему, к этому множеству принадлежит та неэволюционная {1} часть ударной адиабаты (A), для точек которой при тех же W существуют эволюционные разрывы k -го типа (на диаграмме фиг. 2 это часть неэволюционного {1} участка ударной адиабаты, выше которой лежит эволюционный отрезок). На этой неэволюционной {1} части ударной адиабаты (A) скорости k -го и $(k-1)$ -го разрыва совпадают. Очевидно, что в автомобильном решении скорость $(k-1)$ -го разрыва не

должна превышать скорость k -го разрыва $W_{k-1} \leq W_k$. Если зафиксировать точку M_1 и, следовательно, W_k , то при изменении W_{k-1} точка, представляющая состояние за последовательностью k -го и $(k-1)$ -го разрывов, будет двигаться вдоль ударной адиабаты с начальной точкой M_1 . При достижении скоростью W_{k-1} значения W_k состояние (M) за системой из двух разрывов, движущихся с одинаковой скоростью, должно принадлежать неэволюционному $\{1\}$ отрезку ударной адиабаты. Будем рассматривать случай общего положения, когда скорость W_{k-1} не имеет экстремума на ударной адиабате (M_1) в точке M ее пересечения с ударной адиабатой (A) .

При движении точки M_1 по ударной адиабате (A) $(k-1)$ -я ударная адиабата (M_1) в пространстве u_i замечает двумерную поверхность. Так как в автомобильной задаче необходимо выполнение неравенства $W_{k-1} \leq W_k$, то состояние за двумя разрывами k -го и $(k-1)$ -го типов может принадлежать только части этой поверхности, ограниченной неэволюционным $\{1\}$ куском ударной адиабаты (A) .

Если теперь разрешить изменяться $n-2$ волнам, которые ранее считались фиксированными, то кривая, соответствующая неэволюционной $\{1\}$ части ударной адиабаты, заметет, в случае общего положения, в пространстве u_i поверхность Σ размерности $n-1$ (гиперповерхность). Эта поверхность разделит пространство u_i на две части, в одной из которых решение задачи о распаде разрыва содержит ударные волны k -го и $(k-1)$ -го типов, скорости которых совпадают на поверхности Σ и равны скорости неэволюционного $\{1\}$ разрыва. Будем называть это решение решением I.

Если существует только одна пара разрывов k -го и $(k-1)$ -го типов с совпадающими скоростями, на которые распадается неэволюционный разрыв, то очевидно, что с другой стороны от поверхности Σ решение задачи не содержит одновременно разрывов k -го и $(k-1)$ -го типов, скорости которых совпадали бы на поверхности Σ . Это означает, что если решение в области, примыкающей к Σ с другой стороны, существует, то оно либо содержит хотя бы одну из волн Римана k -го и $(k-1)$ -го типов, либо содержит разрывы k -го и $(k-1)$ -го типов, скорости которых на поверхности Σ различны. Такие решения (если они существуют) будем называть решениями II. Области существования решений II в общем случае не связаны с ударной адиабатой (A) и, следовательно, не ограничиваются поверхностью Σ .

Действительно, ограничения области существования решений II не имеют отношения к возможности существования одного неэволюционного скачка с выполнением законов сохранения из состояния перед k -й волной в некоторую точку поверхности Σ , поскольку в этих решениях комбинации волн k -го и $(k-1)$ -го типов не обладают одной и той же скоростью. Если решение II существует по ту сторону от поверхности Σ , где нет решений I, и область его существования не связана с поверхностью Σ , то в общем случае она может либо не доходить до поверхности Σ , что ведет к несуществованию решения в некоторой зоне, либо должна существовать область, где имеют место оба решения типа I и II, т.е. область неединственности решений.

Таким образом, если при подходящем задании начальной точки для ударной адиабаты существует неэволюционный $\{1\}$ ее отрезок, такой, что на некотором интервале скоростей наряду с неэволюционным имеется также эволюционный разрыв, причем только один, то можно указать такие условия для задачи о распаде разрыва, что решение либо не будет существовать, либо будет не единственным.

Приведенное выше утверждение о неединственности или несуществовании решения теряет силу, если нет эволюционных разрывов, имеющих те же скорости, что и неэволюционные $\{1\}$, или если таких эволюционных разрывов два для каждого значения скорости. В первом случае возможные решения никак не связаны с наличием рассматриваемой неэволюционной волны, и предложенным выше способом никаких заключений о решении сделать нельзя. Во втором случае на диаграмме фиг. 2 в том же заштрихованном k -м прямоугольнике имеется еще один эволюционный участок ударной адиабаты (A) . Тогда существуют две комбинации k -й и $(k-1)$ -й

эволюционных волн в случае фиксированных амплитуд остальных $n - 2$ волн. Если теперь допустить произвольные изменения этих амплитуд, то отрезок ударной адиабаты, соответствующий неэволюционным {1} разрывам, как и прежде, заметет $n-1$ мерную поверхность Σ . Но теперь может оказаться, что с одной стороны от этой поверхности имеется решение I, содержащее одну комбинацию k -го и $(k - 1)$ -го разрывов, а с другой стороны – решение II, содержащее другую комбинацию разрывов указанных типов, причем поверхность Σ разделяет области, соответствующие решениям I и II. Таким образом, в этом случае решения, содержащие разрывы k -го и $(k - 1)$ -го типов, существуют по обе стороны от поверхности Σ и определяются единственным образом. Возможно, конечно, что решениям I и II отвечают области, примыкающие к поверхности Σ с одной и той же стороны. При этом решение, очевидно, не единственно. Отличить этот случай от предыдущего по форме ударной адиабаты на диаграмме эволюционности не представляется возможным.

