

УДК 531.391

© 2001 г. В.Г. Вильке, И.Ф. Кожевников

**КАЧЕНИЕ КОЛЕСА С АРМИРОВАННОЙ ШИНОЙ
ПО ПЛОСКОСТИ БЕЗ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ**

Рассматривается модель колеса с армированной шиной, поверхность которой моделируется гибкой лентой (бандаж), соединенной с частями двух торов (боковые поверхности шины). Диск колеса (твердое тело) имеет шесть степеней свободы, а контакт колеса с плоскостью осуществляется по части бандажа. На основе ряда гипотез найден функционал потенциальной энергии деформированной шины в зависимости от деформаций срединной линии бандажа. В предположении качения колеса без проскальзывания в зоне контакта бандажа с плоскостью по заранее неизвестному участку бандажа получена полная система уравнений движения. Исследованы равновесие колеса и стационарный режим качения по прямой с уводом и развалом колеса, найдены все характеристики движения (зона контакта, деформация шины, силы и моменты, приложенные к диску колеса).

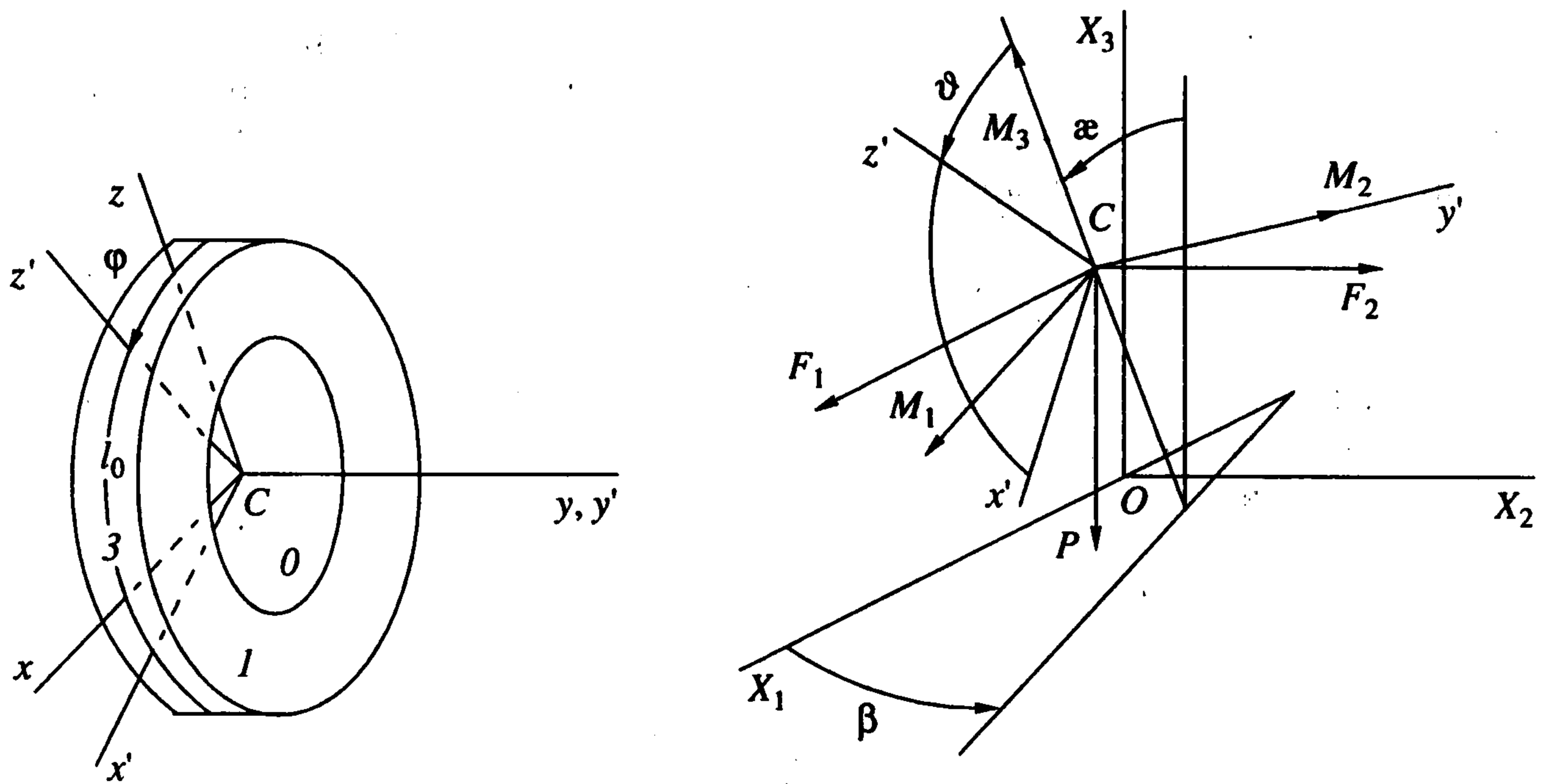
Известен ряд моделей шины, деформации которой описываются конечным числом параметров, например перемещение и поворот грузовой площадки [1–4]. Описание динамических эффектов при деформации шины по всей ее поверхности возможно в рамках моделей с бесконечным числом степеней свободы [5, 6]. Предлагалось [7] моделировать поверхность шины частью поверхности тора, однако в дальнейшем деформации сводились к перемещению грузовой линии вдоль оси колеса, а сила и момент пропорциональны этому перемещению и его производной по натуральному параметру в точке контакта. Была предложена [5] модель пневматика в виде криволинейной балки, связанной с диском непрерывно распределенными упругими силами. Шина моделировалась также [6] бандажом (гибкая нерастяжимая нить), связанным с боковыми поверхностями (части поверхности тора), и предполагалось, что срединная плоскость диска колеса ортогональна плоскости качения. Имеется значительное количество работ, в которых деформации шины исследовались методом конечных элементов (например, [8, 9]). В отличие от этих работ ниже предлагается модель колеса, в которой диск имеет шесть степеней свободы, бандаж представляется гибкой нерастяжимой лентой, а боковые поверхности шины моделируются частями поверхностей двух торов, что позволяет наиболее полно изучить качение колеса.

1. Модель колеса с армированной шиной. Пусть колесо состоит из диска (0), двух боковых поверхностей шины (1, 2) и бандажа (3), представленного в недеформированном состоянии в виде цилиндрической поверхности радиуса r . Диск колеса будем считать твердым телом, положение которого определяется шестью степенями свободы, а боковые поверхности шины в недеформированном состоянии зададим в виде двух частей тороидальных поверхностей (фиг. 1). Пусть $Ox_1x_2x_3$ – инерциальная система координат, а $Sxuz$ – система координат, связанная с диском. Поверхность бандажа зададим в виде

$$\mathbf{R}_3(\varphi, \xi, t) = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{E}_i + r \Gamma_3(\beta) \Gamma_1(\kappa) \Gamma_2(\theta + \varphi) [(1 + U_1) \mathbf{e}_1 + (lr^{-1} \xi + U_2) \mathbf{e}_2 + U_3 \mathbf{e}_3] \quad (1.1)$$

$$\Gamma_1(\kappa) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & -\sin \kappa \\ 0 & \sin \kappa & \cos \kappa \end{vmatrix}, \quad \Gamma_2(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_3(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \varphi \bmod 2\pi, \quad |\xi| \leq 1$$



