

УДК 531.36:534.1

© 2001 г. А.С. Ковалева

## СТАБИЛИЗАЦИЯ КВАЗИКОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

Исследуются условия существования и устойчивости стационарных движений и положений равновесия нелинейных квазиконсервативных систем при быстро-переменных внешних воздействиях, включающих квазипериодическую и случайную компоненты. Построена замена переменных, приводящая уравнения Лагранжа системы к стандартной форме. Показано, что усредненная система первого приближения имеет канонический вид и влияние быстрых возмущений (не обязательно потенциальных) сводится к изменению потенциала системы. Это приводит к стабилизации неустойчивых положений равновесия и появлению дополнительных стационарных точек, отличных от положений равновесия невозмущенной системы. Развитый подход иллюстрируется примерами: изучена устойчивость маятника на упругом подвесе при быстрой вибрации точки подвеса и стационарное движение шара под действием высокочастотной нагрузки и дана оценка критической нагрузки двойного маятника, нагруженного пульсирующей следящей силой. Указывается вид широкополосных случайных возмущений, способных стабилизировать систему.

Известен эффект стабилизации неустойчивых положений равновесия динамических систем при высокочастотных периодических и квазипериодических возмущениях их параметров [1–5]. Стабилизацию нелинейных систем со случайными возмущениями изучали преимущественно на примерах систем с одной степенью свободы [6, 7]. Обсуждали вопрос о виде широкополосного воздействия, способного стабилизировать систему [8].

В перечисленных работах основное внимание уделялось условиям стабилизации неустойчивого положения равновесия невозмущенной системы. Вместе с тем из общих результатов [3, 4] следует, что высокочастотное параметрическое возмущение может привести к возникновению дополнительных устойчивых положений относительного равновесия, отсутствующих у невозмущенных систем. Этот эффект подробно изучен на примерах маятника с нелинейным подвесом [4], сферического маятника [9 – 11] и волчка Лагранжа [12] при кинематическом возбуждении.

Были развиты [3, 4] методы исследования возмущенных систем, основанные на приведении уравнений движения к стандартной форме и анализе стационарных точек усредненных уравнений первого приближения. Однако прямое использование этого подхода для анализа сложных механических систем, представленных уравнениями Лагранжа, требует предварительных преобразований уравнений движения и не позволяет явно связать условия устойчивости со структурой исходной системы.

В работе строится замена переменных, приводящая уравнения Лагранжа возмущенной системы к стандартной форме, допускающей усреднение. Показано, что влияние быстрых возмущений в первом приближении сводится к изменению структуры потенциальных сил. Деформация потенциала системы может привести к появлению новых устойчивых стационарных точек, отличных от положений устойчивого равновесия невозмущенной системы. Связь устойчивости с изменением потенциала была очевидна в каждом ранее исследованном частном случае [4, 9–12]. Ниже дополнительные потенциальные силы получены в явном виде для достаточно широкого класса систем. Показано, что эффект изменения потенциала сохраняется и для непотенциальных возмущений, как детерминированных, так и случайных.

**1. Исходные положения и постановка задачи вибрационной стабилизации.** Пусть  $x$  и  $x' = dx/dt$  –  $n$ -мерные векторы обобщенных координат и скоростей,  $\tau$  – "медленное время" движения системы,  $T(x, x')$  – кинетическая энергия системы, заданная симметричной матрицей  $A(x)$ . Матрица  $A(x)$  положительно определена в рассматриваемой области изменения переменных. Потенциальная энергия системы определяется функцией  $\Phi(x)$ , вектор потенциальных сил  $Q(x) = d\Phi/dx$ . Вектор обобщенных сил, в общем случае непотенциальных, представим в виде  $S_\varepsilon(\tau, x) = \varepsilon^{-1}S(\tau/\varepsilon, x)$  и не включает постоянной составляющей,  $\varepsilon$  – малый параметр. Отсюда следует, что движение системы рассматривается как медленный процесс по сравнению с возмущением. Такое разделение быстрых и медленных движений характерно, например, для систем "типа маятника" с кинематическим возбуждением, где обобщенная сила  $S_\varepsilon(\tau, x)$  соответствует силам инерции, порожденным быстрой вибрацией точки подвеса [4–12].