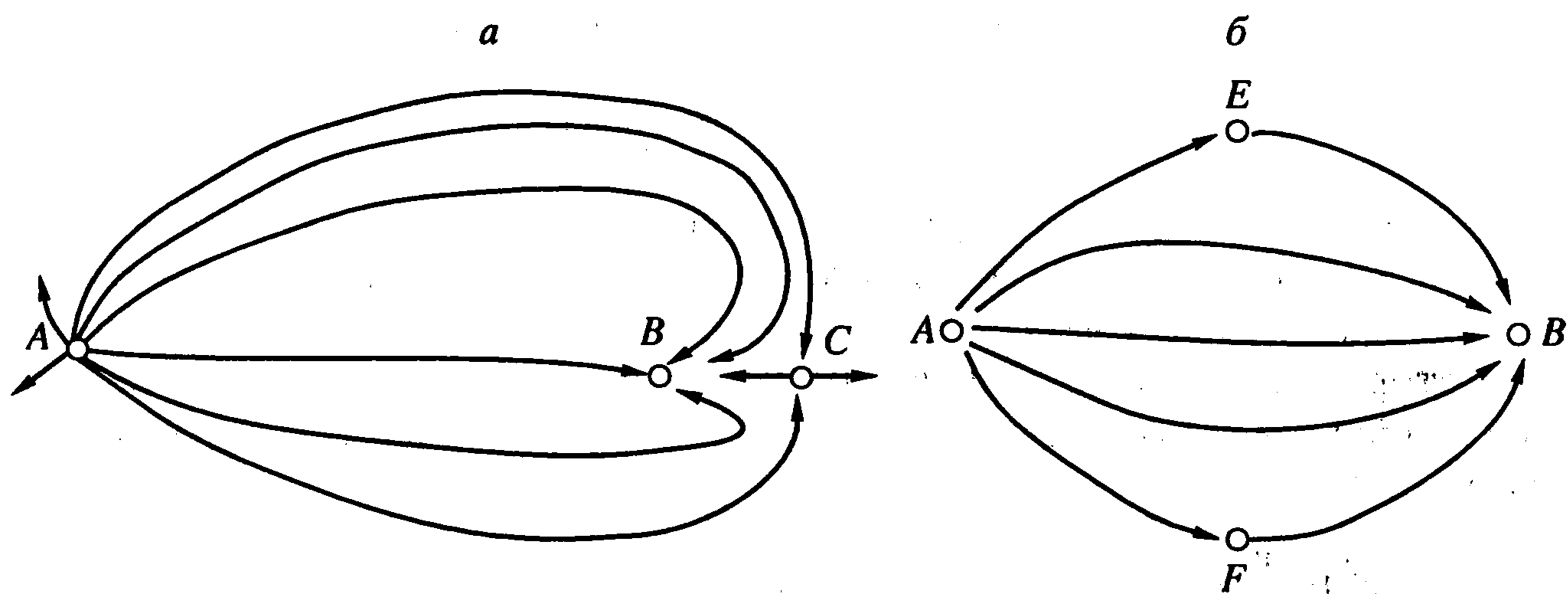
Если эволюционных разрывов, имеющих ту же скорость, что и неэволюционный {1} разрыв, три или более, то очевидно, что хотя бы с одной стороны от поверхности Σ будут существовать два или более решений, содержащих разрывы k -го и $(k - 1)$ -го типов, т.е. решение будет не единственным.

Рассмотрим случай, когда решение существует, но не единственно. Неединственность связана с присутствием решения (обозначенного выше как решение II), не связанного непосредственно с ударной адиабатой, которое действует в некоторой конечной области, содержащей внутри себя неэволюционный {1} участок ударной адиабаты. Поэтому, если к такому неэволюционному отрезку примыкает на ударной адиабате эволюционный отрезок, то часть этого эволюционного отрезка попадает в область существования решения II, которое, как выше отмечалось, состоит из волн, движущихся с различными скоростями. Это означает, что ударные волны, соответствующие точкам эволюционных отрезков ударной адиабаты, примыкающих к неэволюционным {1} отрезкам, могут быть заменены системой волн с теми же значениями параметров перед системой волн и за ней. В этих случаях уравнения, выражающие законы сохранения, допускают распад указанных выше эволюционных разрывов на систему волн (которая может включать в себя другие эволюционные разрывы).