Фиг. 1

Здесь X_1, X_2, X_3 – координаты центра масс диска C , β, κ, θ – углы последовательных поворотов неподвижной системы координат вокруг соответствующих осей при переходе к системе $Cxyz$, I_i – орт оси OX_i , $U_k(\xi, \varphi, t)$ ($k = 1, 2, 3$) – компоненты вектора перемещения точки бандажа в системе координат $Cx'y'z'$, орты которой обозначены через e_k , $2l$ – ширина бандажа. Пусть шина в зоне бандажа армирована кордом так, что через каждую точку проходит нить, направленная по орту e_2 , и две нити, имеющие направления $\cos \gamma e_2 \pm \sin \gamma e_3$ (угол γ постоянен). Считая стальные волокна корда нерастяжимыми, получим равенства

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \xi} \right| = 1, \quad \left| \cos \gamma \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \xi} \pm \sin \gamma \frac{\partial \mathbf{R}_3}{r \partial \varphi} \right| = 1$$

эквивалентные равенствам

$$|l^{-1} \mathbf{R}_3^\circ| = 1 \Rightarrow 2lr^{-1}U_2^\circ + \sum_{k=1}^3 U_k^{\circ 2} = 0; \quad (\cdot)^\circ = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}$$

$$|r^{-1} \mathbf{R}_3'| = 1 \Rightarrow 2(U_1 - U_3') + (U_1 - U_3')^2 + U_2'^2 + (U_1' + U_3)^2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{R}_3^\circ(\cdot)\mathbf{R}_3' = 0 \Rightarrow U_1^\circ(U_1' + U_3) + (lr^{-1} + U_2^\circ)U_2' - U_3^\circ(1 + U_1 - U_3') = 0; \quad (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi}$$

В дальнейшем функции U_k и их производные будем считать малыми и, пренебрегая их квадратами, получим из (1.2) равенства

$$U_2^\circ = 0, \quad U_3' = U_1, \quad lr^{-1}U_2' = U_3^\circ \quad (1.3)$$

Обозначив перемещения срединной линии бандажа l_0 , соответствующей $\xi = 0$, через $u(\varphi, t)e_1 + w(\varphi, t)e_2 - v(\varphi, t)e_3$ и решив систему уравнений (1.3), найдем

$$U_1 = lr^{-1}\xi w'' + u, \quad U_2 = w, \quad U_3 = lr^{-1}\xi w' - v, \quad u = -v' \quad (1.4)$$

Рассмотрим случай, когда колесо катится по плоскости OX_1X_2 . В области контакта часть бандажа совпадает с плоскостью OX_1X_2 и неподвижна. Из условий (1.2) в области контакта следует существование двух ортогональных семейств прямых, соответ-

ствующих в формуле (1.1) постоянным значениям одного из переменных φ или ξ . Согласно формулам (1.4), форма бандажа в деформированном состоянии близка к линейчатой поверхности, и можно предположить, что область контакта шины с плоскостью представляется в виде прямоугольника. Пусть контакт бандажа соответствует значениям угла φ из интервала $L_1 = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$. Тогда

$$\mathbf{R}_3(\varphi, \xi, t) = -r(\varphi - \pi/2)\mathbf{I}_1 + l\xi\mathbf{I}_2, \quad \varphi \in L_1, \quad |\xi| \leq 1 \quad (1.5)$$

Не нарушая общности, в соотношении (1.5) принято соглашение о качении колеса вдоль оси OX_1 , когда его срединная линия l_0 совпадает с этой осью. Из (1.5) с учетом (1.1) получим равенства

$$U_1 = u + lr^{-1}\xi(\cos \vartheta \sin \beta + \sin \vartheta \sin \kappa \cos \beta)$$

$$U_2 = w + lr^{-1}\xi(\cos \kappa \cos \beta - 1) \quad (1.6)$$

$$U_3 = -v + lr^{-1}\xi(\sin \vartheta \sin \beta - \cos \vartheta \sin \kappa \cos \beta)$$

$$u = (\pi/2 - X_1 r^{-1} - \varphi)(\cos \beta \cos \vartheta - \sin \beta \sin \kappa \sin \vartheta) +$$

$$+ X_3 r^{-1} \sin \vartheta \cos \kappa - r^{-1} X_2 (\cos \vartheta \sin \beta + \sin \vartheta \sin \kappa \cos \beta) - 1$$

$$w = -(\pi/2 - X_1 r^{-1} - \varphi) \sin \beta \cos \kappa - X_3 r^{-1} \sin \kappa - r^{-1} X_2 \cos \kappa \cos \beta$$

$$v = -(\pi/2 - X_1 r^{-1} - \varphi)(\cos \beta \sin \vartheta + \sin \beta \sin \kappa \cos \vartheta) + X_3 r^{-1} \cos \vartheta \cos \kappa +$$

$$+ r^{-1} X_2 (\sin \vartheta \sin \beta - \cos \vartheta \sin \kappa \cos \beta); \quad \vartheta = \theta + \varphi$$

Согласно (1.4) и (1.6), относительные перемещения точек бандажа в зоне контакта определяются функциями времени $X_1, X_2, X_3, \beta, \kappa, \theta$, а вне зоны контакта эти перемещения зависят от функций v и w . Если в равенствах (1.6) принять $\xi = 0$, то полученные перемещения будут соответствовать точкам срединной линии бандажа.

Боковые поверхности шины (1) и (2) в деформированном состоянии определим в виде

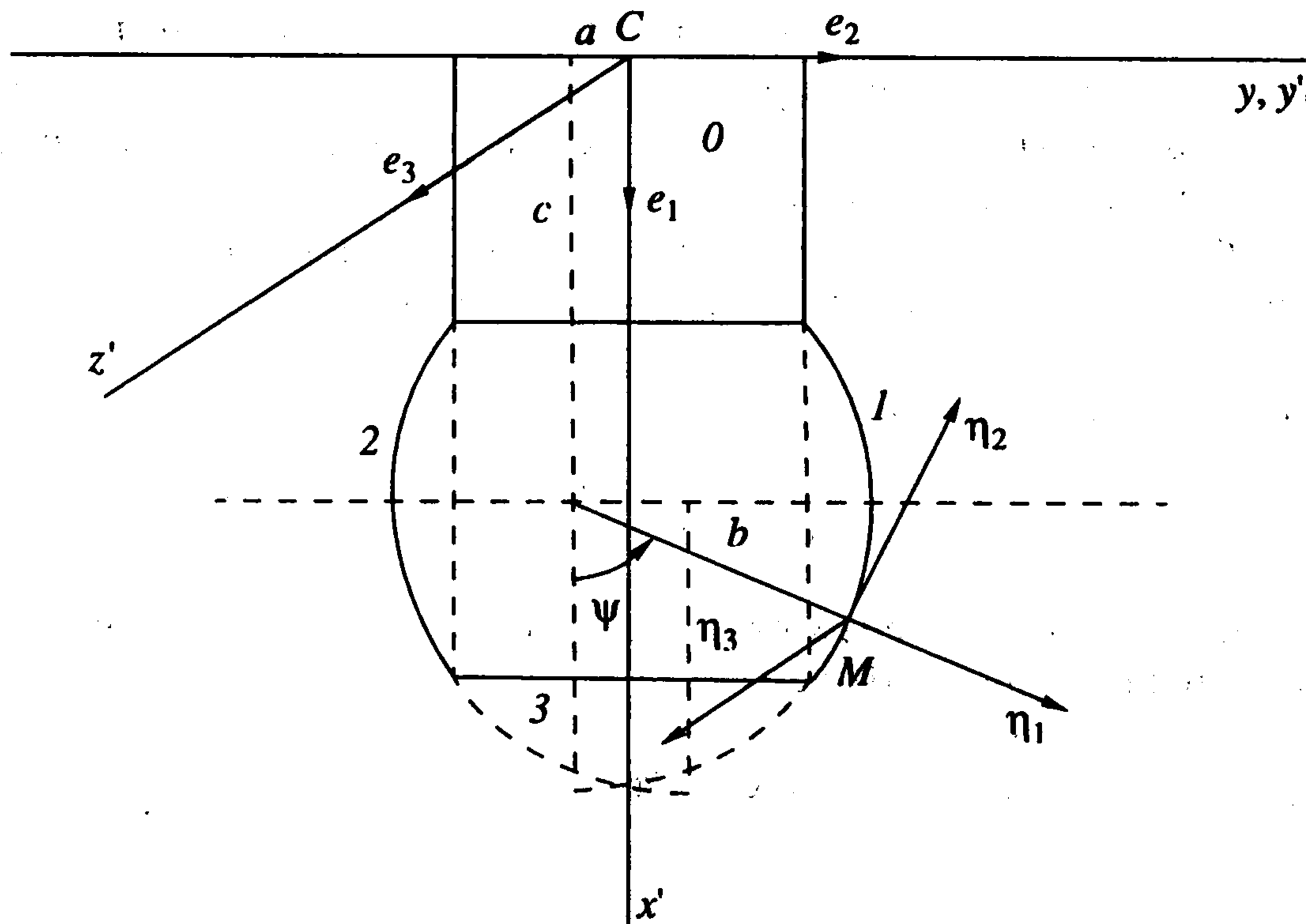
$$\mathbf{R}_j(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{I}_i + \Gamma_3(\beta) \Gamma_1(\kappa) \Gamma_2(\vartheta) \times \left\{ (-1)^j a \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_1 + b \Gamma_3(\psi) \left[\boldsymbol{\eta}_1 + \sum_{i=1}^3 V_i \boldsymbol{\eta}_i \right] \right\} \quad (1.7)$$