Запишем уравнения движения, рассматривая "быстрое" время  $t = \tau/\varepsilon$  как независимую переменную. Уравнения Лагранжа приводятся к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon^2 Q(x) = \varepsilon S(t, x) \quad (1.1)$$

где

$$x' = dx/dt, T(x, x') = [(x')^T A(x) x'] / 2$$

Функции  $A(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $S(t, x)$  предполагаются достаточно гладкими и допускающими необходимые преобразования.

Введем новые переменные:

$$x = q, p = A(q)q' \quad (1.2)$$

что дает

$$q'(p, q) = v(p, q) = a(q)p, \quad a(q) = A^{-1}(q) \quad (1.3)$$

Определим полную энергию системы

$$E(p, q, \varepsilon) = G(p, q) + \varepsilon^2 \Phi(q); \quad G(p, q) = T(q, v(p, q)) \quad (1.4)$$

где  $G(p, q) = p^T a(q) p / 2$  в силу соотношений (1.1) – (1.3). Тогда уравнения движения относительно переменных  $q, p$  записываются в виде

$$q' = \frac{\partial E}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial E}{\partial q} + \varepsilon S(t, q) \quad (1.5)$$

Учитывая, что скорость движения мала, введем новую медленную переменную  $y$  по формуле

$$p = \varepsilon y + \varepsilon V(t, q); \quad S(t, q) = \partial V(t, q) / \partial t \quad (1.6)$$

где  $V(t, q)$  не содержит постоянной составляющей. Это предположение позволяет построить единственную функцию  $V(t, q)$  по заданной функции  $S(t, q)$ . В отличие от развитой замены переменных для уравнений второго порядка [4] преобразование (1.6) не требует обращения матриц и приводит к уравнениям в стандартной форме, правые части которых включают только первую степень параметра  $\varepsilon$ :

$$q' = \varepsilon a(q)y + \varepsilon F_1(t, q)$$

$$y' = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial q} \{ [\Phi(q) + F(q)] + \frac{1}{2} [y^T a(q) y] \} + \varepsilon F_2(t, q, y) \quad (1.7)$$

где

$$F(q) = \langle F(t, q) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M F(t, q) dt, \quad F(t, q) = \frac{1}{2} V^T(t, q) a(q) V(t, q) \quad (1.8)$$

Здесь и ниже  $M$  – оператор математического ожидания.

Замена (1.6) позволяет определить слагаемые  $F_1(t, q)$  и  $F_2(t, q, y)$  таким образом, что среднее  $\langle F_{1,2}(t, q, y) \rangle = 0$ . Коэффициенты системы (1.7) предполагаются достаточно гладкими и допускающими необходимые преобразования. Ограничения на переменные коэффициенты связаны с поведением процесса  $F(t, q)$ . Предполагается, что вектор  $F(t, q)$  представляет собой сумму ограниченного квазипериодического процесса и случайного процесса, и к (1.7) применим принцип усреднения [13] (или стохастического усреднения для систем со случайным возмущением [14]).

Коэффициент  $F(t, q)$  упрощается, если  $S(t, q) = v(t)Y(q)$ , где  $v(t)$  – скаляр. Тогда

$$F(t, q) = \frac{1}{2} v^2 f(q), \quad F(q) = \frac{1}{2} \sigma^2 f(q) \\ f(q) = Y^T(q) a(q) Y(q), \quad \sigma^2 = \langle v^2(t) \rangle \quad (1.9)$$

Рассмотрим наряду с (1.7) укороченную систему

$$q_0 \dot{=} \varepsilon a(q_0) y_0, \quad y_0 \dot{=} -\varepsilon \frac{\partial}{\partial q_0} \left\{ [\Phi(q_0) + F(q_0)] + \frac{1}{2} [y_0^T a(q_0) y_0] \right\} \quad (1.10)$$