Определение условий, при которых подобный распад эволюционной ударной волны может произойти фактически, должно служить предметом отдельного исследования в конкретных случаях. Этот вопрос здесь не рассматривается.

Упомянем, что при изучении квазипоперечных волн в анизотропной упругой среде были обнаружены такие эволюционные разрывы, которые могут распадаться на систему волн [4]. Однако, как показали дальнейшие исследования [5, 6], для того чтобы такой распад произошел, необходимы сильные возмущения (сильные приходящие волны или изменение фона).

3. Замечание о структуре неэволюционного {1} разрыва. Как было показано [7, 8], если количество законов сохранения превосходит на число q количество соотношений, необходимое для эволюционности разрыва, то структура этого разрыва содержит q произвольных параметров. В рассматриваемом случае имеется однопараметрическое множество интегральных кривых (ИК), соединяющих начальную (A) и конечную (B) особые точки системы уравнений, описывающих структуру неэволюционного {1} разрыва (предполагается, что диссипативные процессы достаточно многообразны, так что решение, описывающее структуру, непрерывно). Рассмотрим двумерную поверхность, составленную из ИК, выходящих из точки A и приходящих в точку B . Если, как обычно, особенностями поля ИК являются стационарные особые точки системы с некратными собственными значениями (координаты этих точек наряду с координатами точек A и B удовлетворяют законам сохранения), то либо упомянутое выше множество ИК ничем не ограничено, либо ограничено сепаратрисами особых точек, отличных от A и B . Среди этих точек может присутствовать некоторая точка C , такая, что разрыв, соответствующий переходу $A \rightarrow C$, эволюционен. Как отмечалось,



Фиг. 3

разрыв $C \rightarrow B$ также будет эволюционным. Эволюционным разрывам соответствует единственная ИК. Поведение ИК, соединяющих точки A и B , представлено в случае наличия одной дополнительной точки (точки C) на фиг. 3, *a* и в случае двух (точки E и F) особых точек – на фиг. 3, *б*. Таким образом, среди множества решений, представляющих структуру неэволюционного $\{1\}$ разрыва, могут содержаться решения, представляющие последовательность двух эволюционных разрывов $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$, что соответствует ситуации, обсуждавшейся в разд. 2.

От неэволюционного $\{1\}$ разрыва уходит на единицу меньшее число малых возмущений различных типов, чем от эволюционного. По аналогии с задачами магнитной гидродинамики, для которых проводились численные эксперименты с целью изучения поведения неэволюционных разрывов [9], уменьшение числа уходящих возмущений можно трактовать как улавливание и накопление внутри структуры неэволюционным $\{1\}$ разрывом возмущений определенного типа. По аналогии с этими результатами можно ожидать, что при таком процессе если амплитуда приходящих к разрыву возмущений мала, то будет происходить квазистационарная перестройка структуры разрыва, связанная со сменой ИК, представляющих структуру, без изменения положения точек A и B . Если приходящие возмущения не меняются со временем, то их накопление внутри структуры приведет к монотонному смещению ИК в какую-либо сторону до тех пор, пока она не наткнется на особую точку C , так что ИК, $A \rightarrow B$ распадется на две части $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$, соответствующие разрывам, имеющим одинаковые скорости. При дальнейшем действии приходящих возмущений эти разрывы приобретут различные скорости. Необходимое для распада неэволюционной волны "количество" пришедших возмущений тем меньше, чем меньше ширина переходной зоны структуры разрыва, т.е. чем меньше диссипативные коэффициенты. Если диссипативные коэффициенты устремить к нулю, то для распада неэволюционного разрыва достаточно действия сколь угодно малых возмущений (что и обеспечивает его неэволюционность).

4. Некоторые применения критерия, полученного в разд. 2. Рассмотрим задачу о внезапном изменении нагрузки на границе упругого анизотропного полупространства (задача "о поршне"). Для нелинейных упругих волн слабой интенсивности имеется полное решение этой задачи [4], которое обнаруживает в некоторых случаях неединственность. Это позволяет проиллюстрировать действие полученного выше критерия в случае квазипоперечных волн малой амплитуды и перенести результаты на задачи с волнами конечной амплитуды.

Рассмотрение ведется в лагранжевых переменных, соответствующих декартовым координатам начального состояния [10]. Ось $x = x_3$ ортогональна границе полупространства $x > 0$, заполненного упругой средой, где ищется решение. Оси x_1, x_2 параллельны плоскости фронта волны. Деформация характеризуется градиентами переме-

щения $\partial w_i / \partial x_k$, из которых в рассматриваемых плоских волнах меняются только $\partial w_i / \partial x = u_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$).