$$\psi \in I_1 \cup I_2, \quad I_1 = [\psi_1, \psi_2], \quad I_2 = [-\psi_2, -\psi_1], \quad j = 1, 2$$

Здесь $V_i(\varphi, \psi, t)$ ($i = 1, 2, 3$) – компоненты вектора относительных перемещений точек боковых поверхностей шины в тороидальной системе координат $M\eta_1\eta_2\eta_3$ (фиг. 2), a, b, c – постоянные. Интервал I_j соответствует боковой поверхности шины (j). В радиальной шине ее боковые поверхности армированы нерастяжимыми стальными нитями, соответствующими в \mathbf{R}_j постоянному углу φ , кривизну которых будем считать постоянной для каждой нити, находящейся под действием внутреннего давления в шине [6]. Эти условия выражаются равенствами

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_j}{b \partial \psi} \right| = 1 \Rightarrow 2(V_2 + V_1) + (V_2 + V_1)^2 + (V_1 - V_2)^2 + V_3^2 = 0$$

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{R}_j}{b \partial \psi^2} \right| = C(\varphi, t) \Rightarrow (1 + V_1 - V_1'' + 2V_2')^2 + (2V_1' + V_2'' - V_2)^2 + V_3''^2 = b^2 C^2; \quad (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \psi} \quad (1.8)$$



Фиг. 2

Полагая входящие в формулы (1.8) функции и их производные малыми и пренебрегая их квадратами, получим линейную систему дифференциальных уравнений

$$V_2 + V_1 = 0, \quad V_1 - V_1'' + 2V_2'' = 0$$

общее решение которой имеет вид

$$V_1 = -c_2 + c_3 \sin \psi - c_4 \cos \psi, \quad V_2 = c_1 + c_2 \psi + c_3 \cos \psi + c_4 \sin \psi \quad (1.9)$$

где коэффициенты $c_k(\varphi, t)$ ($k = 1, \dots, 4$) следует определить из граничных условий

$$\psi = \pm \psi_2 : V_1 = V_2 = 0$$

$$\psi = \pm \psi_1 : V_1 = U_{1\pm} \cos \psi_1 \pm U_{2\pm} \sin \psi_1, \quad V_2 = \mp U_{1\pm} \sin \psi_1 + U_{2\pm} \cos \psi_1$$

$$U_{k\pm} = U_k(\pm 1, \varphi, t)$$

В результате получим две системы линейных алгебраических уравнений, решение которых представим в форме

$$c_k = \frac{r}{b\Delta} \times \begin{cases} \left(-[u + lr^{-1}w'' + y_1(1)]f_k - [w + y_2(1)]g_k \right), & \psi \in I_1 \\ (-1)^{k+1} \left([u - lr^{-1}w'' + y_1(-1)]f_k - [w + y_2(-1)]g_k \right), & \psi \in I_2 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$k = 1, \dots, 4$$

$$f_1 = \psi_2 \cos \psi_2 - \psi_1 \cos \psi_1 + g_2, \quad f_2 = \cos \psi_1 - \cos \psi_2$$

$$f_3 = \sin(\psi_2 - \psi_1) - (\psi_2 - \psi_1) \cos \psi_1 \cos \psi_2$$

$$f_4 = 1 - (\psi_2 - \psi_1) \cos \psi_1 \sin \psi_2 - \cos(\psi_2 - \psi_1)$$

$$g_1 = \psi_2 \sin \psi_2 - \psi_1 \sin \psi_1 - f_2, \quad g_2 = \sin \psi_1 - \sin \psi_2$$

$$g_3 = -1 + \cos(\psi_2 - \psi_1) - (\psi_2 - \psi_1) \sin \psi_1 \cos \psi_2$$

$$g_4 = \sin(\psi_2 - \psi_1) - (\psi_2 - \psi_1) \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

$$\Delta = 2 - 2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - (\psi_2 - \psi_1) \sin(\psi_2 - \psi_1)$$

Здесь $y_1(\xi)$, $y_2(\xi)$ – добавочные квадратичные относительно u , v , w и их производных члены, возникающие при определении функций U_1 , U_2 из условий (1.2). Эти члены окажутся необходимыми при вычислении работы давления на возможных перемещениях и будут определены ниже.

Функцию $V_3(\varphi, \psi, t)$ приближенно представим двумя первыми членами ее разложения в ряды Тейлора в окрестностях точек $\psi = \pm \psi_2$ в виде

$$V_3 = \frac{r}{b} \times \begin{cases} (lr^{-1}w' - v) \left[1 - (\psi - \psi_1)(\psi_2 - \psi_1)^{-1} \right], & \psi \in I_1 \\ (-lr^{-1}w' - v) \left[1 + (\psi + \psi_1)(\psi_2 - \psi_1)^{-1} \right], & \psi \in I_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Найдем работу давления на возможных перемещениях при деформациях боковых поверхностей шины и бандажа. Имеем

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=1}^3 \delta A_k, \quad \delta A_3 = p \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [\mathbf{R}'_3 \times \mathbf{R}_3] \delta \mathbf{R}_3 d\xi d\varphi, \\ \delta A_k &= p \int_{I_k} \int_0^{2\pi} [\mathbf{R}'_k \times \mathbf{R}_k] \delta \mathbf{R}_k d\psi d\varphi, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь p – давление в шине, которое, как было показано ранее [6], можно считать постоянным при подсчете его работы в (1.12) с точностью до членов второго порядка малости включительно. Для бандажа из (1.12) получим

$$\delta A_3 = plr^2 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [\delta U_1 - rl^{-1}U_1^\circ \delta U_2 + (U_1' + U_3) \delta U_3] d\xi d\varphi \quad (1.13)$$

При вычислении интеграла по ξ здесь необходимо воспользоваться формулами (1.4) и найти квадратичную поправку к функции U_1 . Обозначив квадратичные поправки к функциям, определенным в (1.4), через y_k и используя равенства (1.2), найдем

