УДК 532.546

© 2001 г. Н.М. Дмитриев, В.М. Максимов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

В инвариантном тензорном виде выписаны нелинейные законы фильтрации в анизотропных пористых средах для всех кристаллографических точечных групп симметрии. Уравнения, как это принято в теории фильтрации [1, 2], представляются выражениями, содержащими скорость фильтрации до третьей степени включительно. Даны выражения, определяющие нелинейные фильтрационные сопротивления, и показано, что при переходе от линейных законов фильтрации к нелинейным возможно изменение группы симметрии фильтрационных свойств. Например, изотропные фильтрационные свойства, проявляемые в законе Дарси, в нелинейном законе фильтрации могут быть существенно анизотропными и проявлять асимметрию, т.е. быть различными вдоль одной прямой в положительном и отрицательном направлениях. Показано, что по сравнению с линейными законами фильтрации для анизотропных сред, когда для задания фильтрационных свойств достаточно лишь четырех принципиально различных типов уравнений, в нелинейных законах проявление анизотропии существенно разнообразнее и значительно возрастает число различных типов уравнений.

Из экспериментальных данных известно, что диапазон скоростей жидкости, в котором справедлив линейный закон фильтрации – закон Дарси, связывающий векторные поля скорости фильтрации и градиента фильтрационного давления, ограничен сверху и снизу [3, 4]. Верхняя граница применимости закона Дарси обусловлена проявлением инерционных сил при больших скоростях фильтрации, а нижняя – физико-химическими эффектами взаимодействия жидкости с пористой средой и неньютоновскими реологическими свойствами жидкости [5, 6]. Однако до настоящего времени при построении нелинейных законов фильтрации рассматривались, как правило, лишь изотропные пористые среды. В то же время хорошо известно, что реальные грунты и коллекторы углеводородного сырья обладают анизотропией [4–6]. Поэтому ниже рассмотрены варианты построения нелинейных законов фильтрации для анизотропных пористых сред с заданной точечной группой симметрии и они выписаны в инвариантном виде для всех классов кристаллографической симметрии.

1. Основные положения и формулы. Макроскопическое описание фильтрационных течений основывается на допущении существования эффективных векторных полей скорости фильтрации (вектора с компонентами w_i) и градиента фильтрационного давления (вектора с компонентами $\nabla_i p$) и наличия связи между ними

$$\nabla_i p = f_i(w_i, \rho, \mu, \chi_\alpha, T_\alpha) \qquad (1.1)$$

где ρ – плотность жидкости, μ – ее динамический коэффициент вязкости, χ_α – инвариантные скалярные параметры, характеризующие пористую среду и, возможно, жидкость, T_α – материальные тензоры, определяющие и задающие симметрию фильтрационного сопротивления.

В теории фильтрации вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в недеформируемой пористой среде считается, что свойства жидкости определяются лишь коэффициентом вязкости μ [2–5], поэтому в дальнейшем будем считать, что симметрия материальных тензоров T_α в равенстве (1.1) определяется и задается симметрией порового пространства. Предположение о линейности зависимости (1.1) приводит к закону Дарси. Обобщение закона фильтрации в рамках предположения (1.1) подразумевает разложение в ряд Тейлора по степеням w_i функции f_i

$$\nabla_i p = -r_{ij} w_j - r_{ijm} w_j w_m - r_{ijmn} w_j w_m w_n \qquad (1.2)$$

Материальные тензоры $\|r_{ij}\|$, $\|r_{ijm}\|$, $\|r_{ijmn}\|$, задающие нелинейные фильтрационные свойства, должны быть инвариантны относительно точечной группы симметрии порового пространства, которая считается заданной при решении прямых задач или должна быть определена при решении обратных задач. Поэтому учет квадратичного, кубичного и более высоких степеней приближений требует построения (или определения) соответствующих тензоров.