Среда задается своим упругим потенциалом (внутренней энергией, отнесенной к единице объема среды до деформации) $\Phi(u_i, S)$, где S – энтропия. Считая нелинейность и анизотропию малыми и учитывая главные члены, ответственные за эти эффекты, функцию Φ представим разложением по u_i и ΔS . Если рассматривать только квазипоперечные волны, то можно ввести некоторую эффективную несжимаемую среду, в которой u_3 не меняется, а изменение u_1 и u_2 происходит так же, как в квазипоперечных волнах в исходной среде [4]. Для этой эффективной среды упомянутое разложение функции Φ имеет вид

$$\Phi = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\kappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0(S - S_0) \quad (4.1)$$

Здесь f, g, κ – постоянные коэффициенты. Первое слагаемое дает упругий потенциал линейной изотропной среды, и коэффициент f мало отличается от модуля сдвига. Второе слагаемое выражает анизотропию среды в плоскости фронта (волновая анизотропия), коэффициент g всегда можно считать положительным, причем считается $g \ll f$, что предполагает малость анизотропии. Нелинейность среды представлена членом с коэффициентом κ , который может быть положительным и отрицательным в зависимости от направления выпуклости графика функции напряжения от деформаций. Знак κ положительный, когда график имеет выпуклость вверх, и отрицательный, когда выпуклость вниз.

Система уравнений теории упругости в принятом приближении имеет вид

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right), \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}, \quad v_\alpha = \frac{\partial w_\alpha}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.2)$$

и обладает двумя парами характеристических скоростей $\pm c_1, \pm c_2$ соответствующих квазипоперечным волнам. Будем рассматривать только волны, идущие в полупространство $x > 0$, заполненное средой, и примем $c_1(u_\alpha) \leq c_2(u_\alpha)$.

Законы сохранения на разрыве имеют вид

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} \right] = W^2 [u_\alpha], \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.3)$$

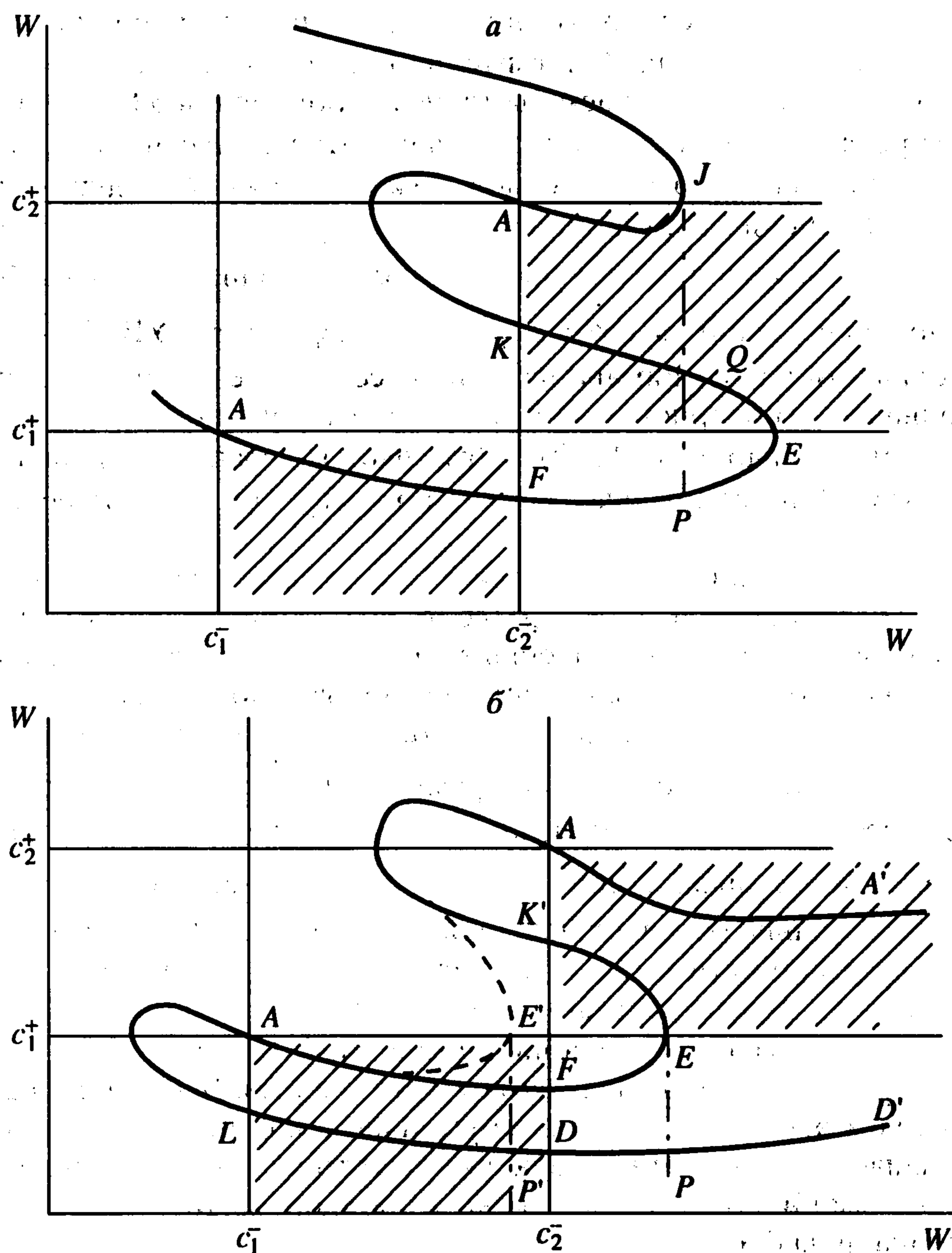
Они позволяют для ударных волн (УВ) исключением скорости скачка W при заданных $u_\alpha^- = U_\alpha$ получить ударную адиабату – кривую на фазовой плоскости (u_1, u_2) с самопересечением в начальной точке $A(U_\alpha)$. Из тех же соотношений (4.3) можно найти скорость скачка W вдоль ударной адиабаты и сформулировать условия эволюционности (1.3)

