

УДК 531.38

© 2001 г. С.А. Мирер, В.А. Сарычев

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА НА СТРУНЕ С ТОЧКОЙ ПОДВЕСА НА ОСИ СИММЕТРИИ

Исследуются стационарные движения осесимметричного твердого тела, подвешенного к неподвижному основанию на невесомом недеформируемом стержне или нескручивающейся нерастяжимой струне. Рассматривается случай крепления стержня к телу в точке, расположенной на оси его динамической симметрии. Проанализированы все типы предельных равновесных конфигураций, возможных при неограниченном увеличении угловой скорости вращения системы вокруг вертикали. В пространстве безразмерных параметров системы построены области существования каждого типа предельных регулярных прецессий и перманентных вращений и показан характер их асимптотического поведения при увеличении угловой скорости. Выявлены предельные движения, которые возможны при подвесе на стержне и невозможны при подвесе на струне.

Рассмотрим твердое осесимметричное тело с центром масс G , подвешенное на невесомом абсолютно жестком стержне (или нескручивающейся нерастяжимой натянутой струне) в точке O_2 , расположенной на оси симметрии тела (фиг. 1). Второй конец стержня (точка O_1) связан с устройством, обеспечивающим вращение системы вокруг вертикальной оси со скоростью ω . Следует отметить, что движению тела на струнном подвесе посвящено огромное число работ. Наиболее полно данная тематика описана в [1]. Здесь же можно найти и самый подробный обзор литературы.

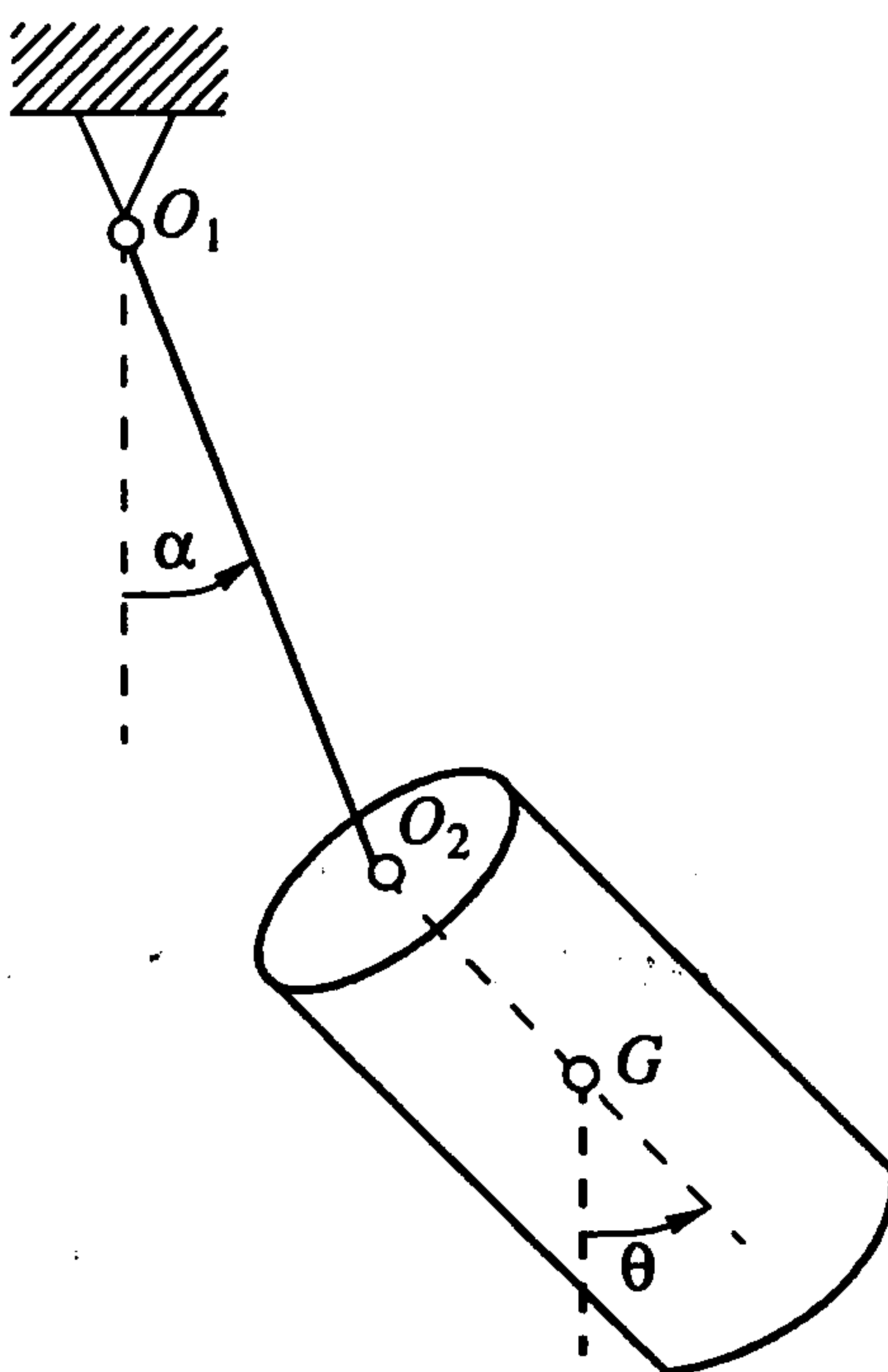
Известно, что тело на стержне (струне) может совершать стационарные вращения типа перманентного вращения и регулярной прецессии [1], причем уравнения регулярных прецессий имеют вид¹

$$\omega^2(l \sin \alpha + a \sin \theta) \cos \alpha - g \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\omega^2[ma(l \sin \alpha + a \sin \theta) + (A - C) \sin \theta] \cos \theta - (mga + C\omega\Omega) \sin \theta = 0$$