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2} w'^2 - \frac{1}{2} \left[lr^{-1} \xi (w'''' + w') + u' - v \right]^2 + y_3', \\ y_2 &= -\frac{l\xi}{2r} (w'''' + w'^2), \quad y_3 = \frac{l\xi}{r} (u' - v) w'' \end{aligned} \quad (1.14)$$

После интегрирования подынтегрального выражения в (1.13) по ξ и ряда членов также по φ при учете соотношений (1.4) и (1.14) получим

$$\begin{aligned} \delta A_3 &= -\delta \Pi_3 = -2plr^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{l^2}{3r^2} (w'''' + w') \delta w'''' + (u' - v) \delta u' \right] d\varphi \\ \Pi_3 &= plr^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{l^2}{3r^2} (w''''^2 - w'''^2) + v''^2 - v'^2 \right] d\varphi \end{aligned} \quad (1.15)$$

Согласно соотношениям (1.12), работа давления при деформациях боковых поверхностей шины с точностью до членов второго порядка малости включительно относительно функций V_1 , V_2 , V_3 и их производных равна

$$\begin{aligned} \delta A_k &= pb^3 \int_0^{2\pi} \int_{I_k} \left[\delta V_1 \left(\frac{c}{b} + \cos \psi - V_3' + V_1 \cos \psi - V_2 \sin \psi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \delta V_2 \left(\frac{c}{b} + \cos \psi \right) (V_1 - V_2) + \delta V_3 (V_1' + V_3 \cos \psi) \right] d\varphi d\psi, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Найдем квадратичную поправку к функции V_1 с целью сохранить в (1.16) члены до второго порядка малости включительно. Заменяя в (1.8) V_k на $V_k + z_k$, где z_k – члены второго порядка малости, и учитывая соотношения (1.9), получим равенства

$$2(z_2 + z_1) + (c_1 + c_2 \psi)^2 + V_3^2 = 0 \quad (1.17)$$

$$2(z_1 - z_1 + 2z_2) + c_2^2 + (c_1 + c_2 \psi)^2 = 0$$

Величины c_1, c_2 представлены равенствами (1.10) при условии, что $y_{1,2}(\pm 1)$ не приняты во внимание, так как они дают в (1.17) члены порядка малости три и выше. Кроме того, при выводе соотношений (1.17) учитывалось равенство $1 + c_2 = b^2 C^2$ для членов первого порядка малости. В результате из соотношений (1.17) найдем

$$z_1 + z_1 = -V_3^2 - (c_1 + c_2 \psi)^2 / 2, \quad z_1(\pm \psi_{1,2}) = 0 \quad (1.18)$$

Учитывая структуру решения (1.18) и выражения (1.9), (1.11), после достаточно громоздких вычислительных процедур (интегрирование по ψ с учетом четности и нечетности соответствующих функций) получим выражение работы давления при перемещениях точек боковых поверхностей шины в виде

$$\delta A_1 + \delta A_2 = - \int_0^{2\pi} \left[n_0 \delta u + \frac{1}{2} n_{01} \delta u^2 + \frac{1}{2} n_{11} \delta u'^2 + m_{21} v' \delta u + m_{12} u' \delta v + \frac{1}{2} m_{22} \delta v^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 n_{j3} \delta w^{(j)2} \right] d\varphi, \quad \delta A_1 + \delta A_2 = -\delta \Pi_{1,2} \quad (1.19)$$

Верхний индекс (j) означает соответствующую производную функции по φ , а $\Pi_{1,2}$ – функционал потенциальной энергии давления при деформациях боковых поверхностей шины. Этот функционал положительно определен по переменным v, w , если учесть условие нерастяжимости срединной линии бандажа (второе условие в (1.2) при $\xi = 0$)

$$u \approx -v' - (v'' + v)^2 / 2 - w'^2 / 2 \quad (1.20)$$

Заметим, что коэффициент $n_0 < 0$ и, как будет видно из дальнейшего, равен обратным знаком силе натяжения бандажа под действием давления в шине.

2. Уравнения движения. Кинетическую энергию колеса представим в виде

$$2T = m_d \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i^2 + J_{1d} (\dot{\kappa}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \kappa) + J_{2d} (\dot{\theta} + \dot{\beta} \sin \kappa)^2 + \rho r \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^3 \dot{Z}_i^2 d\varphi \quad (2.1)$$

Здесь m_d, J_{1d}, J_{2d} – масса и моменты инерции диска относительно осей Cx, Cy соответственно. Кинетическая энергия бандажа и боковых поверхностей шины в (2.1) представлена последним членом в предположении, что вся масса шины равномерно распределена по срединной линии l_0 с линейной плотностью ρ . Величины \dot{Z}_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции скорости точки срединной линии бандажа на оси системы координат, повернутой относительно системы $Ox_1x_2x_3$ на угол β вокруг оси Ox_3 ; они имеют вид

$$\dot{Z}_1 = \dot{X}_1 \cos \beta + \dot{X}_2 \sin \beta - r\dot{\beta}[(1+u) \sin \kappa \sin \vartheta + w \cos \kappa + v \sin \kappa \cos \vartheta] - r\dot{\theta}[(1+u) \sin \vartheta + v \cos \vartheta] + r(\dot{u} \cos \vartheta - \dot{v} \sin \vartheta)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_2 = & -\dot{X}_1 \sin \beta + \dot{X}_2 \cos \beta + r\dot{\beta}[(1+u) \cos \vartheta - v \sin \vartheta] + \\ & + r\dot{\kappa}[(1+u) \sin \vartheta + v \cos \vartheta] \cos \kappa - w \sin \kappa + r\dot{\theta}[(1+u) \sin \kappa \cos \vartheta - v \sin \kappa \sin \vartheta] + \\ & + r(\dot{u} \sin \kappa \sin \vartheta + \dot{w} \cos \kappa + v \sin \kappa \cos \vartheta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_3 = & \dot{X}_3 + r\dot{\kappa}[(1+u) \sin \vartheta + v \cos \vartheta] \sin \kappa + w \cos \kappa - \\ & - r\dot{\theta}[(1+u) \cos \kappa \cos \vartheta - v \cos \kappa \sin \vartheta] - \\ & - r(\dot{u} \cos \kappa \sin \vartheta + \dot{v} \cos \kappa \cos \vartheta - \dot{w} \sin \kappa); \quad \vartheta = \theta + \varphi \end{aligned}$$

Уравнения движения и условия на границе заранее неизвестной зоны контакта получим из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Для этого необходимо получить выражения работы внешних сил и моментов, приложенных к диску колеса (фиг. 1), на возможных перемещениях, а именно

$$\begin{aligned} \delta A_F = & F(\beta) \delta X_1 + F(\beta - \pi/2) \delta X_2 - P \delta X_3 + M_1 \delta \kappa + M_2 \delta \theta + \\ & + (M_2 \sin \kappa + M_3 \cos \kappa) \delta \beta, \quad F(\beta) = F_1 \cos \beta - F_2 \sin \beta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть колесо катится без проскальзывания. Это означает, что скорости точек срединной линии бандажа в зоне контакта $L_1 = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$ равны нулю, т.е. $\dot{Z}_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Эти условия являются следствием голономных связей, представленных последними тремя соотношениями в (1.6). Возможные перемещения удовлетворяют равенствам $\delta Z_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), полученным из (2.2) путем замены производных по времени на вариации соответствующих функций, а работа реакций, приложенных к срединной линии, равна

$$\sum_{i=1}^3 \delta N_i = \int_{L_1} \sum_{i=1}^3 \mu_i(\varphi, t) \delta Z_i d\varphi + \sum_{i,k=1}^2 \mu_{ik} \delta Z_{ik} \quad (2.4)$$

где μ_i, μ_{ik} ($i, k = 1, 2$) – неопределенные множители Лагранжа – компоненты реакции связей. Индекс k означает реакции связей и возможные перемещения в граничных точках зоны контакта. В равенстве (2.4) отсутствуют члены μ_{3k} , так как предполагается, что в граничных точках зоны контакта составляющие реакций связей по оси OX_3 равны нулю.