При помощи полученных ранее результатов представление (1.2) для всех точечных групп симметрии текстур и кристаллов может быть выписано с точностью до кубических членов разложения [7], а для групп симметрии текстур – с точностью до членов пятого порядка [8]. Однако подобное представление чрезвычайно громоздко и является лишь аппроксимацией функциональной зависимости (1.1). В то же время известно, что для изотропных тензорных функций благодаря наличию связей между инвариантами общий вид нелинейной связи может быть представлен компактной формулой, в которой вместо постоянных фигурируют функции от инвариантов [9]. Например, для тензоров второго ранга подобное представление задается формулой Гамильтона–Кэли. Была решена [10] задача построения обобщенных формул Гамильтона–Кэли, описывающих зависимости вектора от вектора для групп симметрии текстур. Получен [11] общий вид векторных потенциалов и функций, совместимых с симметрией кристаллов; однако приведенные соотношения задают потенциалы и нелинейные функции векторного аргумента только в декартовой системе координат и поэтому не обладают общностью представления, которая была получена для групп симметрии текстур. С другой стороны, выписанные соотношения часто содержат аргументы четвертой и более высоких степеней, т.е. предполагается точность, которая при решении прикладных задач подземной гидромеханики, не приводя к качественным и количественным изменениям результата, лишь существенно усложняет его поиски. Как уже отмечалось, в теории фильтрации для представления нелинейных законов для изотропных пористых сред используются уравнения, содержащие, как правило, вторую степень скорости фильтрации и реже третью. Поэтому, сохранив в представлениях векторных функций [11] выражения, содержащие векторный аргумент только до третьей степени, и используя системы определяющих параметров, характеризующих геометрические свойства анизотропных сред [7], получим нелинейные определяющие уравнения теории фильтрации для групп симметрии кристаллов в инвариантном тензорном виде.

Для иллюстрации преобразований, выполняемых при переходе от представления нелинейной тензорной связи в декартовой системе координат к инвариантной тензорной форме, рассмотрим два простейших примера для групп симметрии куба (кубической сингонии) $6/4$ и $3/4$ (обозначение групп симметрии дано по А.В. Шубникову).

Группа симметрии $3/4$ определяется [11] главными инвариантами вида $w_i w_i$, $w_1 w_2 w_3$, $w_1^4 + w_2^4 + w_3^4$, а нелинейная векторная функция задается формулой

$$\operatorname{grad} p = -f_1(w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3) - f_2(w_2 w_3\mathbf{e}_1 + w_3 w_1\mathbf{e}_2 + w_1 w_2\mathbf{e}_3) - \qquad (1.3)$$
$$-f_3(w_1^3\mathbf{e}_1 + w_2^3\mathbf{e}_2 + w_3^3\mathbf{e}_3)$$

где f_i – произвольные функции от главных инвариантов. В качестве простых тензоров, определяющих и задающих геометрические свойства группы симметрии $3/4$, были использованы тензоры [7]

$$\mathbf{g} = \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^2, \quad T_d = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{O}_h = \mathbf{e}_1^4 + \mathbf{e}_2^4 + \mathbf{e}_3^4$$

в которых, как и в (1.3), $\mathbf{e}_i$ – орты кристаллофизического декартова базиса; степени базисных векторов и сами выражения понимаются как диадные и полиадные произведения; здесь и далее для всех простых (базисных) тензоров используются обозначения, предложенные ранее [7].

Выражение (1.3) при использовании базисных тензоров $\mathbf{g}$, $\mathbf{T}_d$, $\mathbf{O}_h$ может быть переписано в виде

$$\nabla_i p = -f_1 w_1 - f_2 T_{(d)ijk} w_j w_k - f_3 O_{(h)ijkl} w_j w_k w_l \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) в отличие от равенства (1.3) представляет нелинейный закон фильтрации в инвариантном тензорном виде и может быть записано в любой системе координат. Заметим, что такой же закон фильтрации получается и для группы симметрии $\frac{2}{3}$ кубической сингонии.