где m – масса тела; A, C – центральный экваториальный и осевой моменты инерции тела; a – расстояние O_2G ; l – длина стержня O_1O_2 ; Ω – угловая скорость собственного вращения тела, произведение $\omega\Omega$ положительно для прямой прецессии и отрицательно для обратной. Конфигурация системы определяется углами α и θ между нисходящей вертикалью и векторами O_1O_2 и O_2G соответственно (как обычно, за положительное направление отсчета углов выбирается направление против часовой стрелки). Угол θ , определяющий положение тела, принимает значения из интервала $(-\pi, \pi]$. Что касается угла α , то при подвесе тела на стержне $\alpha \in [0, \pi]$, а при подвесе на струне $\alpha \in [0, \pi/2]$. Уменьшение интервала значений α в последнем случае связано с тем, что в струне не может возникнуть напряжение, противодействующее ее сжатию, которое необходимо для существования стационарного вращения при $\alpha > \pi/2$. На этот факт указано, например, в [2].

¹ Сарычев В.А., Мирер С.А., Одинцова С.А. Регулярные прецессии осесимметричного тела на стержне. Классификация систем: Препринт № 170. М.: Ин-т прикл. математики. АН СССР, 1987. 28 с.



Фиг. 1

Заметим, что перманентные вращения осесимметричного тела представляют собой частный случай регулярных прецессий и описываются системой (1) при $\Omega = 0$.

В задаче о стационарных движениях твердого тела, подвешенного на струне, наиболее наглядным и легко интерпретируемым является рассмотрение эволюции движений в зависимости от угловой скорости вращения системы. Кстати, и при экспериментальном исследовании движения тела на струнном приводе такой подход наиболее естествен [3]. При этом неизбежно возникает вопрос о типах конических движений, существующих при достаточно больших значениях ω . Назовем такие конические движения предельными. Анализ предельных движений дает достаточно полное представление о динамических свойствах системы и иногда приводит к обнаружению новых интересных эффектов. Так, факт существования предельных перманентных вращений, при которых одна из главных центральных осей инерции тела стремится совместиться с вертикалью, лежит в основе метода динамической балансировки быстровращающихся тел [4].

Изучение предельных движений оказывается весьма полезным, когда полное исследование стационарных движений тела на струнном подвесе провести не удастся. Такая ситуация, в частности, имеет место в задаче о стационарных вращениях тела, прикрепленного к струне в точке, смещенной от главной центральной оси инерции [5].

Исследуем все возможные стационарные вращения рассматриваемой механической системы типа перманентных вращений и регулярных прецессий при $\omega \rightarrow \infty$, обращая внимание главным образом на области их существования и характер эволюции при изменении параметров системы.

После перехода к безразмерным параметрам

$$\kappa = \frac{a}{l} (> 0), \quad \sigma = \frac{A - C}{mal} (\neq 0), \quad \nu = \frac{C\Omega}{ma\sqrt{lg}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2)$$

уравнения (1) принимают вид

$$(\sin \alpha + \kappa \sin \theta) \cos \alpha - \varepsilon^2 \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

$$[\sin \alpha + (\kappa + \sigma) \sin \theta] \cos \theta - \varepsilon(\varepsilon + \nu) \sin \theta = 0$$

причем при рассмотрении быстрых вращений ε – малый параметр. Будем искать

решение системы (3), т.е. углы α и θ , характеризующие стационарное движение, в виде рядов по степеням ε

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots, \quad (4)$$

Подставляя ряды (4) в уравнения (3) и оставляя только члены нулевого порядка по ε , получаем систему уравнений

$$(\sin \alpha_0 + \kappa \sin \theta_0) \cos \alpha_0 = 0, \quad [\sin \alpha_0 + (\kappa + \sigma) \sin \theta_0] \cos \theta_0 = 0 \quad (5)$$

определяющую предельные стационарные вращения тела на стержне (струне).

Существуют следующие нетривиальные ($\sin \alpha_0 \neq 0, \sin \theta_0 \neq 0$) решения системы (5):

$$\begin{aligned} 1) \alpha_0 = \pi/2, \quad \theta_0 = \pi/2; \quad 2) \alpha_0 = \pi/2, \quad \theta_0 = -\pi/2; \\ 3) \alpha_0 = \pi/2, \quad \sin \theta_0 = -1/(\kappa + \sigma); \quad 4) \sin \alpha_0 = \kappa, \quad \theta_0 = -\pi/2 \end{aligned} \quad (6)$$

Решения 1, 2 существуют при любых параметрах системы и отвечают горизонтальным положениям стержня и оси симметрии тела, причем в случае 1 система "вытянута", а в случае 2 – "сложена".