а) $c_1^- \leq W \leq c_2^-$, $0 < W \leq c_1^+$ – медленные УВ

б) $c_2^- \leq W$, $c_1^+ \leq W \leq c_2^+$ – быстрые УВ

Эти неравенства выделяют на ударной адиабате эволюционные отрезки, которые изображаются на диаграмме фиг. 4 участками, попавшими в заштрихованные прямоугольники. Форма ударной адиабаты и конфигурация эволюционных отрезков как на фазовой плоскости (u_1, u_2) , так и на диаграмме зависят от отношений $g / (\kappa(U_1^2 + U_2^2))$ и U_1/U_2 , заданных постановкой задачи.

Рассмотрим сначала среды с $\kappa > 0$. Один из возможных вариантов расположения ударной адиабаты на диаграмме эволюционности изображен на фиг. 4, а. Над неэволюционным участком FP ударной адиабаты (A) в верхнем эволюционном прямо-



Фиг. 4

угольнике имеется два отрезка, соответствующие двум быстрым эволюционным УВ. В окрестности дуги FP на плоскости (u_1, u_2) решение автомодельной задачи можно построить с использованием каждой из указанных быстрых УВ и следующей за ней медленной УВ. Прямое решение этой задачи показывает, что одно из решений (решение I) состоит из быстрой УВ, выходящей из точки A в состояние M_1 на отрезке KE , и затем медленной УВ с ударной адиабатой (M_1). Это решение на плоскости (u_1, u_2) действует в области, прилежащей к дуге FP сверху (фиг. 5, a). На самой дуге FP обе УВ, быстрая и медленная, имеют одинаковые скорости и в автомодельном решении сливаются в один неэволюционный скачок. По другую сторону от дуги FP на плоскости (u_1, u_2) действует другое решение (решение II), состоящее из последовательности быстрой УВ $A \rightarrow M_2$ (точка M_2 лежит на эволюционном участке AJ ударной адиабаты (A)) и затем медленной УВ из состояния M_2 . На самой дуге FP в этом решении скорости быстрой и медленной УВ волн также совпадают. Таким образом, области существования решений I и II граничат по дуге FP , так что для всей окрестности дуги FP имеется однозначное решение.

Над неэволюционным отрезком PE в верхнем заштрихованном прямоугольнике на фиг. 4, a имеется только один эволюционный отрезок QE ударной адиабаты (A). Предложенный в данной работе критерий указывает на то, что в этой области

в окрестности дуги PE обязательно появится неединственность (или несуществование) решения автомодельной задачи. Действительно, явное решение, построенное ранее [4], показывает, что с использованием быстрой эволюционной УВ $A \rightarrow M_1$ можно, как и прежде, построить решение I в области выше отрезка PE на фазовой плоскости (u_1, u_2) (фиг. 5, а) и вплоть до точек самой дуги PE . Ниже этой дуги решение имеет другое строение (решение II). Оно содержит быструю УВ Жуге (по состоянию за скачком, $W = c_2^+$) $A \rightarrow J$, за ней идет быстрая волна Римана, еще одна быстрая Жуге (по состоянию перед скачком, $W = c_2^-$), затем медленная УВ. Из-за включения в последовательность волны Римана начальное состояние для замыкающей медленной УВ не принадлежит ударной адиабате (A), а потому и конечное состояние никак не связано с ударной адиабатой (A). Это объясняет тот факт, что решение II продолжается через дугу PE на некоторую область по другую сторону от нее, где уже есть решение I.

Область неединственности на плоскости (u_1, u_2) ограничена отрезками PE ударной адиабаты (A) и QP ударной адиабаты (Q) (состояние Q определено условием $W_Q = W_J$) и далее интегральными кривыми медленных волн Римана (заштрихована на фиг. 5, а).