Группа симметрии $\frac{6}{4}$ определяется главными векторными инвариантами

$$w_i w_i, \quad w_1 w_2 + w_3 w_1 + w_2 w_3, \quad w_1^2 w_2^2 w_3^2$$

а нелинейная векторная функция задается равенством

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} p = -f_1(w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3) - f_2(w_1^3\mathbf{e}_1 + w_2^3\mathbf{e}_2 + w_3^3\mathbf{e}_3) - \\ -f_3 w_1 w_2 w_3 (w_2 w_3 \mathbf{e}_1 + w_1 w_3 \mathbf{e}_2 + w_1 w_2 \mathbf{e}_3)\end{gathered} \tag{1.5}$$

где f_i – произвольные функции от главных инвариантов. В качестве простых тензоров, определяющих и задающих геометрические свойства группы симметрии $\frac{6}{4}$, были использованы [7] тензоры $\mathbf{g}$, $\mathbf{T}_d$, $\mathbf{O}_h$. При помощи простых (базисных) тензоров выражение (1.5) можно переписать в виде

$$\nabla_i p = -f_1 w_i - f_2 O_{(h)ijkl} w_j w_k w_l - f_3 T_{(d)ijk} T_{(d)lmn} w_j w_k w_l w_m w_n \tag{1.6}$$

или, пренебрегая последним слагаемым,

$$\nabla_i p = -f_1 w_i - f_2 O_{(h)ijkl} w_j w_k w_l \tag{1.7}$$

Определяющие уравнения для групп симметрии $\frac{6}{2}$ и $\frac{3}{4}$ кубической сингонии с точностью до третьей степени скорости фильтрации также имеют вид (1.7).

Путем аналогичных рассуждений могут быть получены инвариантные тензорные формы представления нелинейных законов фильтрации и для остальных групп симметрии кристаллов. Поэтому, опустив подробности, приведем явный вид определяющих соотношений для остальных групп симметрии. Соответствующая группа симметрии указана ниже в фигурных скобках; $\nabla_i p(\mathrm{m} \cdot 4 : \mathrm{m})$ означает правую часть соотношения для группы симметрии $m \cdot 4 : m$ и т.п.

Тетрагональная сингония

$$\nabla_i p = -f_1 w_i - f_2 B_{ij} w_j - f_3 O_{(h)ijkl} w_j w_k w_l \qquad \{\mathrm{m}\cdot 4 : \mathrm{m}, 4 : 2\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(\mathrm{m}\cdot 4 : \mathrm{m}) - f_4 T_{(d)ijk} w_j w_k \qquad \{\bar{4}\cdot \mathrm{m}\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(\mathrm{m}\cdot 4 : \mathrm{m}) - f_4 O_{(h)ijkl} \Omega_{lm} w_j w_k w_m \qquad \{4 : \mathrm{m}\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(4 : \mathrm{m}) - f_5 B_{ij} T_{(d)jkl} w_k w_l \qquad \{\bar{4}\}$$

$$\nabla_i p = -f_1 b_i - f_2 w_1 - f_3 O_{(h)ijkl} w_j w_k w_l \qquad \{4\cdot \mathrm{m}\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(4\cdot \mathrm{m}) - f_4 O_{(h)ijkl} \Omega_{lm} w_j w_k w_m \qquad \{4\}$$

Тригональная и гексагональная сингонии

$$\nabla_i p = -f_1 w_i - f_2 B_{ij} w_j \qquad \{m\cdot 6:m, 6:m, 6:2, \bar{6}\cdot m\}$$

$$\nabla_i p = -f_1 b_i - f_2 g_{ij} w_j \qquad \{6, 6\cdot m\}$$

$$\nabla_i p = -f_1 w_j - f_2 B_{ij} w_j - f_3 D_{(3h)ijk} w_j w_k \qquad \{m\cdot 3:m, 3:2\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(m\cdot 3:m) - f_4 D_{(3h)ijk} \Omega_{kl} w_j w_l \qquad \{3:m\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(m\cdot 6:m) - f_3 D_{(3d)ijkl} w_j w_k w_l \qquad \{\bar{6}\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(6\cdot m) - f_3 D_{(3h)ijk} \Omega_{kl} w_j w_l \qquad \{3\cdot m\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(3\cdot m) - f_4 D_{(3h)ijk} w_j w_k - f_5 b_i D_{(3h)jkl} w_j w_k w_l \qquad \{3\}$$