Решения 3 возможны только при $|\kappa + \sigma| > 1$. При этом стержень горизонтален, а ось симметрии тела занимает наклонное положение. Обратим внимание на то, что решения 3 при $\kappa + \sigma < -1$ качественно отличаются от решений 3 при $\kappa + \sigma > 1$. В первом случае

$$\theta_0^{(1)} = \theta_* = \arcsin(1/|\kappa + \sigma|), \quad \theta_0^{(2)} = \pi - \theta_*$$

и стержень с телом отклонены от вертикали в одном и том же направлении. Во втором случае

$$\theta_0^{(1)} = -\theta_*, \quad \theta_0^{(2)} = -\pi + \theta_*$$

и стержень с телом отклонены в противоположных направлениях. Такие движения были названы [1] "маятникообразным" и "регулярной болтанкой" соответственно.

Наконец, решения 4, существующие при $\kappa < 1$, отвечают наклонному положению стержня ($\alpha_0^{(1)} = \arcsin \kappa, \alpha_0^{(2)} = \pi - \arcsin \kappa$) и горизонтальной оси симметрии тела. Заметим, что поскольку для решений 4 имеет место условие $l \sin \alpha_0 = a$, центр масс тела всегда расположен на неподвижной вертикали.

Для того чтобы выяснить характер эволюции стационарного режима при асимптотическом стремлении его к соответствующему предельному движению, необходимо определить знаки первых ненулевых поправок к предельным значениям α_0 и θ_0 . Подставляя ряды (4) в уравнения (3), приравнивая коэффициенты при членах первого и второго порядка по ε и учитывая очевидное равенство

$$\cos \alpha_0 \cos \theta_0 = 0 \quad (7)$$

имеющее место для всех решений (6), получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\cos 2\alpha_0 - \kappa \sin \alpha_0 \sin \theta_0) = 0 \\ \theta_1[(\kappa + \sigma) \cos 2\theta_0 - \sin \alpha_0 \sin \theta_0] = \nu \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(\cos 2\alpha_0 - \kappa \sin \alpha_0 \sin \theta_0) = \sin \alpha_0 + \alpha_1^2 \sin 2\alpha_0 + \\ + \kappa \left(\alpha_1 \theta_1 \sin \alpha_0 \cos \theta_0 + \frac{\alpha_1^2 + \theta_1^2}{2} \cos \alpha_0 \sin \theta_0 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \theta_2[(\kappa + \sigma) \cos 2\theta_0 - \sin \alpha_0 \sin \theta_0] = (\sin \theta_0 + \nu \theta_1 \cos \theta_0) + (\kappa + \sigma) \theta_1^2 \sin 2\theta_0 + \\ + \alpha_1 \theta_1 \cos \alpha_0 \sin \theta_0 + \frac{\alpha_1^2 + \theta_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \theta_0 \end{aligned}$$

Коэффициенты поправок первого порядка α_1 и θ_1 определяются из системы (8), причем из первого уравнения (8) видно, что для всех предельных решений (6) $\alpha_1 = 0$, за исключением двух вырожденных случаев. В первом случае $\kappa = 1$ и поправка α_1 становится неопределенной для решения 2. При этом фактически движение аналогично движению твердого тела с неподвижной точкой (центром масс), так как при $\alpha_0 = \pi/2$, $\theta_0 = -\pi/2$, $a = l$ центр масс G совпадает с точкой крепления струны к неподвижному основанию O_1 . Во втором случае α_1 становится неопределенной величиной для решения 3, если $\sigma = 0$. При этом тело вырождается в сферу ($A = C$). Далее эти особые случаи не рассматриваются.

Из второго уравнения (8) находим

$$\begin{aligned} 1) \theta_1 &= -\frac{v}{\kappa + \sigma + 1}, & 2) \theta_1 &= \frac{v}{\kappa + \sigma - 1} \\ 3) \theta_1 &= \frac{v}{1 - (\kappa + \sigma)^2}, & 4) \theta_1 &= \frac{v}{\sigma} \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку поправки первого порядка для угла α_0 равны нулю, из первого уравнения (9) находим следующие коэффициенты поправок второго порядка α_2 :

$$\begin{aligned} 1) \alpha_2 &= -\frac{1}{\kappa + 1}, & 2) \alpha_2 &= \frac{1}{\kappa - 1} \\ 3) \alpha_2 &= -\frac{\kappa + \sigma}{\sigma}, & 4) \alpha_2 &= \frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \left(1 - \frac{v^2}{2\sigma^2} \cos \alpha_0 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Из соотношений (10) следует, что знак θ_1 меняется на прямой $\kappa + \sigma = -1$ для решения 1 и на прямой $\kappa + \sigma = 1$ для решения 2. Для решений 4 коэффициент θ_1 меняет знак при $\sigma = 0$, т.е. при вырождении тела в сферу. Кроме того, знак θ_1 для всех решений (6) зависит от знака v , т.е. от того, рассматривается прямая или обратная прецессия.

Из соотношений (11) видно, что для решения 1 $\alpha_2 < 0$; для решения 2 α_2 меняет знак на прямой $\kappa = 1$; для решений 3 знак поправки изменяется на прямой $\sigma = 0$.

