ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 65. Вып. 6, 2001

УДК 532.529.5:621.547

© 2001 г. Н.Н. Короткова, В.М. Шаповалов

# ВОСХОДЯЩЕЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

Дается постановка и решение задачи о стационарной фильтрации в вертикальном пористом цилиндре, когда жидкость поступает снизу. Линеаризация граничных условий на свободной поверхности выполнена методом переноса. Получены выражения для дисперсионной поверхности, компонент скорости и давления. Выполнен численный анализ решения.

Рассматриваемая задача связана с используемым в гидротранспорте суспензий процессом водоотделения.

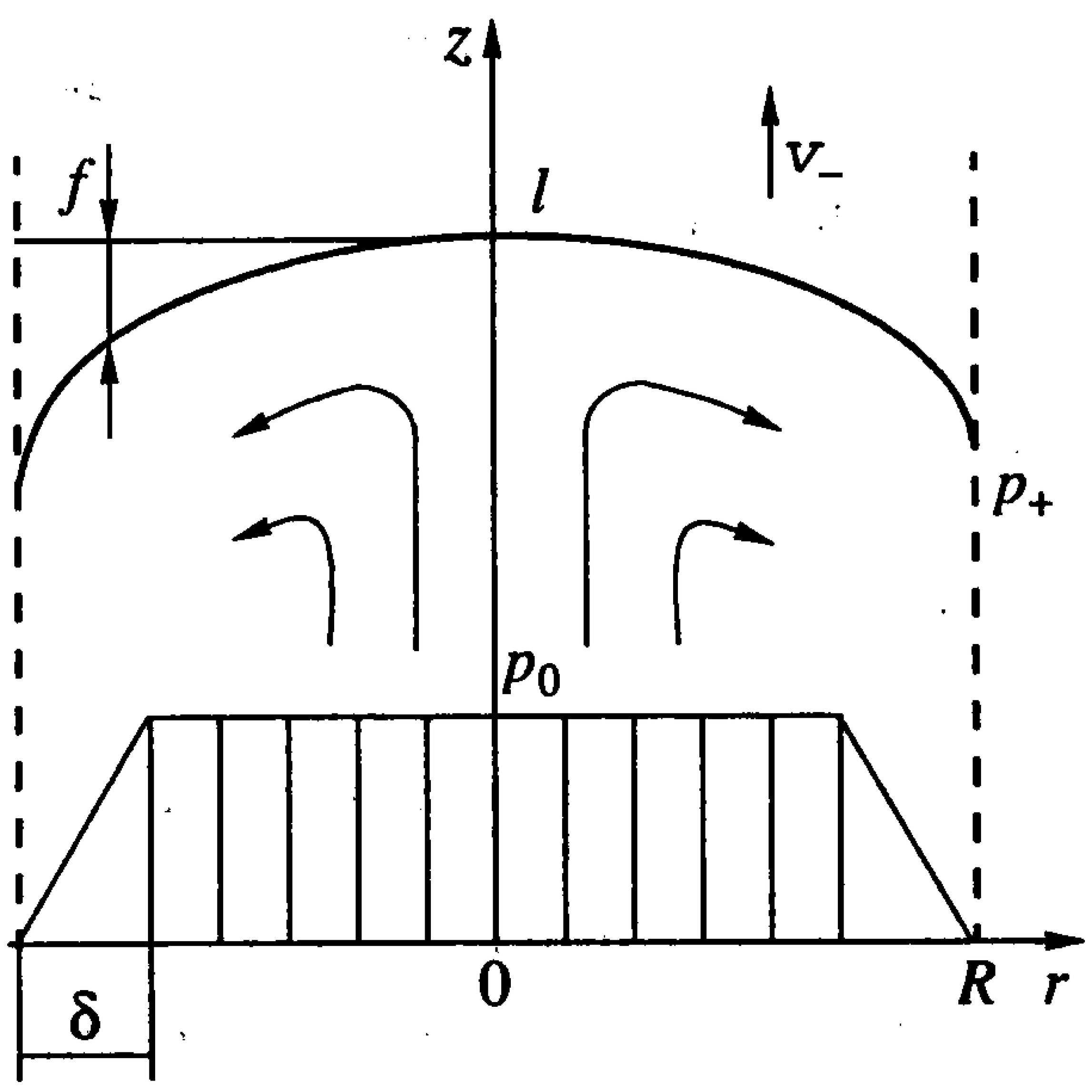
Отметим следующие решения задач фильтрации со свободной поверхностью: решение задач фильтрации с неизвестной границей методом теории функций комплексного переменного для плоских движений в однородных плотинах сравнительно простой конфигурации [1–3]; решение задачи о растекании бугра грунтовых вод произвольной начальной формы методом линеаризации условий на депрессионной поверхности [4]; решение пространственной задачи о растекании бугра, в частности, в форме параллелепипеда [5].