Из соотношений (1.3), (1.4) следует, что уравнения (1.10) описывают движение консервативной системы с гамильтонианом  $H(y_0, q_0) = G(y_0, q_0) + U(q_0)$ , где  $q_0$  и  $y_0$  – векторы обобщенных координат и импульсов,  $G = y_0^T a(q_0) y_0 / 2$  – кинетическая энергия системы,  $U(q_0) = \Phi(q_0) + F(q_0)$  – потенциальная энергия. Назовем  $U(q_0)$  "эффективным потенциалом". Слагаемое  $F(q_0)$  соответствует вкладу быстрых возмущений в эффективный потенциал, функция  $K(q_0) = \partial F(q_0) / \partial q_0$  определяет дополнительные потенциальные силы. Таким образом, в первом приближении влияние быстрых возмущений сводится к изменению структуры потенциальных сил по сравнению с невозмущенной системой.

Исследование стационарных режимов гамильтоновой системы (1.10) проводится с помощью стандартных процедур [15]. Если система (1.10) не содержит циклических координат, то стационарные точки  $q^*$  системы (1.10) определяются как экстремальные точки потенциала  $U(q)$ , т.е. из уравнений

$$\partial U / \partial q = R(q) = Q(q) + K(q) = 0, \quad q \in R_n \quad (1.11)$$

Если в точке  $q^*$  потенциал имеет строгий минимум, то  $q^*$  – устойчивая стационарная точка укороченной системы.

Пусть коэффициенты  $a(q)$ ,  $\Phi(q)$ ,  $F(q)$  зависят только от координат  $q_i$  при  $i = 1, \dots, m$ . Тогда система (1.10) допускает отделение циклических координат и уменьшение размерности системы. Усеченная система для позиционных координат сохраняет вид (1.10), но функция  $\Phi$  рассматривается как соответствующий потенциал Рауса [15]. Стационарные решения определяются из (1.11) как стационарные точки соответствующего эффективного потенциала Рауса.

Из свойств гамильтоновой системы следует [15], что в линейном приближении стационарное решение может быть либо неустойчиво, либо устойчиво неасимптотически. В первом случае исходная система (1.7) также неустойчива (при случайных возмущениях неустойчива с вероятностью единица). Если стационарное решение устойчиво неасимптотически, то можно утверждать, что решение возмущенной системы остается в малой окрестности положения равновесия по крайней мере на интер-

вале времени  $t \sim 1/\varepsilon$ . Исследование устойчивости требует рассмотрения асимптотического разложения более высокого порядка [13, 16].

Если в уравнение движения включаются диссипативные силы, то соответствующее стационарное решение может стать асимптотически экспоненциально устойчивым в линейном приближении. При равномерно ограниченных периодических или почти периодических возмущениях стационарное решение возмущенной системы также асимптотически устойчиво и остается в  $\varepsilon$ -окрестности стационарной точки [13]. Если возмущения – случайные стационарные процессы, которые нельзя рассматривать как ограниченные, то при сделанных предположениях система (1.7) асимптотически устойчива по вероятности [14], так как почти все траектории (1.7) при  $t \rightarrow \infty$  стягиваются в малую окрестность стационарной точки, и большие (порядка 1) отклонения от этой точки имеют вероятность  $\sim \exp(-C/\varepsilon)$  [14].

*Анализ возможных стационарных решений.* В общем случае нелинейных систем стационарные точки, определяемые из уравнений (1.11), не совпадают с положениями равновесия невозмущенной системы. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть матрица кинетической энергии  $A$  не зависит от  $x$  и возмущение входит аддитивно,  $S(t, x) \equiv S(t)$ . Тогда  $F(t, q) \equiv 0$ ,  $K(q) \equiv 0$ , т.е. аддитивное быстрое возмущение не меняет положений равновесия нелинейной системы и не влияет на их устойчивость.