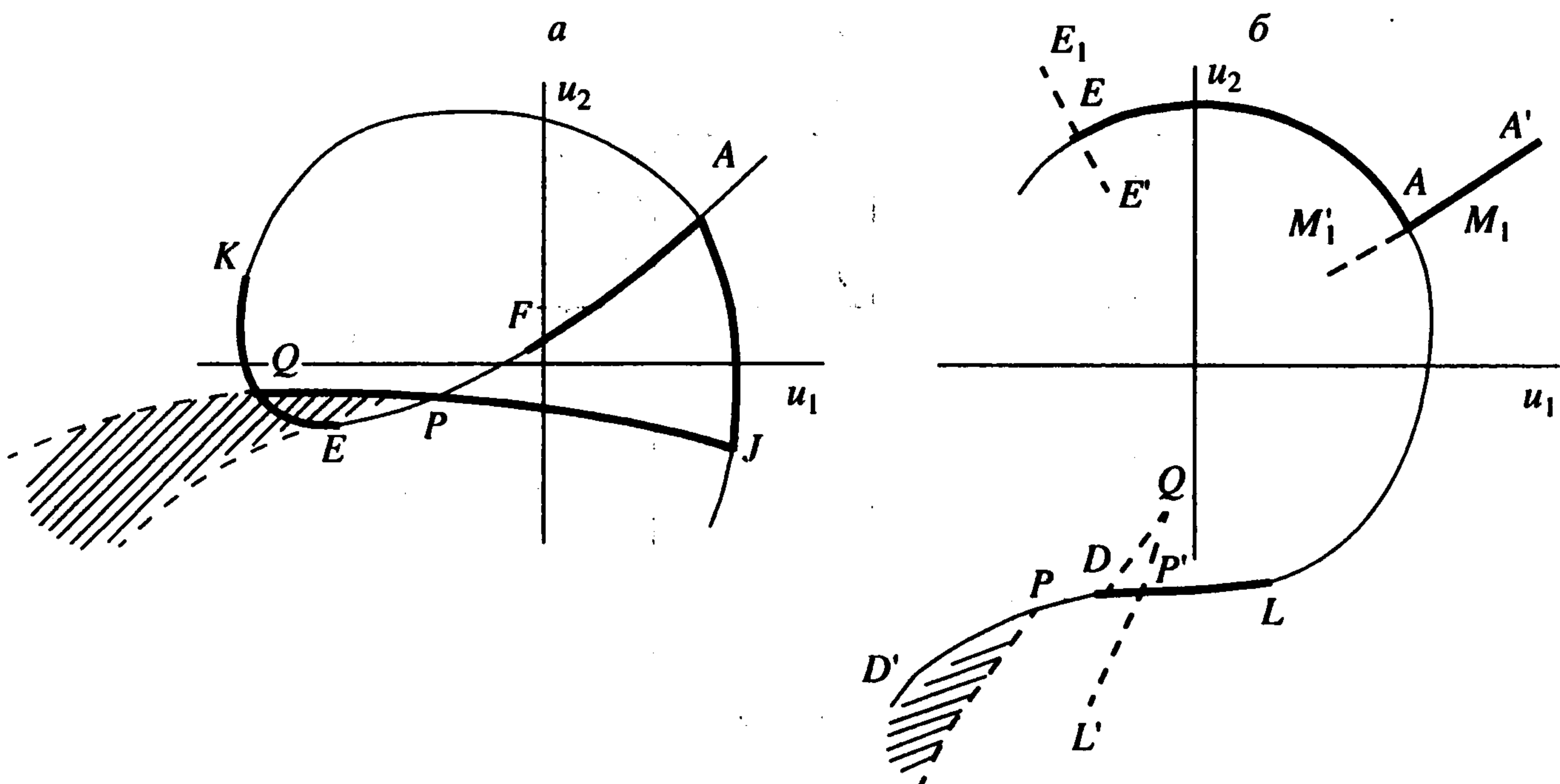
Как и было указано в разд. 2, в область неединственности попала при этом часть эволюционного отрезка ударной адиабаты QE , примыкающая к неэволюционному отрезку в точке Жуге E ($W_E = c_1^+$). Из диаграммы фиг. 4, а видно, что область неединственности существует только тогда, когда точка E лежит правее точки J . Такое положение точек Жуге бывает при $g \ll |\kappa|(U_1^2 + U_2^2)$, т.е. когда мала анизотропия либо начальное состояние обладает большой деформацией. При этом имеется интервал скоростей, в котором существуют неэволюционные {1} разрывы и одна быстрая эволюционная волна УВ, распространяющаяся с той же скоростью W .

Для сред с $\kappa < 0$ диаграмма эволюционности изображена на фиг. 4, б. Неэволюционные {1} разрывы представлены двумя участками FE и DD' ударной адиабаты (A). В заштрихованном эволюционном прямоугольнике над ними имеются участки KE AA' ударной адиабаты (A), соответствующие двум типам эволюционных быстрых УВ с теми же скоростями W , что у названных неэволюционных (соответствующие точкам на общей вертикали на фиг. 4).