**1. Постановка задачи.** Схема течения и система координат показаны на фиг. 1. Начало цилиндрической системы координат помещено в центре сечения, ось $r$ лежит в плоскости, проходящей через начало перфорированного участка водоотделения, ось $z$ направлена вертикально вверх. Штриховыми линиями показана цилиндрическая сетка участка водоотделения.

Приняты следующие допущения. Жидкость вязкая, несжимаемая. Течение ламинарное, изотермическое. Скорость подъема пористого скелета однородна по сечению и равна $v_-$, т.е. по существу рассматривается пористый стержень. В частности, скелет может быть и неподвижным. Проницаемость однородна по объему. На боковой поверхности высачивания (радиуса $R$) давление атмосферное ($p_+$). Испарение и капиллярные эффекты на свободной поверхности не учитываются.

В сечении $z = 0$ на сетке толщиной $\delta$ имеет место падение давления жидкости от значения на входе участка водоотделения $p_0$ до $p_+$. Примем линейное распределение давления по толщине сетки. Без существенного нарушения картины течения считаем, что указанное падение давления происходит на участке пористого скелета, непосредственно примыкающего к сетке, как показано на фиг. 1. Если же принять ступенчатое изменение давления на сетке ($r = R$, $z = 0$, $\partial p/\partial r \to \infty$), то в точке $z = 0$, $r = R$ будет бесконечная радиальная скорость, что противоречит реальной картине течения. Анализ показал, что поле течения практически не изменяется при варьировании $\delta/R$ от 0.001 до 0.1. Гидравлическое сопротивление сетки на участке высачивания ($z > 0$) не учитывалось. Влияние сетки на фильтрационное движение рассмотрено ранее [6].

Пусть уравнение свободной поверхности $z = l - f(r)$, где $l$ – максимальный подъем жидкости (высота стационарного бугра), $f(r)$ – неизвестная функция ($\sup(f) \ll l$). На депрессионной поверхности давление в жидкости равно атмосферному, кроме того, нормальная составляющая скорости равна нулю.




Фиг. 1

Компоненты скорости фильтрации определяются уравнением Дарси – Герсеванова [7]

$$v_z = -\frac{K}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) + v_-, \quad v_r = -\frac{K}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1.1}$$

При этом уравнение связи между компонентами скорости на свободной поверхности

$$z = l - f(r), \quad v_z + v_r \frac{df}{dr} = 0$$

можно записать так:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + A^* + \frac{df}{dr}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad A^* = \rho g - \frac{\eta v_-}{K}$$

где $\eta$, $\rho$ – вязкость и плотность жидкости, $K$ – коэффициент проницаемости пористого скелета.

Подставив выражения (1.1) в уравнение неразрывности, получим уравнение Лапласа для давления. Поскольку функция $p$ ищется с точностью до произвольной постоянной, можно положить $p_+ = 0$.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\zeta = \frac{z}{R}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad F = \frac{f}{R}, \quad A = \frac{A^* R}{P_0}, \quad L = \frac{l}{R}, \quad \Delta = \frac{\delta}{R}$$

$$M = \frac{A^* \pi R^2 K}{q\eta}$$

где $q$ – расход жидкости, и запишем задачу в безразмерной форме

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \zeta < L - F(\xi) \tag{1.2}$$

$$\zeta = 0: \quad P = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi \leqslant 1 - \Delta \\ (1-\xi)\Delta^{-1}, & 1 - \Delta \leqslant \xi \leqslant 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\xi = 1: \quad P = 0; \quad \xi = 0: \quad P < \infty \tag{1.4}$$

$$\zeta = L - F(\xi): \quad P = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} + A + \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \tag{1.5}$$

$$\xi = L, \quad \xi = 0: \quad F = 0 \tag{1.6}$$

Данная задача является аналогом задачи Дирихле, отличаясь видом граничных условий.