Еще одна связь на границе зоны контакта шины, следующая из соотношений (1.1) и (1.4), состоит в том, что вектор, направленный по волокну шины, нормальному ее срединной линии, ортогонален оси OX_3 , а именно

$$Z_{4k} = \sin \kappa - w_k'' \cos \kappa \sin \vartheta_k + w_k' \cos \kappa \cos \vartheta_k = 0 \quad (2.5)$$

$$w_k = w(\varphi_k, t); \quad k = 1, 2$$

Работа реакции этой связи (момента по оси OX_1) на возможных перемещениях будет равна

$$\delta N_4 = \sum_{k=1}^2 \mu_{4k} \delta Z_{4k} \quad (2.6)$$

Здесь $\mu_{4k}, \delta Z_{4k}$ – проекция момента на срединную ось бандажа в граничной точке зоны контакта и соответствующее возможное перемещение.

В концевых точках зоны контакта следует рассмотреть момент связей, направленный по оси OX_3 . Эти реакции связей являются следствием ортогональности волокон

бандажа, перпендикулярных его срединной линии, оси OX_1 . Учитывая формулы (1.1) и (1.4), представим эти условия в виде

$$\frac{\partial R_3(\varphi_k, 0, t)}{l \partial \xi} I_1 = 0 \Rightarrow Z_{5k} = -\sin \beta \cos \kappa + w_k'' (\cos \beta \cos \vartheta_k - \sin \beta \sin \kappa \sin \vartheta_k) + w_k' (\cos \beta \sin \vartheta_k + \sin \beta \sin \kappa \cos \vartheta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \vartheta_k = \theta + \varphi_k \quad (2.7)$$

Обозначим множители Лагранжа, соответствующие связям (2.7) (проекции моментов на ось OX_3 в конечных точках контакта), через μ_{5k} ($k = 1, 2$) и представим их работу при освобождении от связей в виде

$$\delta N_5 = \sum_{k=1}^2 \mu_{5k} \delta Z_{5k} \quad (2.8)$$

где δZ_{5k} – вариация соотношения (2.7).

В качестве связей для точек срединной линии бандажа l_0 вне зоны контакта примем условие ее нерастяжимости (второе соотношение в (1.2) при $\xi = 0$)

$$2Z_6 = (1 + u + v')^2 + (u' - v)^2 + w'^2 = 1 \quad (2.9)$$

Соответственно при освобождении от этих связей следует принять во внимание их работу на возможных перемещениях

$$\delta N_6 = \int_{L_2} \lambda(\varphi, t) \delta Z_6 d\varphi, \quad L_2 = [\varphi_2, 2\pi + \varphi_1] \quad (2.10)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Представим вариационный принцип Гамильтона – Остроградского в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A_F + \sum_{i=1}^3 \delta A_i + \sum_{i=1}^6 \delta N_i) dt = 0 \quad (2.11)$$

Соответствующие переменные в (2.11) 2π -периодичны по переменной φ , и область интегрирования $[t_1, t_2] \cup [\varphi_1, \varphi_1 + 2\pi]$ в (2.11) разбивается кривой $\varphi = \varphi_2(t)$ на две части $[t_1, t_2] \cup L_1$ и $[t_1, t_2] \cup L_2$, к каждой из которых применим формулу Грина. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}_1} T + F(\beta) + \int_{L_1} (\mu_1 \cos \beta - \mu_2 \sin \beta) d\varphi + \sum_{k=1}^2 (\mu_{1k} \cos \beta - \mu_{2k} \sin \beta) &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}_2} T + F\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \int_{L_1} (\mu_1 \sin \beta + \mu_2 \cos \beta) d\varphi + \sum_{k=1}^2 (\mu_{1k} \sin \beta + \mu_{2k} \cos \beta) &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}_3} T - P + \int_{L_1} \mu_3 d\varphi &= 0 \\ \nabla_x T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}} T + M_1 + \int_{L_1} \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial \dot{x}} d\varphi + \sum_{i=1,2,4,5} \sum_{k=1}^2 \mu_{ik} \frac{\partial \dot{Z}_{ik}}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ \nabla_{\theta} T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\theta}} T + M_2 + \int_{L_1} \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial \dot{\theta}} d\varphi + \sum_{i=1,2,4,5} \sum_{k=1}^2 \mu_{ik} \frac{\partial \dot{Z}_{ik}}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ \nabla_{\beta} T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\beta}} T + M_2 \sin \kappa + M_3 \cos \kappa + \int_{L_1} \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial \dot{\beta}} d\varphi + \sum_{i=1,2,4,5} \sum_{k=1}^2 \mu_{ik} \frac{\partial \dot{Z}_{ik}}{\partial \dot{\beta}} &= 0 \\ \mu_1 r \cos \vartheta + \mu_2 r \sin \kappa \sin \vartheta - \mu_3 r \cos \kappa \sin \vartheta - n_0 - n_{01} u + n_{11} u'' + \\ + m_2 (u'' - v') - m_2 v' &= 0, \quad \varphi \in L_1 = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\nabla_u T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}} T - n_0 - n_{01}u + n_{11}u'' + m_2(u'' - v') - m_2v' + \lambda(1 + u + v') -$$

$$-[\lambda(u' - v)]' = 0, \quad \varphi \in L_2 = [\varphi_2(t), \varphi_1(t) + 2\pi], \quad m_2 = 2plr^2$$

$$\rho r^3 [\dot{u}]_k \dot{\varphi}_k - (-1)^k [\lambda(u' - v)]_{l(k)} + (m_2 + n_{11})[u']_k +$$

$$+ r(\mu_{1k} \cos \vartheta_k + \mu_{2k} \sin \kappa \sin \vartheta_k) = 0, \quad \vartheta_k = \theta + \varphi_k, \quad k = 1, 2$$

$$- \mu_{1r} \sin \vartheta + \mu_{2r} \sin \kappa \cos \vartheta - \mu_{3r} \cos \kappa \cos \vartheta - m_{12}u' - m_{22}v = 0, \quad \varphi \in L_1$$

$$\nabla_v T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{v}} T - m_{12}u' - m_{22}v - [\lambda(1 + u + v')] - \lambda(u' - v) = 0, \quad \varphi \in L_2$$

$$\rho r^3 [\dot{v}]_k \dot{\varphi}_k - (-1)^k [\lambda(1 + u + v')]_{l(k)} + r(-\mu_{1k} \sin \vartheta_k + \mu_{2k} \sin \kappa \cos \vartheta_k) = 0; \quad k = 1, 2$$

$$\mu_2 r \cos \kappa + \mu_3 r \sin \kappa + \Lambda w = 0, \quad \varphi \in L_1$$

$$(\Lambda w = (m_3 + n_{33})w^{(6)} + (m_3 - n_{23})w^{(4)} + n_{13}w'' - n_{03}w = 0), \quad m_3 = 2pl^3/3$$

$$\nabla_w T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{w}} T + \Lambda w - (\lambda w')' = 0, \quad \varphi \in L_2$$

$$\rho r^3 [\dot{w}]_k \dot{\varphi}_k - (-1)^k [\lambda w']_{l(k)} + (m_3 + n_{33})[w^{(5)}]_k + (m_3 - n_{23})[w''']_k + r\mu_{2k} \cos \kappa = 0$$

$$\mu_{4k} \cos \kappa \cos \vartheta_k + \mu_{5k} (\cos \beta \sin \vartheta_k + \sin \beta \sin \kappa \cos \vartheta_k) - (m_3 + n_{33})[w^{(4)}]_k = 0$$

$$- \mu_{4k} \cos \kappa \sin \vartheta_k + \mu_{5k} (\cos \beta \cos \vartheta_k - \sin \beta \sin \kappa \sin \vartheta_k) + (m_3 + n_{33})[w''']_k = 0; \quad k = 1, 2$$

Здесь $[f(\vartheta)]_k = f(\vartheta_k + 0) - f(\vartheta_k - 0)$ – скачок функции в концевой точке зоны контакта. Индекс $l(k)$ понимается как значение соответствующей функции при $\vartheta_1 - 0$ для $k = 1$ и при $\vartheta_2 + 0$ для $k = 2$.