Для решений 4 знак поправки зависит от типа решения. Для решения первого типа $\alpha_0 = \alpha_0^{(1)}$ имеем

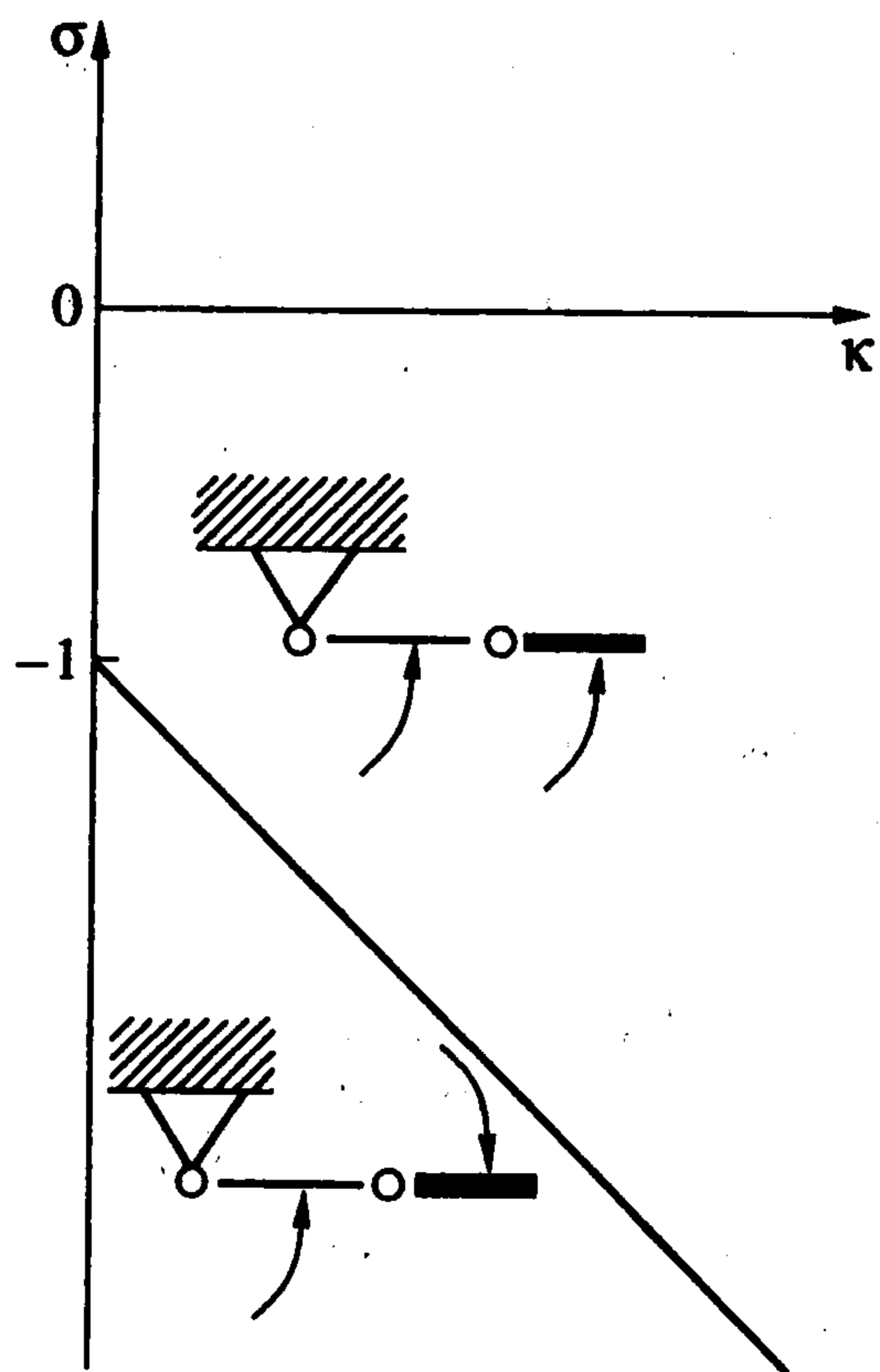
$$\alpha_2 = \frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \left(1 - \frac{v^2}{2\sigma^2} \sqrt{1 - \kappa^2} \right)$$