Пусть невозмущенная система не содержит циклических координат. Тогда из уравнений (1.11) следует, что невозмущенные положения равновесия сохраняются, если корни уравнения  $K(q) = 0$  совпадают с корнями уравнения  $Q(q) = 0$ . Однако условия устойчивости этих положений равновесия могут измениться.

Рассмотрим пример линейной системы. Уравнения движения имеют вид

$$x'' + \varepsilon^2 Cx + \varepsilon S(t)x = 0, \quad S(t) = V'(t) \quad (1.12)$$

Если  $C$  – положительно определенная матрица, то невозмущенная система при  $S(t) = 0$  имеет устойчивое положение равновесия  $x = 0$ .

Укороченная система (1.10) приводится к виду

$$q_0' = \varepsilon y_0, \quad y_0' = -(C + D)q_0 \quad (1.13)$$

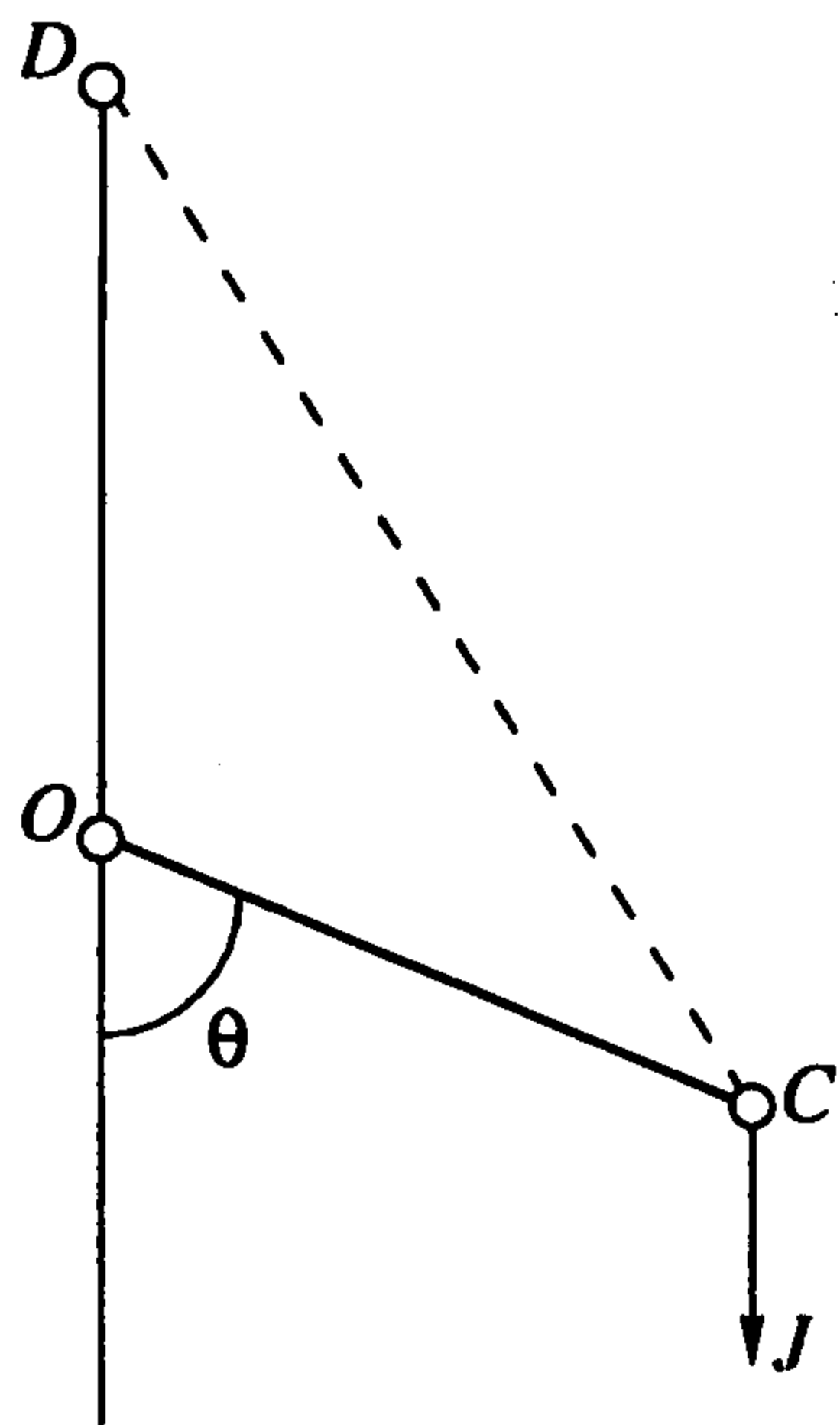
где, по формулам (1.8),  $D$  – матрица с компонентами  $D_{ij} = \langle V_i(t)V_j(t) \rangle$ . Если матрица  $C + D$  невырождена, то система (1.13) сохраняет положение равновесия:  $q_0 = 0$ . Его устойчивость определяется свойствами корней характеристического уравнения