Система (2.12) состоит из 12 уравнений движения и 10 условий, накладываемых на скачки функций в концевых точках зоны контакта. Если к этим уравнениям добавить 4 уравнения связей (три последних соотношения в (1.6) в зоне контакта и условие (2.9) вне зоны контакта), то получится замкнутая система 26 уравнений относительно 26 неизвестных

$$X_1, X_2, X_3, \beta, \kappa, \theta, \mu_i (i = 1, 2, 3), \quad \varphi_k, \mu_{ik} (k = 1, 2, i = 1, 2, 4, 5), \lambda, u, v, w$$

в зоне контакта и вне ее. При определении функций u, v, w следует также учитывать условия их непрерывности в граничных точках зоны контакта, вытекающие из условия существования функционалов потенциальной энергии давления, а именно

$$[u]_k = [v]_k = [w]_k = [w']_k = [w'']_k = 0, \quad k = 1, 2 \quad (2.13)$$

3. Равновесие колеса и статические характеристики шины. Если колесо находится в равновесии, то все величины, определяющие его положение и деформации шины, а также множители Лагранжа, внешние силы и моменты, приложенные к диску колеса, не зависят от времени. Пусть в положении равновесия $\theta = 0, \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Предположим, что в положении равновесия величины $X_1, X_2, X_3 - r, \beta, \kappa, \varphi - \pi/2, \varphi_2 - \varphi_1, u, v, w$ и их производные по φ малы. В области контакта угол φ близок к $\pi/2$. Используя замену переменных $\varphi = \pi/2 + \alpha, \alpha \in L_1 = [\alpha_1, \alpha_2], \alpha_k = \varphi_k - \pi/2$, запишем уравнения (2.12), пренебрегая в них величинами второго порядка малости и выше по этим переменным. В результате получим

$$F_1 - F_2 \beta + \int_{L_1} \mu_1 d\alpha + \sum_{k=1}^2 (\mu_{1k} - \mu_{2k} \beta) = 0$$

$$F_1 \beta + F_2 + \int_{L_1} \mu_2 d\alpha + \sum_{k=1}^2 (\mu_{1k} \beta + \mu_{2k}) = 0$$

$$\begin{aligned}
P &= \int_{L_1} \mu_3 d\alpha \\
M_1 + \int_{L_1} \mu_2 r d\alpha + \sum_{k=1}^2 (\mu_{2k} r + \mu_{4k}) &= 0 \\
M_2 - \int_{L_1} \mu_1 r d\alpha - \sum_{k=1}^2 (\mu_{1k} r + \beta \mu_{4k}) &= 0 \\
M_2 \kappa + M_3 + \sum_{k=1}^2 [\mu_{1k} X_2 - \mu_{2k} (\alpha_k r + X_1) - \mu_{5k}] &= 0 \\
-\mu_1 r \alpha + \mu_2 r \kappa - \mu_3 r &= n_0 - n_{11} - m_2 + (X_3 r^{-1} - 1)(n_{01} - m_{21} + n_{11}), \quad \alpha \in L_1 \\
-\mu_1 r + \mu_3 r \alpha &= m_{12} \alpha + (m_{12} + m_{22}) X_1 r^{-1}, \quad \alpha \in L_1 \\
\mu_2 r + \mu_3 r \kappa &= -n_{03} (\kappa + X_2 r^{-1}), \quad \alpha \in L_1 \\
-n_0 - n_{01} u + n_{11} u'' + m_2 (u'' - v') - m_{21} v' + \lambda - [\lambda(u' - v)]' &= 0, \quad \alpha \in L_2 \\
(-1)^k [\lambda(u' - v)]_{l(k)} - (m_2 + n_{11}) [u']_k + r(\mu_{1k} \alpha_k - \mu_{2k} \kappa) &= 0 \\
-m_{12} u' - m_{22} v - \lambda' - \lambda(u' - v) &= 0, \quad \alpha \in L_2 \\
(-1)^k [\lambda]_{l(k)} + r \mu_{1k} &= 0, \quad k = 1, 2 \\
(m_3 + n_{33}) w^{(6)} + (m_3 - n_{23}) w^{(4)} + n_{13} w'' - n_{03} w - (\lambda w')' &= 0, \quad \alpha \in L_2 \\
-(-1)^k [\lambda w']_{l(k)} + (m_3 + n_{33}) [w^{(5)}]_k + (m_3 - n_{23}) [\dot{w}^{(4)}]_k + r \mu_{2k} &= 0 \\
\mu_{4k} \alpha_k - \mu_{5k} + (m_3 + n_{33}) [w^{(4)}]_k &= 0 \\
\mu_{4k} + \mu_{5k} \alpha_k - (m_3 + n_{33}) [w^{(3)}]_k &= 0, \quad k = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Из соотношений (3.1) найдем μ_1, μ_2, μ_3 в зоне контакта L_1 в виде

$$\begin{aligned}
\mu_1 r &= (n_{11} + m_2 - n_0 - m_{12}) \alpha - (m_{12} + m_{22}) X_1 r^{-1} \\
\mu_2 r &= (n_0 - n_{11} - m_2) \kappa - n_{03} (\kappa + X_2 r^{-1}) \\
\mu_3 r &= -n_0 + n_{11} + m_2 - (n_{01} - m_{21} + n_{11})(X_3 r^{-1} - 1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Полагая $\lambda = n_0 + \lambda_1$, где λ_1 – величина первого порядка малости, и используя линеаризованное соотношение (2.9) $u = -v'$, представим уравнения, определяющие деформации срединной линии бандажа, в форме

$$\begin{aligned}
(n_{01} + n_0 - m_2 - m_{21}) v' + (n_0 - n_{11} - m_2) v''' + \lambda_1 &= 0 \\
(m_{12} + n_0) v'' + (n_0 - m_{22}) v - \lambda_1' &= 0 \\
(m_3 + n_{33}) w^{(6)} + (m_3 - n_{23}) w^{(4)} + (n_{13} - n_0) w'' - n_{03} w &= 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) в области L_2 имеют решения

$$v(\alpha) = \sum_{i=1}^4 G_i \exp(p_i \alpha), \quad w(\alpha) = \sum_{j=1}^6 E_j \exp(q_j \alpha), \quad \alpha \in L_2 \tag{3.4}$$

где p_i ($i = 1, \dots, 4$), q_j ($j = 1, \dots, 6$) – корни характеристических уравнений

$$\begin{aligned}
a_0 p^4 + a_1 p^2 + a_2 &= 0 \\
a_0 = n_0 - m_2 - n_{11}, \quad a_1 = 2n_0 + n_{01} - m_2 + m_{12} - m_{21}, \quad a_2 = n_0 - m_{22}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
b_0 q^6 + b_1 q^4 + b_2 q^2 + b_3 &= 0 \\
b_0 = n_{33} + m_3, \quad b_1 = m_3 - n_{23}, \quad b_2 = n_{13} - n_0, \quad b_3 = -n_{03}
\end{aligned}$$