Отметим, что формулы для групп симметрии m · 6 : m, 6 : m, 6 : 2, $\bar{6}\cdot$m тетрагональной и гексагональной сингоний описываются нелинейными законами фильтрации, совпадающими с законами фильтрации для текстур, имеющих симметрию цилиндра, а группы симметрии 6 и 6 · m описываются нелинейными законами фильтрации, совпадающими с законами фильтрации для текстур, имеющих симметрию конуса.

Ромбическая сингония

$$\nabla_i p = -f_1 w_1 - f_2 D_{(2h)ij} w_j - f_3 M_{ij} w_j \qquad (m\cdot 2:m\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(m\cdot 2:m) - f_4 D_{(2h)ij} E_{ljm} M_{mk} w_j w_k \qquad \{2:2\}$$

$$\nabla_i p = -f_1 b_i - f_2 D_{(2h)ij} w_j - f_3 M_{ij} w_j \qquad \{2\cdot m\}$$

Моноклинная сингония

$$\nabla_i p = \nabla_i p(2\cdot m) - f_4 \Omega_{ik} D_{(2h)kj} w_j - f_5 \Omega_{ik} D_{(2h)kj} b_l w_j w_l \qquad \{2\}$$

$$\nabla_i p = -f_1 a_i - f_2 c_i - f_3 D_{(2h)ij} w_i \qquad \{m\}$$

$$\nabla_i p = \nabla_i p(m\cdot 2:m) - f_4 \Omega_{ik} D_{(2h)kl} w_l - f_5 D_{(2h)ij} \Omega_{km} D_{(2h)ml} w_j w_k w_l \qquad \{2:m\}$$

Триклинная сингония

$$\nabla_i p = \nabla_i p(2:m) - f_6 \omega_{ik}^{(3)} D_{(2h)kj} w_j - f_7 \omega_{ik}^{(2)} D_{(2h)kj} w_j -$$

$$- f_8 D_{(2h)ij} \omega_{km}^{(2)} D_{(2h)ml} w_j w_k w_l - f_9 D_{(2h)ij} \omega_{km}^{(3)} D_{(2h)ml} w_j w_k w_l \qquad \{\bar{2}\}$$

$$\nabla_i p = -f_1 a_i - f_2 c_i - f_3 b_i \qquad \{1\}$$

Для упрощения записи законы фильтрации выписаны в декартовой системе координат, также не обозначена операция симметрирования, поэтому считается, что все тензоры симметричны по всем индексам. В общем случае последнее означает, что множитель при f_i равен сумме тензоров, которые получаются при перестановке индексов в операции симметрирования.

2. Определение фильтрационных свойств. Анизотропные фильтрационные свойства вдоль направления, задаваемого ортом с компонентами n_i, определяются соотношениями вида [1]

$$k(n) = -w_i n_i / \nabla p \quad \text{или} \quad r(n) = -\nabla_i p n_i / w \qquad (2.1)$$

где w и ∇p – модули векторов скорости фильтрации и градиента фильтрационного давления соответственно. В первом равенстве (2.1) определяется значение коэффициента фильтрации, когда направление орта с компонентами n_i совпадает с направлением вектора градиента фильтрационного давления, во втором равенстве определяется значение фильтрационного сопротивления, когда направление орта совпадает с направлением скорости фильтрации. Подстановка выписанных нелинейных законов фильтрации во второе соотношение (2.1) даст явный вид фильтрационного сопротивления для всех групп симметрии текстур и кристаллов.