$$\det |Ip^2 + (C + D)| = 0 \quad (1.14)$$

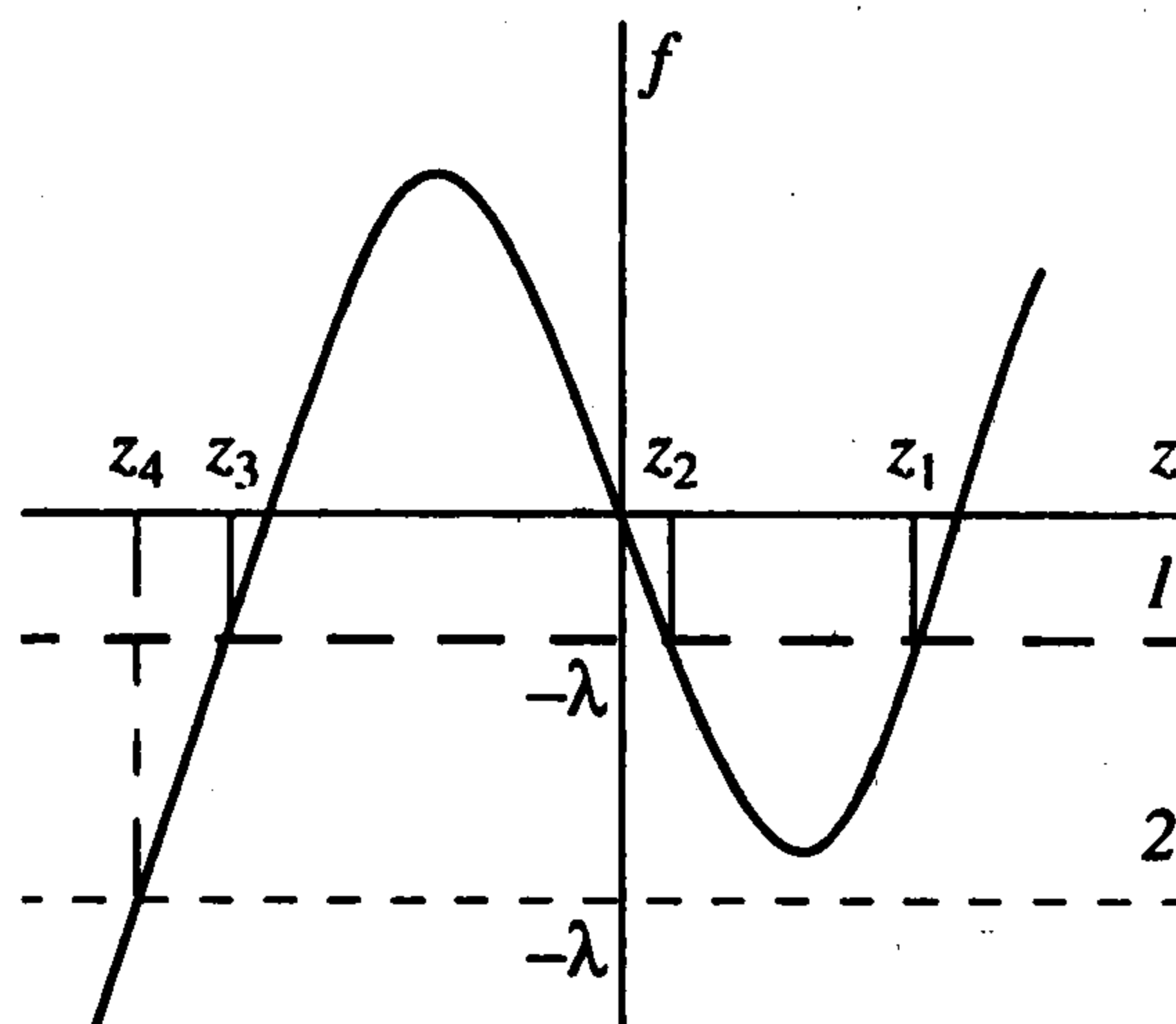
При правильном выборе интенсивности возмущения матрица  $C + D$  становится положительно определенной, даже если матрица  $C$  этим свойством не обладает. Следовательно, неустойчивое положение равновесия может стабилизироваться с помощью быстрого параметрического возмущения [3].