и, следовательно, $\alpha_2 > 0$ при

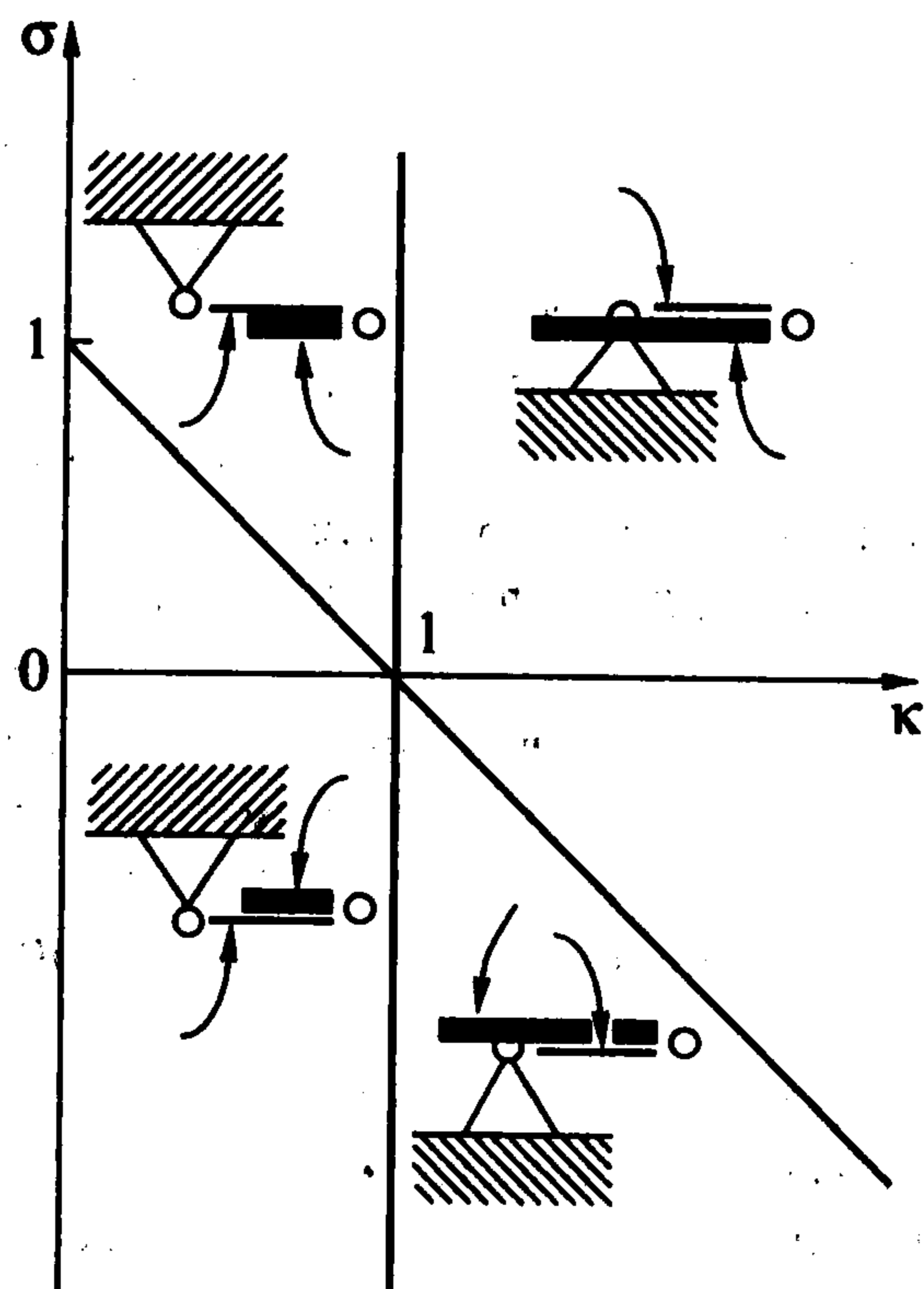
$$v^2 < v_*^2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{1 - \kappa^2}}$$

и $\alpha_2 < 0$ при $v^2 > v_*^2$. Поэтому будем различать медленные и быстрые собственные вращения в зависимости от того, выполняется первое или второе условие. Таким образом, для $\alpha_0 = \alpha_0^{(1)}$ имеем: $\alpha_2 > 0$ для медленных собственных вращений и $\alpha_2 < 0$ для быстрых собственных вращений. Для решения $\alpha_0 = \alpha_0^{(2)}$ поправка α_2 всегда положительна.

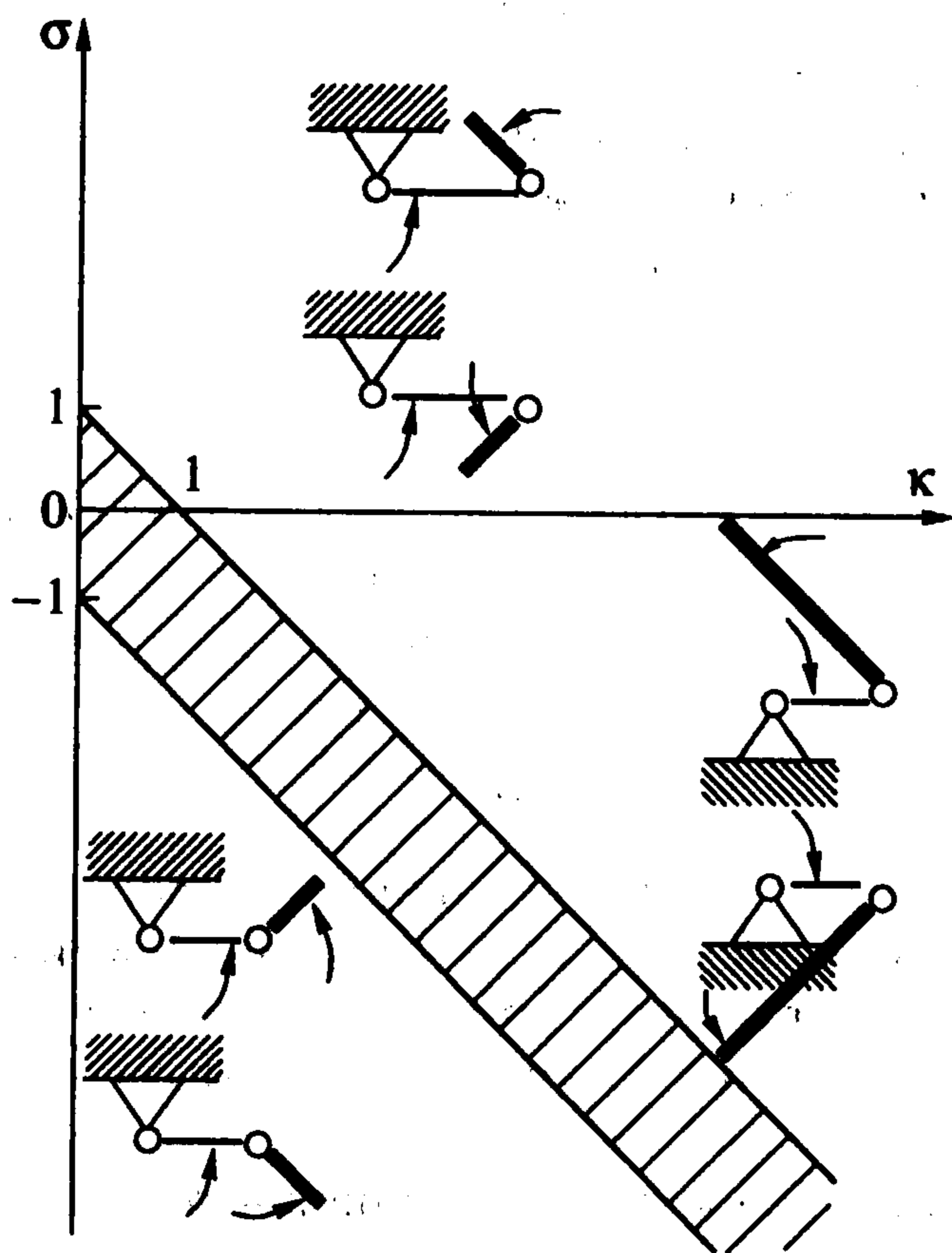
Полученные результаты представлены на фиг. 2–5, где в плоскости параметров κ , σ для случая прямой процессии ($v > 0$) изображены области существования предельных решений (6) различных типов с учетом характера их асимптотического поведения при $\omega \rightarrow \infty$, т.е. с учетом знаков первых ненулевых поправок α_2 и θ_1 . При этом равно-