**2. Решение задачи.** Линеаризуем задачу путем переноса граничных условий (1.5) с поверхности $\zeta = L - F(\xi)$ на горизонтальную плоскость $\zeta = L$ при помощи разложения функции $P$ и ее производных в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi = L$ [8]. Подставляя эти разложения в граничные условия (1.5), имеем

$$P(\xi, L) - F\frac{\partial P(\xi, L)}{\partial \zeta} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial P(\xi, L)}{\partial \zeta} - F\frac{\partial^2 P(\xi, L)}{\partial \zeta^2} + A + \frac{dF}{d\xi}\left[\frac{\partial P(\xi, L)}{\partial \xi} - F\frac{\partial^2 P(\xi, L)}{\partial \xi \partial \zeta}\right] = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом, граничные условия (1.5) перенесены с поверхности $\zeta = L - F(\xi)$ на плоскость $\zeta = L$ и функция $F$ исключена из аргументов $P$.

Решение уравнения Лапласа (1.2) при учете условий (1.3), (1.4) имеет вид

$$P = \sum_k [A_k \operatorname{ch}(\mu_k\zeta) + B_k \operatorname{sh}(\mu_k\zeta)]J_0(\mu_k\xi), \quad A_k = \frac{2\varphi_k}{\mu_k J_1(\mu_k)} \tag{2.3}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{\Delta}\left\{1-(1-\Delta)^2\frac{J_1[\mu_k(1-\Delta)]}{J_1(\mu_1)} - \frac{\mu_k}{J_1(\mu_k)}\int_{1-\Delta}^{1}\xi^2 J_0(\mu_k\xi)d\xi\right\}$$

Здесь и далее суммирование по $k$ и $n$ ведется от единицы до бесконечности, $\mu_k$, $\mu_n$ – корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Отметим свойства коэффициентов $\varphi_k$: $\varphi_k \to 1$ при $\Delta \to 0$, $\varphi_k < 1$ при $0 < \Delta < 1$.

Представим функцию $F$ и постоянную $A$ в соотношении (2.2) в виде рядов Фурье – Бесселя

$$F = \sum_k a_k J_0(\mu_k\xi), \quad A = 2A\sum_k \frac{J_0(\mu_k\xi)}{\mu_k J_1(\mu_k)} \tag{2.4}$$

Последнее разложение обусловлено отсутствием нулевой моды в (2.3).

Неизвестные коэффициенты $B_k$ в (2.3) и $a_k$ в (2.4) найдем из условий (2.1), (2.2). Рассматривая совместно соотношения (2.1), (2.3), (2.4), имеем

$$\sum_k (A_kC_k + B_kS_k)J_0(\mu_k\xi) - \sum_n a_n J_0(\mu_n\xi)\sum_k \mu_k(A_kS_k + B_kC_k)J_0(\mu_k\xi) = 0 \tag{2.5}$$

$$C_k = \operatorname{ch}(\mu_k L), \qquad S_k = \operatorname{sh}(\mu_k L)$$

где $a_n$ – коэффициенты разложения функции $F$ в ряд Фурье – Бесселя.

Умножим все слагаемые уравнения (2.5) на $\xi d\xi$ и проинтегрируем в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$. Принимая во внимание взаимную ортогональность собственных функций $J_0(\mu_k\xi)$, получим систему алгебраических уравнений

$$2(A_kC_k + B_kS_k)J_1(\mu_k) - a_k\mu_k^2 J_k^2(\mu_k)(A_kS_k + B_kC_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

откуда находим

$$B_k = A_k\frac{S_k\mu_k^2 a_k J_1(\mu_k) - 2C_k}{2S_k - C_k\mu_k^2 a_k J_1(\mu_k)} \tag{2.6}$$

Подставляя выражения (2.3), (2.4) в условие (2.2), получим

$$\sum_k (A_kS_k + B_kC_k)\mu_k J_0(\mu_k\xi) - \sum_n a_n J_0(\mu_n\xi)\sum_k (A_kC_k + B_kS_k)\mu_k J_0(\mu_k\xi) +$$

$$+2A\sum_k J_0(\mu_k\xi)[\mu_k J_1(\mu_k\xi)]^{-1} + \sum_n a_n(-\mu_n)J_1(\mu_n\xi)\sum_k (A_kC_k + B_kS_k)(-\mu_k)J_0(\mu_k\xi) = 0$$

Умножив все слагаемые этого выражения на $\xi d\xi$ и проинтегрировав от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, приходим к бесконечной системе уравнений