Корни характеристических уравнений (3.5) обладают свойством

$$p_1 = -p_3, \quad p_2 = -p_4, \quad q_1 = -q_4, \quad q_2 = -q_5, \quad q_3 = -q_6$$

Для определения произвольных коэффициентов G_i, E_j в (3.4) запишем условия (2.13) с точностью до членов первого порядка малости

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 G_i \exp(2\pi p_i) &= \sum_{i=1}^4 G_i = X_1 r^{-1} \\ \sum_{i=1}^4 G_i p_i \exp(2\pi p_i) &= \sum_{i=1}^4 G_i p_i = 1 - X_3 r^{-1} \\ \sum_{j=1}^6 E_j \exp(2\pi q_j) &= \sum_{j=1}^6 E_j = -\kappa - X_2 r^{-1} \\ \sum_{j=1}^6 E_j q_j \exp(2\pi q_j) &= \sum_{j=1}^6 E_j q_j = \beta \\ \sum_{j=1}^6 E_j q_j^2 \exp(2\pi q_j) &= \sum_{j=1}^6 E_j q_j^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Соотношения (3.6) представляют собой две системы линейных алгебраических уравнений четвертого и шестого порядка с постоянными коэффициентами относительно переменных G_i и E_j соответственно. Решая эти уравнения, найдем

$$G_i = \frac{(-1)^i}{2} \exp(-\pi p_i) \frac{\text{sh}(\pi p_1) \text{sh}(\pi p_2)}{\text{sh}(\pi p_i)} [-p_1 p_2 p_i^{-1} B_1 X_1 r^{-1} - B_2 (X_3 r^{-1} - 1)], \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.7)$$

$$B_1^{-1} = \text{ch}(\pi p_1) p_2 \text{sh}(\pi p_2) - \text{ch}(\pi p_2) p_1 \text{sh}(\pi p_1)$$

$$B_2^{-1} = \text{sh}(\pi p_1) p_2 \text{ch}(\pi p_2) - \text{sh}(\pi p_2) p_1 \text{ch}(\pi p_1)$$

$$E_j \exp(\pi q_j) = P_{lm} (\kappa + X_2 r^{-1}) + Q_{lm} \beta \quad (j, l, m)$$

$$E_{j+3} \exp(-\pi q_j) = P_{lm} (\kappa + X_2 r^{-1}) - Q_{lm} \beta \quad (j, l, m) \quad (3.8)$$

$$P_{lm} = \frac{1}{2\Delta_1} q_l q_m [q_l \text{ch}(\pi q_l) \text{sh}(\pi q_m) - q_m \text{ch}(\pi q_m) \text{sh}(\pi q_l)]$$

$$Q_{lm} = \frac{1}{2\Delta_2} \text{sh}(\pi q_l) \text{sh}(\pi q_m) (q_l^2 - q_m^2)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \text{ch}(\pi q_1) & \text{ch}(\pi q_2) & \text{ch}(\pi q_3) \\ q_1 \text{sh}(\pi q_1) & q_2 \text{sh}(\pi q_2) & q_3 \text{sh}(\pi q_3) \\ q_1^2 \text{ch}(\pi q_1) & q_2^2 \text{ch}(\pi q_2) & q_3^2 \text{ch}(\pi q_3) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{sh}(\pi q_1) & \text{sh}(\pi q_2) & \text{sh}(\pi q_3) \\ q_1 \text{ch}(\pi q_1) & q_2 \text{ch}(\pi q_2) & q_3 \text{ch}(\pi q_3) \\ q_1^2 \text{sh}(\pi q_1) & q_2^2 \text{sh}(\pi q_2) & q_3^2 \text{sh}(\pi q_3) \end{vmatrix}$$

где символ (j, l, m) означает набор трех уравнений при циклической перестановке индексов: $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 1, 2)$.

Условия, накладываемые на скачки в (3.1), представляют в виде

$$\sum_{i=1}^4 G_i \exp(2\pi p_i \delta_{1k}) [(m_2 + n_{11} - n_0) p_i^2 - n_0] = -(m_2 + n_{11}) X_1 r^{-1} - (m_2 + n_{11} - n_0) \alpha_k$$

$$\sum_{i=1}^4 G_i \exp(2\pi p_i \delta_{1k}) [(n_0 - n_{11} - m_2) p_i^3 + (n_0 + n_{01} - m_2 - m_{21})] - n_0 = (-1)^k \eta_{1k}$$

$$\sum_{j=1}^6 E_j \exp(2\pi q_j \delta_{1k}) [(n_{33} + m_3)q_j^5 + (m_3 - n_{23})q_j^3 - n_0 q_j] = (-1)^{k+1} r \mu_{2k} \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^6 E_j \exp(2\pi q_j \delta_{1k}) (n_{33} + m_3)q_j^3 = (-1)^k \mu_{4k}$$

$$\sum_{j=1}^6 E_j \exp(2\pi q_j \delta_{1k}) (n_{33} + m_3)q_j^4 = (-1)^k \mu_{5k}, \quad k = 1, 2$$

Далее необходимо подставить выражения (3.7), (3.8) в условия (3.9) и найти связь между силами, моментами, перемещениями центра диска колеса и его поворотами, а также величину зоны контакта и ее границы. В результате получим с точностью до малых первого порядка включительно соотношения:

$$F_1 + \mu_{11} + \mu_{12} = 0, \quad F_2 + \mu_{21} + \mu_{22} = 0, \quad P = r^{-1} (n_{11} + m_2 - n_0)(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (3.10)$$

$$M_1 = -\sum_{k=1}^2 (\mu_{2k} r + \mu_{4k}), \quad M_2 = (\mu_{11} + \mu_{12})r, \quad M_3 = \mu_{51} + \mu_{52}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2(p_1^2 - p_2^2) \operatorname{sh}(\pi p_1) \operatorname{sh}(\pi p_2) B_2 (1 - X_3 r^{-1})$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2(p_1 p_2 B_2^{-1} B_1 - 1) X_1 r^{-1}$$

и далее

$$F_1 = 2(n_0 - n_{11} - m_2)(p_1^2 - p_2^2) p_1 p_2 \operatorname{sh}(\pi p_1) \operatorname{sh}(\pi p_2) B_1 X_1 r^{-2}$$

$$F_2 = -4r^{-1} \sum_{(j,l,m)} \{q_j \operatorname{sh}(\pi q_j) [(n_{33} + m_3)q_j^4 + (m_3 - n_{22})q_j^2 - n_0] P_{lm}\} (\chi + X_2 r^{-1})$$

$$P = r^{-1} (n_{11} + m_2 - n_0)(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (3.11)$$

$$M_1 = -rF_2 + 4(n_{33} + m_3) \sum_{(j,l,m)} \{q_j^3 \operatorname{sh}(\pi q_j) P_{lm}\} (\chi + X_2 r^{-1})$$

$$M_2 = -r^{-1} F_1, \quad M_3 = -4(n_{33} + m_3) \sum_{(j,l,m)} \{q_j^4 \operatorname{sh}(\pi q_j) Q_{lm}\} \beta$$

Здесь суммирование по (j, k, l) означает суммирование по циклическим перестановкам индексов: $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 1, 2)$.