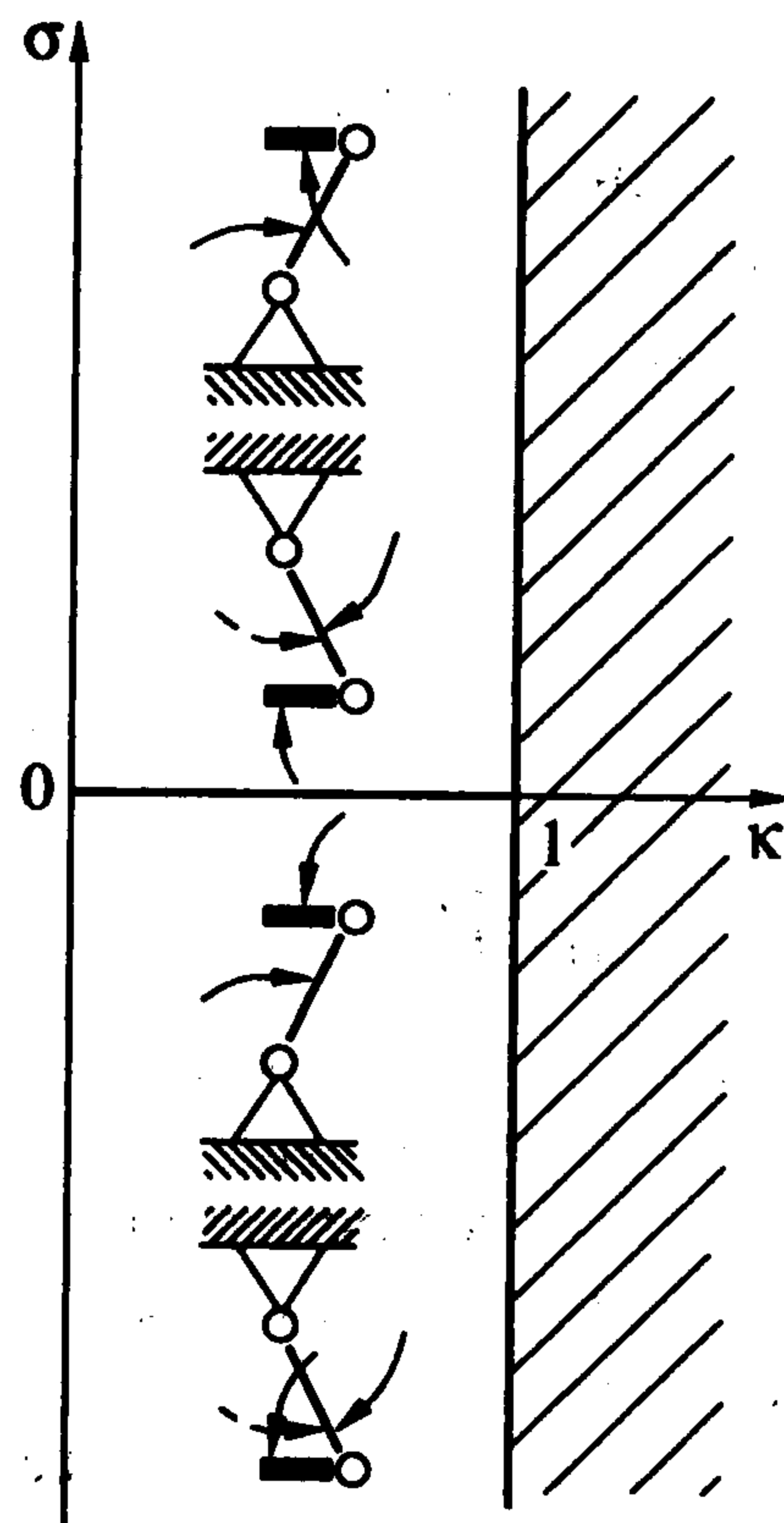
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

весные конфигурации системы схематично изображаются двумя отрезками — O_1O_2 и O_2G . Заметим, что в случае обратной прецессии ($\nu < 0$) направление стремления оси тела к своему предельному положению меняется на противоположное.