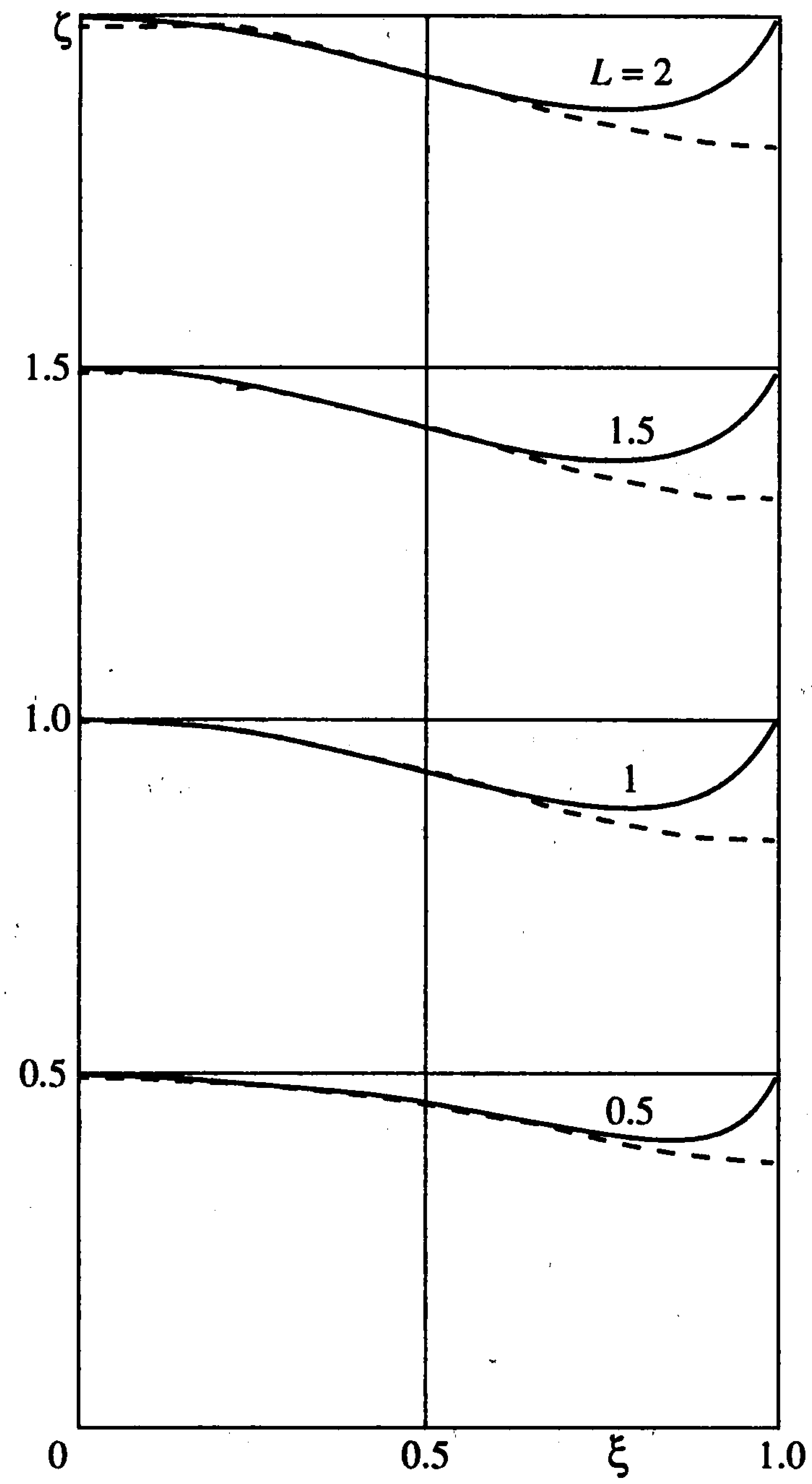
$$(A_kS_k + B_kC_k)\mu_k^2 J_1(\mu_k) + 2A = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Из совместного рассмотрения соотношений (2.6), (2.7) находим

$$a_k = \frac{2S_k}{C_k\mu_k^2 J_1(\mu_k)} - \frac{A_k}{AC_k}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

Следовательно, форму депрессионной поверхности описывает функция

$$F(\xi) = \frac{2}{A}\sum_k \frac{AS_k - \mu_k\varphi_k}{C_k\mu_k^2 J_1(\mu_k)}J_0(\mu_k\xi) \tag{2.9}$$




Фиг. 2

Согласно соотношению (2.9), на вершине бугра $r = 0$ депрессионная поверхность горизонтальна, поскольку $dF/d\xi = 0$ при $\xi = 0$. Конфигурация поверхности зависит от параметра $A$ и начального распределения давления, характеризуемого коэффициентами $\varphi_k$.