*Случайное возмущение.* Если возмущение – периодический или квазипериодический процесс и его частоты существенно выше собственных частот системы, то возмущение рассматривается как быстропеременный процесс по отношению к движению системы. Малый параметр вводится как отношение частот. Если возмущение – случайный стационарный процесс с непрерывным спектром, то представление о быстропеременном возмущении и введение малого параметра требуют пояснений.

Пусть вектор обобщенных сил представим в виде  $S(t, x) = s(t)Y(x)$ , где  $s(t) = v'(t)$  – скалярный стационарный нормальный процесс с непрерывной спектральной плотностью, представимой в виде дробно-рациональной функции [17]. Определим условия, при которых процесс с непрерывным спектром можно рассматривать как высокочастотный и преобразования сохраняют силу. Из формул (1.6), (1.8) следует, что все



Фиг. 1



Фиг. 2

преобразования справедливы, если  $s(t)$  – интегрируемый процесс, и его спектр представим в виде

$$R_k(\omega) = \omega^{2k} |P_{2n}(i\omega)| |L_{2m}(i\omega)|^{-1} \quad (1.15)$$

где  $k = 1$  и  $L_{2m}(p)$  и  $P_{2n}(p)$  – полиномы степеней  $2m$  и  $2n$ , соответственно, причем  $2m \geq 2(n + k)$ . Таким образом,  $R(0) = 0$ , и при достаточно малых  $\omega < \omega^*$  спектральная плотность  $R(\omega)$  мала. По аналогии с известным определением [17], частоту  $\omega^*$  можно определить как частоту среза.

Если система подвержена кинематическому возбуждению  $r(t)$ , то обобщенная сила  $S(t, x) = s(t)Y(x)$  соответствует силам инерции и порождается ускорением  $s(t) = v'(t) = r''(t)$ . В этом случае как  $v(t)$ , так и  $r(t)$  должны быть процессами с ограниченной дисперсией. Тогда спектр процесса  $s(t)$  имеет вид (1.15) при  $k = 2$ , и для него также существует частота среза  $\omega^*$ . Если частота среза выше собственных частот системы, то процесс  $s(t)$  можно рассматривать как высокочастотный. Из соотношения (1.15) следует, в частности, невозможность стабилизации системы параметрическим возмущением  $s(t)$  типа "белого шума". Способ введения малого параметра для случайных возмущений обсуждается на примере разд. 2.