В качестве примера рассмотрим только соотношения (1.4) и (1.7) для групп симметрии кубической сингонии.

Подстановка нелинейного закона фильтрации (1.4) в равенство (2.1) приводит к следующему выражению для фильтрационного сопротивления:

$$r(n) = f_1 + 3f_2 n_1 n_2 n_3 w + f_3(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)w^2 \tag{2.2}$$

где n_i – компоненты орта, определенные в кристаллофизической системе координат.

Для нелинейных определяющих уравнений (1.7) выражение для фильтрационного сопротивления определяется равенством

$$r(n) = f_1 + f_2(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)w^2 \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2) и (2.3) различаются лишь слагаемым, содержащим скорость фильтрации в первой степени. Однако наличие именно этого слагаемого в равенстве (2.2) приводит к тому, что фильтрационное сопротивление для групп симметрии $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$ обладает асимметрией фильтрационных свойств, т.е. при изменении направления течения на противоположное значение фильтрационного сопротивления в "прямом" и "обратном" направлениях не равны. Эффект асимметрии наблюдается для всех направлений, в которых $n_1 n_2 n_3 \neq 0$.

Проявление эффекта асимметрии фильтрационных свойств наблюдается для всех групп симметрии, в нелинейных определяющих уравнениях которых фигурируют тензоры нечетных рангов (это группы симметрии $4 \cdot m$, $\bar{4} \cdot m$, $\bar{4}$, 4, $m \cdot 3 : m$, $3 : 2$, $3 : m$, $3 \cdot m$, 3, 6, $6 \cdot m$, $2 : 2$, $2 \cdot m$, 2, m, 1).

Важно отметить, что в рассмотренных в качестве примера кристаллических группах симметрии кубической сингонии фильтрационные свойства в линейных определяющих уравнениях для всех групп симметрии изотропные. Таким образом, при переходе от линейных определяющих уравнений к нелинейным происходит изменение группы симметрии физических свойств.

Изменение группы симметрии фильтрационного сопротивления (проницаемости) может существенно изменить методику проведения экспериментальных исследований и интерпретацию экспериментальных данных. В самом деле, для пористых сред, проявляющих в законе Дарси изотропные фильтрационные свойства, любое направление является главным для тензора коэффициентов фильтрационных сопротивлений (проницаемости). Поэтому при лабораторном определении фильтрационных свойств образец может быть произвольно ориентирован по отношению к кристаллофизической системе координат, и тем не менее получаемые в результате измерений характеристики могут быть обработаны по стандартной методике и дадут значение коэффициента абсолютной проницаемости (фильтрационного сопротивления).

Однако если при переходе к описанию нелинейных свойств среда проявляет анизотропию, то выбранное направление может оказаться не "главным" (в смысле параллельности векторов $\nabla_i p$ и w_i) и тогда измеряемые характеристики, обработанные по стандартной методике, дадут "эффективную проницаемость" и будут зависеть от отношения диаметра образца к его длине [13]. В самом деле, если фильтрационное течение направлено не вдоль главного направления, то измеряемый расход зависит от соотношения между длиной и диаметром образца. При этом "эффективная проницаемость" изменяется от значения направленной проницаемости (для тонкой пластины) до значения, обратного направленному фильтрационному сопротивлению (для длинного стержня) [13]. Именно такой эксперимент был описан [14], но из-за того что среда и при описании нелиейных свойств считалась изотропной, эффект не получил своего обоснования. В частности, для групп симметрии кубической сингонии "главными" направлениями в нелинейных определяющих уравнениях являются направления кристаллофизических координатных осей – направления ребер куба, изображающего элементарную ячейку кристалла [15], и направления, совпадающие с направлениями диагоналей куба.