При учете соотношений (2.6) и (2.8) выражение для давления (2.3) примет вид

$$P = 2\sum_k \{\varphi_k \mu_k \operatorname{ch}[\mu_k (L-\zeta)] - A \operatorname{sh}(\mu_k \zeta)\} \frac{J_0(\mu_k \xi)}{C_k \mu_k^2 J_1(\mu_k)} \tag{2.10}$$

$$0 \leqslant \zeta \leqslant L - F(\xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

Используя выражения (1.1), находим компоненты скорости.

Расход жидкости $q$ и высота ее подъема $l$ зависят от давления на входе $p_0$. Поэтому найдем связь между параметрами $A$, $M$ и $L$.

Высота поверхности высачивания, поскольку $F(\xi = 1) = 0$, равна $l$. Поэтому расход жидкости можно определить интегралом

$$q = 2\pi R \int_0^l v_r\,(r = R)dz$$

При учете соотношений (1.2), (2.10), после преобразований имеем

$$M = A\left[2\sum_k A_k \operatorname{th}(\mu_k L) J_1(\mu_k) + 4A\sum_k \frac{1-C_k}{C_k\mu_k^2}\right]^{-1} \tag{2.11}$$

Для получения второго уравнения используем граничное условие (1.6) для функции (2.9). Находим следующую зависимость $A$ от $L$:

$$A = \sum_k \frac{\varphi_k}{C_k\mu_k J_1(\mu_k)}\left[\sum_k \frac{S_k}{C_k\mu_k^2 J_1(\mu_k)}\right]^{-1} \tag{2.12}$$

Таким образом, зависимость давления на входе $p_0$ от высоты бугра $l$ описывается выражением (2.12), соответственно зависимость $q$ от $l$ описывается выражением (2.11).

**3. Результаты расчетов.** Для разных значений $L$ построены линии свободных поверхностей при $\Delta = 0.1$. Коэффициенты $\varphi_k$ вычислялись вплоть до $k = 100$. Входящий в выражение $\varphi_k$ интеграл вычислялся по формуле Симпсона (его можно представить в виде ряда, но при $\mu_k \geqslant 10$ ($k \geqslant 3$) ряд имел плохую сходимость). Параметр $A$ (для заданного значения $L$) вычислялся по формуле (2.12).

На фиг. 2 представлены зависимости $\zeta = L - F(\xi)$, рассчитанные по формуле (2.9) (сплошные линии) и путем численного решения уравнения $P(\zeta, \xi) = 10^{-6}$, в котором величина $P$ находилась по формуле (2.10) (штриховые линии). В последнем случае определялся профиль изобары для давления, близкого к атмосферному. В окрестности стенки ($\xi \approx 1$) свободная поверхность существенно искажена, что связано с характерным для рядов Фурье эффектом Гиббса [9]. Увеличение числа членов ряда (2.9) не устранило искажения. В области $\xi \leqslant 0.7$ изобары практически совпадают с расчетными линиями свободных поверхностей, а эффект Гиббса в окрестности стенки не наблюдается. С увеличением высоты подъема жидкости форма свободной поверхности стабилизируется.

Авторы благодарят В.М. Ентова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. *Аравин В.И., Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
3. *Лаврик В.И.* О решении задач свободной фильтрации методом последовательных приближений // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. № 4. С. 427–431.
4. *Галин Л.А.* Некоторые задачи неустановившегося движения грунтовых вод // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 655–678.
5. *Кочина Н.Н.* Некоторые вопросы пространственного растекания грунтовых вод // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 3. С. 377–381.
6. *Шаповалов В.М., Короткова Н.Н.* Высачивание жидкости из зернистого материала, движущегося в цилиндре с перфорированной поверхностью // Реология, процессы и аппараты химической технологии. Волгоград: Изд-во ВолгГТУ, 1999. С. 98–103.
7. *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов. М.: Высш. шк., 1991. 447 с.
8. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. N.Y. etc.: Wiley, 1981. = *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
9. *Hamming R.W.* Numerical Methods for Scientists and Engineers. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1962. = *Хемминг Р.В.* Численные методы. Для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972. 400 с.

Волжский
e-mail: utkin@volpi.ru

Поступила в редакцию
4.VII.2000 г.