Из соотношений (3.11) следует, что в случае равновесия колеса с шиной сила F_1 и момент M_2 взаимосвязаны и зависят от смещения центра диска колеса по оси OX_1 , а сила F_2 и момент M_1 также взаимосвязаны и зависят от наклона срединной плоскости диска и перемещения его центра вдоль оси OX_2 . Ширина зоны контакта пропорциональна величине нагрузки P , а ее смещение вдоль оси OX_1 пропорционально силе F_1 . Таким образом, найдены все характеристики деформированного состояния шины в положении равновесия, а именно условия, накладываемые на силы и моменты, приложенные к диску колеса, и их величины, зона контакта шины с плоскостью и ее расположение, форма шины вне области контакта.

4. Качение колеса с постоянной скоростью. Если в зоне контакта банджажи шины с плоскостью отсутствует проскальзывание, то в процессе качения колеса его след на плоскости контакта будет представляться в виде прямолинейной полосы, оставляемой бандажом шины. Полная система уравнений, описывающая эти движения, представлена соответствующими соотношениями в разд. 2. Среди этих движений возможны стационарные режимы качения колеса, когда центр колеса движется по прямой,

параллельной оси OX_1 , с постоянной скоростью и углы β , κ постоянны (фиксированные развал и схождение колеса). Это движение описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 = c, \quad X_2 = \text{const}, \quad X_3 = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad \kappa = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \Omega \\ \dot{\varphi}_k(t) = -\Omega, \quad \alpha = \varphi + \Omega t - \pi/2 \quad (u, v, w)(\varphi, t) = (U, V, W)(\alpha) \\ \mu_i(\varphi, t) = \mu_i(\alpha), \quad i = 1, 2, 3; \quad \mu_{ik} = \text{const}, \quad \alpha_k = \varphi_k(t) + \Omega t - \pi/2 = \text{const} \\ i = 1, 2, 4, 5; \quad k = 1, 2; \quad \lambda(\varphi, t) = \lambda(\alpha) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Исследование этого стационарного режима во многом аналогично исследованию равновесия колеса с шиной, проведенному в разд. 3. Для определенности положим

$$\theta = \Omega t, \quad X_1 = ct + \Delta X_1, \quad c = \Omega r \quad (4.2)$$

Последнее соотношение в (4.2) следует из нерастяжимости бандажа и условия качения колеса без проскальзывания. Первые девять уравнений системы (3.1) остаются неизменными при условии замены в них X_1 на ΔX_1 (эта замена должна быть произведена во всех уравнениях разд. 3), а последующие восемь уравнений представляются в форме

$$\begin{aligned} g_0(1 + U - U'' + 2V') - n_0 - n_{01}U + n_{11}U'' + \\ + m_2(U'' - V') - m_{21}V' + \lambda - [\lambda(U' - V)]' = 0, \quad \alpha \in L_2 \\ g_0[U']_k + (-1)^k [\lambda(U' - V)]_{l(k)} - (m_2 + n_{11})[U']_k + r(\mu_{1k}\alpha_k - \mu_{2k}\kappa) = 0 \\ g_0(V - V'' - 2U') - m_{12}U' - m_{22}V - \lambda' - \lambda(U' - V) = 0, \quad \alpha \in L_2 \\ g_0[V']_k + (-1)^k [\lambda]_{l(k)} + r\mu_{1k} = 0, \quad k = 1, 2, \quad g_0 = \rho r^3 \Omega^2 \\ -g_0 W'' + (m_3 + n_{33})W^{(6)} + (m_3 - n_{23})W^{(4)} + n_{13}W'' - n_{03}W - (\lambda W')' = 0, \quad \alpha \in L_2 \\ -g_0[W']_k - (-1)^k [\lambda W']_{l(k)} + (m_3 + n_{33})[W^{(5)}]_k + (m_3 - n_{23})[W''']_k + r\mu_{2k} = 0 \\ \mu_{4k}\alpha_k - \mu_{5k} + (m_3 + n_{33})[W^{(4)}]_k = 0 \\ \mu_{4k} + \mu_{5k}\alpha_k - (m_3 + n_{33})[W''']_k = 0; \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из первого, третьего и пятого уравнений системы (4.3), полагая $\lambda = n_0 - g_0 + \lambda_1$, получим систему вида (3.3). Заметим, что в данном случае натяжение бандажа вращающегося колеса увеличивается за счет центробежных сил, добавляемых к внутреннему давлению в шине. Решение полученной системы при учете линеаризованного условия нерастяжимости бандажа $U = -V'$ оказывается полностью идентичным решению (3.4) с теми же значениями корней характеристических уравнений (3.5). Уравнения (3.6) сохраняют свой вид и, следовательно, остаются справедливыми решениями (3.7), (3.8). Условия (3.9), накладываемые на скачки, заменим на соответствующие условия из (4.3). Тогда их можно представить в виде, отличающемся от (3.9) заменой X_1 на ΔX_1 , добавлением g_0 в коэффициенты при G_i и ΔX_1 в первом уравнении, добавлением $-g_0\rho_i$ в коэффициент при G_i и члена $g_0(2 - X_3r^{-1})$ в левой части второго уравнения и, наконец, заменой $-n_0q_j$ на $-(n_0 - g_0)q_j$ в третьем уравнении.

В рассматриваемом стационарном режиме качения колеса все силы и моменты, приложенные к диску колеса, не зависят от времени. Окончательная сводка соотношений, связывающих силы, моменты и переменные, определяющие движение системы, представляется двумя последними соотношениями в (3.10), при условии замены во втором соотношении X_1 на ΔX_1 , и соотношениями (3.11), в которых также следует заменить X_1 на ΔX_1 и коэффициент n_0 на $n_0 - g_0$ в соотношении, определяющем силу F_2 .

Таким образом, для рассматриваемого стационарного режима качения колеса с армированной шиной найдены все параметры, определяющие форму деформированной шины, зону контакта и ее расположение, силы и моменты, приложенные к диску колеса. Стационарный режим будет существовать в случае, если силы и моменты постоянны и если они подчиняются модифицированным условиям (3.10), (3.11). Это означает, что величины сил F_1, F_2 пропорциональны величинам моментов M_2, M_1 соответственно. Величина зоны контакта пропорциональна нагрузке P , а ее смещение вдоль оси OX_1 пропорционально силе F_1 . Развал колеса α и его схождение β порождают моменты M_1 и M_3 , приложенные к диску колеса. Это обстоятельство позволяет при движении автомобиля ликвидировать люфты в подвеске автомобиля и улучшить его управляемость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00253) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rocar Y.* L'instabilité en Mécanique. Automobiles. Avions. Pont Suspendus. Paris: Masson, 1954. = *Рокар И.* Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. *Келдыш М.В.* Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Тр. ЦАГИ. 1945. № 564. 34 с.
3. *Левин М.А., Фуфаев Н.А.* Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 271 с.
4. *Rasejka H.B., Bakker E.* The magic formula type model // Proc. Ist. Colloq. Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis. Delft, 1991. Amsterdam: Swits and Zeitlinger, 1993. P. 1–18.
5. *Böhm F.* Mechanik des Gürtelreifens // Ing. Arch. 1966. Bd. 35. H 2. P. 82–101.
6. *Вильке В.Г., Дворников М.В.* Качение колеса с пневматиком по плоскости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 393–404.
7. *Метелицын И.И.* Устойчивость движения автомобиля // Укр. мат. журн. 1952. Т. 4. № 3. С. 323–338; 1953. Т. 5. № 1. С. 80–92.
8. *Mastinu G., Fainello M.* Study of the pneumatic type behaviour on dry and rigid road by finite element method // Vehicle System Dynamics. 1992. V. 21. P. 143–165.
9. *Danielson K.T., Noor A.K., Green J.S.* Computational strategies for type modeling and analysis // Computers and Structures. 1996. V. 61. № 4. P. 673–693.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.2000