Согласно предложенному критерию, наличие неэволюционного отрезка FE не должно приводить к появлению неоднозначности. То же самое можно сказать и о дуге DP нижней ветви ударной адиабаты (A). А вот правее точки P для неэволюционного участка PD' нижней ветви в верхнем прямоугольнике имеется только одна эволюционная быстрая УВ с такой же скоростью W . Это значит, что на плоскости (u_1, u_2) в окрестности дуги PD' обязательно появится область неоднозначности.

Действительно, в отличие от случая $\kappa > 0$, для сред с $\kappa < 0$ имеются для заданного значения W две эволюционные медленные УВ, каждая из которых может пристраиваться вслед за каждой из быстрых УВ, создавая таким образом две пары разных решений, которые на плоскости (u_1, u_2) действуют в окрестностях неэволюционных отрезков FE и DD' ударной адиабаты (A) по разные стороны от каждого из этих отрезков. Когда скорости быстрой и медленной УВ в каждой из пар совпадают, в результате слияния получаются соответственно два неэволюционных скачка – один в состоянии FE , другой – в PD .

Когда скорость УВ W становится больше W_E , остается только одна эволюционная быстрая УВ. За ней может пристроиться тоже только одна из медленных УВ. Для этой УВ определены состояния перед и за ней. Состояние впереди – это состояние за быстрой УВ с заданной скоростью W , а состояние позади – состояние за неэволюционной УВ, имеющей ту же скорость. Исследование показывает, что медленная УВ по своему типу соответствует точке отрезка LD . Поэтому правее вертикали, проходящей через точку E на фиг. 4, б, возможно построение решения I в виде последовательности двух УВ только по одну сторону от неэволюционного {1} отрезка