Аналогичные эффекты, связанные с изменением симметрии фильтрационного сопротивления (проницаемости) при переходе от линейных определяющих уравнений к нелинейным, наблюдаются и для групп симметрии кристаллов тетрагональной, гексагональной и тригональной сингоний. В случае линейных определяющих уравнений фильтрационные свойства всех перечисленных групп симметрии кристаллов совпадают с фильтрационными свойствами анизотропных текстур. Фильтрационные свойства анизотропных текстур характеризуются наличием плоскости изотропии фильтрационных свойств (из-за чего они часто называются трансверсально-изотропными). При переходе от линейных определяющих уравнений к нелинейным все группы симметрии кристаллов тетрагональной сингонии имеют определяющие уравнения, отличные от уравнений для анизотропных текстур. При этом ни в одной из групп симметрии не сохранится плоскость изотропии фильтрационных свойств. Снова, как и для групп симметрии кубической сингонии, "главными" направлениями останутся направления осей кристаллофизической системы координат.

Половина групп симметрии гексагональной и тригональной сингоний обладают нелинейными определяющими уравнениями, аналогичными уравнениям анизотропных текстур ($m \cdot 6 : m$, $6 : m$, $6 : 2$, $\bar{6} : m$ – текстуры симметрии цилиндра, 6, $m \cdot 6$ – текстуры симметрии конуса). Другая половина групп симметрии обладает нелинейными определяющими уравнениями, отличными от уравнений для текстур (группы симметрии $m \cdot 3 : m$, $3 : 2$, $3 : m$, $\bar{6}$, $3 \cdot m$, 3). Следовательно, при лабораторном определении фильтрационных свойств и в этих случаях возможны варианты, при которых будут определены не истинные, а "эффективные" характеристики.

Для групп симметрии ромбической, моноклинной и триклинной сингоний переход от линейных определяющих уравнений к нелинейным приводит к проявлению эффекта асимметрии фильтрационных свойств (группы симметрии $2 : 2$, $2 \cdot m$, 2, m, и 1) и различным определяющим уравнениям (законы Дарси для всех групп каждой из перечисленных сингоний были одинаковы).

В зависимости от структуры грунта (ориентированная, упорядоченная, хаотическая [6]) и типа коллектора (поровый, трещинный и так далее [4, 5]) реальные пористые среды могут обладать разнообразной локальной симметрией пустотного пространства и соответствовать тому или иному типу выписанных соотношений.

3. Представление нелинейных законов фильтрации. Явный вид функций от инвариантов f_i в нелинейных обобщенных законах фильтрации и значения компонент тензоров в разложении (1.2) могут быть определены в результате обработки экспериментальных данных. В предположении, что фильтрационные свойства среды изотропны, известные экспериментальные данные хорошо аппроксимируются выражениями вида [1]

$$\nabla p = aw + bw^2 \quad \text{или} \quad \nabla p = aw + bw^2 + cw^3 \qquad (3.1)$$

первое из которых называется формулой Форхгеймера. Поэтому можно ожидать, что и нелинейные законы фильтрации для анизотропных сред могут быть представлены аналогичными соотношениями, тем более что при проведении экспериментальных измерений почти всегда предположение об изотропии свойств принималось априори, без доказательства этого факта. Тогда в обобщенных представлениях нелинейных законов фильтрации фиксируется класс функций, определяющих и задающих фильтрационные свойства (многочлены, образованные сверткой базисных тензоров с вектором скорости фильтрации) и их порядок. В выписанных представлениях нелинейных фильтрационных законов фигурируют функции от инвариантов, стоящие множителями при базисных тензорах первого, второго, третьего и четвертого рангов (например, fb_i, $fB_{ij}w_j$, $fT_{(d)ijk}w_jw_k$, $fO_{(h)ijkl}w_jw_kw_l$). Согласно принятым допущениям, получаем, что все функции, стоящие множителями при базисных тензорах (или их комбинациях) четвертого ранга, равны константам. Функции, стоящие множителями при материальных тензорах первого ранга (a_i, b_i, c_i) для групп симметрии 4 · m, 4, 6 · m, 6, m, 2 · m, 2 и 1, представляются в виде

$$f = ab_iw_i + b(b_iw_i)^2 + c(b_iw_i)^3 \tag{3.2}$$

где a, b, c – постоянные. Соотношение (3.2) представляет функцию, стоящую множителем при материальном векторе с компонентами b_i. Очевидно, что функции, стоящие множителями при векторах с компонентами a_i, c_i, имеют аналогичный вид.