В заштрихованных областях на фиг. 4, 5 соответствующих решений не существует. Решение 3 (фиг. 4) на границе $k + \sigma = 1$ переходит в решение 2, а на границе $k + \sigma = -1$ переходит в решение 1. Решение 4 (фиг. 5) на границе $k = 1$ переходит в решение 2.

Как уже отмечалось, особенностью решений 4 является то, что возможен различный характер их асимптотического поведения для случая медленного и быстрого

собственного вращения. На фиг. 5 для тех типов решений, для которых такое различие имеет место, направление стремления стержня к своему предельному положению показано сплошной стрелкой в случае $v^2 < v_*^2$ и штриховой стрелкой в случае $v^2 > v_*^2$.

Напомним, что невозможность создания в струне напряжения сжатия приводит к тому, что при подвесе тела на струне допустимы только такие стационарные движения, при которых точка крепления тела к струне расположена ниже точки крепления струны к неподвижному основанию. В случае подвеса тела на стержне такого ограничения нет. Поэтому все стационарные движения рассматриваемой системы можно разбить на два класса. Одни режимы возможны и для стержня, и для струны, другие только для стержня. То же самое, естественно, относится и к предельным режимам. На фиг. 2–5 обычное изображение подвеса означает, что соответствующий тип стационарного движения возможен в любом случае. Перевернутый подвес указывает на то, что данный режим имеет место только в случае стержня.

Анализ фиг. 2–5 показывает, что число предельных регулярных прецессий, возможных в конкретной системе, зависит только от двух безразмерных параметров: κ и σ , и в случае подвеса на стержне равно 2, 4 или 6. Все шесть предельных решений одновременно существуют, если $|\kappa + \sigma| > 1$, $\kappa < 1$; при $|\kappa + \sigma| < 1$, $\kappa > 1$ таких решений только два; в остальной части полуплоскости ($\kappa > 0$, σ) существуют четыре предельных решения. При переходе к случаю струнного подвеса число предельных регулярных прецессий сокращается. В областях $|\kappa + \sigma| > 1$, $\kappa < 1$ одновременно существуют пять решений; в области $\kappa + \sigma > -1$, $\kappa > 1$, $\sigma < 0$ возможно только одно решение, а в остальной части полуплоскости существуют три решения.

Рассмотрим теперь перманентные вращения как частный случай регулярных прецессий при $v = 0$. Очевидно, предельные решения (6) имеют место и в этом случае, однако выражения для первых ненулевых поправок нуждаются в уточнении. Поправка α_2 в выражениях (11) изменится только для решения 4, т.е.

$$4) \alpha_2 = \frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \quad (12)$$

Напротив, все поправки первого порядка для угла θ , как видно из (10), при $v = 0$ обращаются в нуль. Поэтому необходимо определить поправки второго порядка θ_2 . Из второго уравнения (9) при учете равенства (7) и того, что $\alpha_1 = \theta_1 = 0$, получаем

$$1) \theta_2 = -\frac{1}{\kappa + \sigma + 1}, \quad 2) \theta_2 = \frac{1}{\kappa + \sigma - 1}, \quad 3) \theta_2 = \frac{1}{1 - (\kappa + \sigma)^2}, \quad 4) \theta_2 = \frac{1}{\sigma} \quad (13)$$