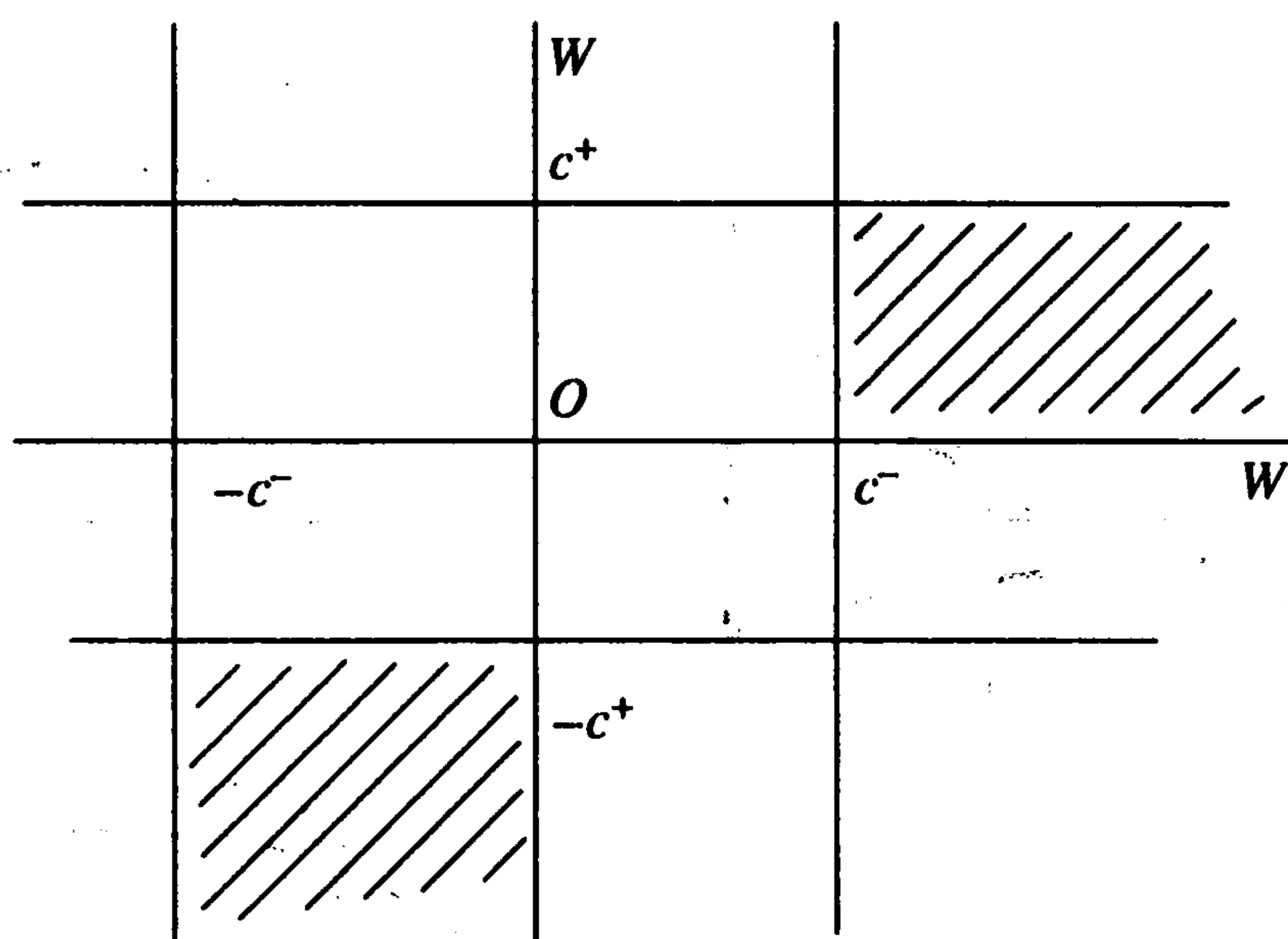
Фиг. 5

ударной адиабаты (A) на плоскости (u_1, u_2) . Непосредственное решение автомодельной задачи показывает, что в решении II вслед за быстрой УВ $A \rightarrow M_1$ идет медленная УВ Жуге в состояние E_1 — точку Жуге ($W = c_1^+$) ударной адиабаты (M_1), за ней медленная волна Римана и затем медленная УВ Жуге, начальное состояние которой не принадлежит ударной адиабате (A), поскольку эти волны движутся с разными скоростями. Область действия этого решения не ограничена дугой PD' . Оказалось [4], что на плоскости (u_1, u_2) решение II действует по обе стороны дуги PD' , образуя тем самым область неединственности, что находится в соответствии с полученным критерием. Эта область ограничена с одной стороны неэволюционной ветвью PD' ударной адиабаты (A), с другой — точками Жуге медленных УВ ($W = c_1^-$), идущих по состояниям EE_1 (заштрихована на фиг. 5, б).

Когда точка Жуге E , где $W_E = c_1^+$, на диаграмме лежит левее вертикали $W = c_2^-$, в область существования решения II, очевидно, по непрерывности попадает и часть эволюционного участка ударной адиабаты (A) слева от точки D . Диаграмма эволюционности для такой ситуации изображена на фиг. 4, б штриховой линией. Было показано [4], что область неединственности простирается вдоль ударной адиабаты до точки P' , где $W = W_E$. В указанной области оба решения I и II на плоскости (u_1, u_2) состоят из тех же последовательностей волн, но первой вместо УВ $A \rightarrow M_1$ идет быстрая волна Римана в состояние M'_1 . Область действия решения II расположена по обе стороны дуги $P'D$, создавая неединственность. Область неединственности на плоскости (u_1, u_2) для этого случая ограничена участком DD' ударной адиабаты (A) и линиями, состоящими из точек Жуге по состоянию перед УВ для скачков из начальных состояний AM'_1 и EE'_1 . Эволюционным УВ, соответствующим отрезку $P'D$, законы сохранения не запрещают распасться на систему волн решения II.

Для сред с $\kappa < 0$ всегда есть неединственность решения автомодельной задачи, но расположение области неединственности на плоскости (u_1, u_2) приближается к началу координат с ростом анизотропии (или, что равносильно, с уменьшением начальной деформации U_i).

Очевидно, что качественная картина расположения ударных адиабат на диаграмме эволюционности может сохранять свой вид вместе с выводами о неединственности решения и для волн конечной амплитуды, для которых соответствующего исследования поведения решений в фазовом пространстве u_i не проведено, однако возможно применение критерия, изложенного в разд. 2.



Фиг. 6

Отметим, что для эффективного применения предложенного критерия к сплошной среде эта среда должна допускать распространение по крайней мере двух типов возмущений в одну сторону. Критерий не применим, когда в каждую сторону по среде идет по одному семейству характеристик. Диаграмма эволюционности для этого случая изображена на фиг. 6. Прямоугольники, соответствующие эволюционным разрывам, заштрихованы. Неэволюционные {1} разрывы, которым соответствует прямоугольник $W \geq c^-, c^+ \leq W \leq 0$, очевидно, не существует, поскольку на диаграмме физический смысл имеют только первый и третий квадранты. Условия неединственности для задач газовой динамики и для продольных волн нелинейной теории упругости, когда в каждую сторону идет по одному семейству характеристик, были получены ранее [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01150, 99-01-01153).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws. II // *Communs. Pure Appl. Math.* 1957. V. 10. № 4. P. 537–566.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Ахизер А.И., Любарский Г.Я., Половин Р.В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике // *ЖЭТФ*. 1958. Т. 35. № 3. С. 731–737.
4. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
5. Чугайнова А.П. О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // *ПММ*. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692–697.
6. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1998. Т. 38. № 2. С. 315–323.
7. Куликовский А.Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике // *ПММ*. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1125–1131.
8. Куликовский А.Г. Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // *Тр. МИАН СССР*. 1988. Т. 182. С. 261–291.
9. Wu C.C. Formation, structure and stability of MHD intermediate shocks // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95. № A6. P. 8149–8175.
10. Bland D.R. *Nonlinear Dynamic Elasticity*. L.: Waltham, 1969. = Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
11. Галин Г.Я. О распространении возмущений в средах с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций и температуры // *Докл. АН СССР*. 1958. Т. 120. № 4. С. 730–733.

Москва

Поступила в редакцию
1.XII.2000