Представление "изотропного" слагаемого fw_i в нелинейных законах фильтрации может быть задано в виде

$$f = a + bw \tag{3.3}$$

Необходимо отметить следующее. Представление нелинейного закона фильтрации в виде (1.2) не позволяет получить формулу Форхгеймера (3.1) для изотропной пористой среды, так как квадратичное слагаемое в законе обусловлено тензором третьего ранга, который тождественно равен нулю. Однако данное несоответствие экспериментальных результатов с представлением (1.2) легко устраняется при переходе к обобщенным формулам для нелинейных законов фильтрации. В самом деле, обобщенный нелинейный закон фильтрации для изотропных пористых сред имеет вид [11]

$$\nabla_i p = -fw_i, \quad f = f(w^2) \tag{3.4}$$

Поэтому обработка экспериментальных результатов в предположении, что $f = a + bw$, приводит к закону фильтрации Форхгеймера.

Функции, стоящие множителями при тензорах $\|B_{ij}\|$, $\|D_{(2h)ij}\|$, $\|\Omega_{ik}D_{(2h)kj}\|$, могут быть представлены или в виде постоянных, или, по аналогии с изотропным слагаемым, с инерционными "добавками" в виде постоянных, умноженных на инварианты, образованные свертками тензоров с вектором скорости фильтрации. Функции, задающие асимметрию фильтрационных свойств, могут быть заданы в виде постоянных.

Полученные представления для нелинейных законов фильтрации анизотропных сред, имеющих симметрию кристаллов, и проведенный анализ показывают, что изучение нелинейных фильтрационных течений позволяет получить дополнительную информацию о структуре порового пространства.

Авторы благодарят В.В. Лохина за внимание к работе и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (0001-00609).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М., Недра, 1993. 415 с.
2. *Scheidegger A.E.* The Physics of Flow Though Porous Media. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1974. 353 p.
3. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.* Theory of Fluids' Flow Though Natural Rocks. Dortrecht etc.: Kluwer, 1990. 400 p.
4. *Nikolaevskij V.N.* Mechanics of Porous and Fractured Media. Singapore: World Scientific, 1990. 492 p.
5. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жид - кости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
6. *Хейфец Л.И., Неймарк А.В.* Многофазные процессы в пористых средах. М.: Химия, 1982. 319 с.

7. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. № 3. С. 393–417.
8. *Идин М.А.* Анизотропные сплошные среды, энергия и напряжения в которых зависят от градиентов тензора деформаций и других тензорных величин // ПММ. 1966. Т. 30. № 3. С. 531–541.
9. *Гольденблатт И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 335 с.
10. *Сиротин Ю.И.* Тензорные функции полярного и аксиального вектора, совместимые с симметрией текстур // ПММ. 1964. Т. 28. № 4. С. 653–693.
11. *Плешаков В.Ф., Сиротин Ю.И.* Анизотропные векторные функции векторного аргумента // ПММ. 1966. Т. 30. № 2. С. 243–251.
12. *Дмитриев Н.М.* Фильтрационные течения в анизотропных коллекторах. Модели и эффекты // Разработка газоконденсатных месторождений. Докл. Междунар. конф. Краснодар, 1990. 173 с.
13. *Дмитриев Н.М.* К методике определения проницаемости в анизотропных коллекторах углеводородного сырья // Математические методы и ЭВМ в моделировании объектов газовой промышленности. М.: ВНИИгаз, 1991. С. 30–43.
14. *Белов С.В.* Пористые материалы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
15. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.2000