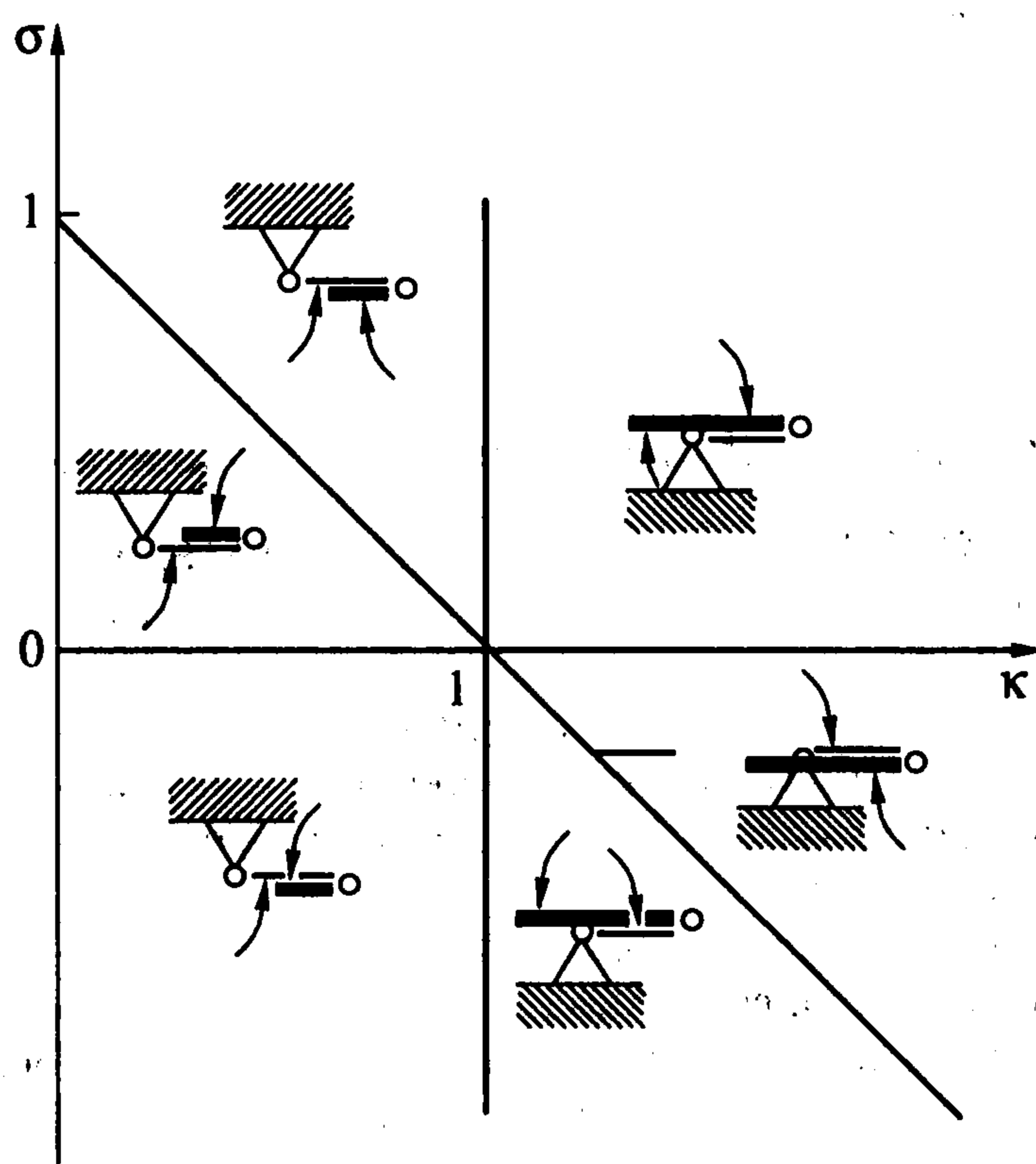
Области существования предельных перманентных вращений, их типы и характер эволюции для решений 1, 3 и 4 полностью совпадают с соответствующими случаями прямых регулярных прецессий и поэтому могут быть проиллюстрированы фиг. 2, 4 и 5. При этом, конечно, решению 4 соответствует случай медленного собственного вращения на фиг. 5.

Решение 2 обладает дополнительной особенностью, состоящей в том, что при увеличении угловой скорости ось динамической симметрии тела стремится совместиться со стержнем и система "складывается". В связи с этим представляет определенный интерес вопрос, будет ли ось симметрии тела находиться выше или ниже стержня при асимптотическом приближении к предельному решению. Поскольку в данном случае первые ненулевые поправки к углам α и θ – величины одного порядка, ответ на поставленный вопрос зависит не только от знаков поправок α_2 и θ_2 , а и от соотношения между их величинами в случае, когда эти поправки одного знака. Из (11), (13) следует, что для решения 2 коэффициенты α_2 и θ_2 одновременно отрицательны в области

$$\kappa < 1, \quad \kappa + \sigma < 1 \quad (14)$$

и одновременно положительны в области

$$\kappa > 1, \quad \kappa + \sigma > 1 \quad (15)$$



Фиг. 6

причем $\alpha_2 = \theta_2$, если $\sigma = 0$. Таким образом, взаимное расположение стержня и оси динамической симметрии тела изменяется при вырождении тела в сферу (фиг. 6). В области (14) $0 > \alpha_2 > \theta_2$, если тело динамически вытянутое ($\sigma > 0$, т.е. $A > C$), и ось тела лежит выше стержня; если тело динамически сплюснутое ($\sigma < 0$), то $0 > \theta_2 > \alpha_2$ и ось тела расположена ниже стержня. В области (15), если $\sigma > 0$, то $\alpha_2 > \theta_2 > 0$ и ось тела выше стержня, а если $\sigma < 0$, то $\theta_2 > \alpha_2 > 0$ и выше расположен стержень.

Интересно отметить, что при уменьшении величины ускорения свободного падения g параметр ε также становится малым. Это означает, что все результаты, полученные при анализе предельных перманентных вращений (но не регулярных прецессий!), остаются справедливыми не только при $\omega \rightarrow \infty$, то также и при конечной угловой скорости, если при этом $g \rightarrow 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00174) и Португальского фонда по науке и технике (Программа PRAXIS XXI, 3/3.1/СТАЕ/1942/95).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
2. Нозадзе Г.Т. Об устойчивости и бифуркации положений относительного равновесия тяжелого твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 22–29.
3. Малащенко С.В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел // ПМТФ. 1960. № 3. С. 205–211.
4. Ишлинский А.Ю., Малащенко С.В., Стороженко В.А. и др. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 3–18.
5. Мирер С.А., Одинцова С.А., Сарычев В.А. Предельные стационарные режимы твердого тела на струнном подвесе // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 38–44.

Москва, Лиссабон (Португалия)

Поступила в редакцию
16.1.2001

e-mail: mirer@spp.keldysh.ru
sarychev@demnet.ubi.pt