**2. Устойчивость положений равновесия маятника на упругом подвесе.** Как пример исследуем изменение положений равновесия маятника  $OC$  на упругом подвесе  $DC$  (фиг. 1). Маятник движется в горизонтальной плоскости, т.е. влиянием сил тяжести можно пренебречь. Ось вращения маятника  $O$  расположена ниже точки крепления подвеса  $D$ ; не нарушая общности результатов, упростим вычисления, положив  $OD = OC = l$ . Центр масс маятника расположен в точке  $C$ . Кинетическая энергия системы

$$T = ml^2(\theta')^2 / 2, \text{ т.е. } A(\theta) = ml^2, \quad a(\theta) = 1/(ml^2)$$

где  $m$  – масса маятника,  $\theta$  – угол отклонения от оси  $OD$ . Точка подвеса маятника колеблется с ускорением  $v'(t)$ , направленным вдоль вертикальной оси. В соответствии с принципом Даламбера заменим кинематическое возбуждение инерционным и рассмотрим относительное движение как колебания маятника с неподвижной осью под действием силы инерции  $J = mv'(t)$ , приложенной в центре масс (фиг. 1). Потенциальная энергия упругого подвеса имеет вид

$$\Pi(\theta) = 2ml^2k^2[\cos(\theta/2) - \lambda]^2, \quad k^2 = c/m, \quad \lambda = l_0/2l < 1;$$

$l_0$  – длина недеформированного подвеса. Обобщенная сила соответствует моменту силы инерции, т.е.

$$L(t, \theta) = mv'(t)l \sin \theta$$

Если основание колеблется по гармоническому закону  $r(t) = \alpha \sin \omega t$ , то малый параметр  $\varepsilon$  вводится с учетом соотношений между параметрами системы:  $\alpha \ll l$ ,  $k \ll \omega$ . Рассмотрим способ введения малого параметра для случайных колебаний подвеса, когда нельзя явно выделить амплитуду и частоту возмущения. Предположим для простоты, что  $v'(t)$  – процесс с ограниченной дисперсией,  $\langle [v'(t)]^2 \rangle = D^2$ . Обозначим  $v'(t) = \sigma \omega w(t)$ , где  $\sigma^2 = \langle v'^2(t) \rangle$ ,  $w(t)$  – безразмерное ускорение, такое, что  $\langle w^2(t) \rangle = 1$ . Тогда  $\langle [v'(t)]^2 \rangle = (\sigma \omega)^2$ ,  $\omega = D/\sigma$ . Принимая во внимание соотношения между параметрами, определим  $k/\omega = \varepsilon$ ,  $\sigma/l\omega = \varepsilon \rho$ .

При сделанных предположениях

$$\Pi(\theta) = \varepsilon^2 \Phi(\theta) = 2\varepsilon m l^2 \omega^2 [\cos(\theta/2) - \lambda]^2$$

$$L(t, \theta) = \varepsilon S(t, \theta) = \varepsilon m l^2 \omega^2 \rho w(t) \sin \theta$$

В результате преобразований при учете соотношений (1.9) получим

$$F(\theta) = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \rho^2 \sin^2 \theta$$

Тогда

$$U(\theta) = \Phi(\theta) + F(\theta) = m l^2 \omega^2 \left[ 2 \left( \cos \frac{\theta}{2} - \lambda \right)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \sin^2 \theta \right] \quad (2.1)$$

Экстремумы эффективного потенциала (2.1) находятся из уравнения

$$R(\theta) = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \lambda \right) + \rho^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (2.2)$$

(положительный постоянный множитель опущен). В невозмущенной системе ( $\rho = 0$ ) существуют два положения равновесия, определяемые условием

$$K(\theta) = -2k^2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \lambda \right) = 0; \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 2 \arccos \lambda \quad (2.3)$$

Можно убедиться, что положение равновесия  $\theta_0 = 0$  неустойчиво, а положение  $\theta_1$  устойчиво. Для определения возмущенных положений равновесия преобразуем уравнение (2.2) к виду

$$R(\theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2} [-z + \lambda + \rho^2 z(2z^2 - 1)] = 0, \quad z(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \in [0, 1] \quad (2.4)$$

Система сохраняет положение равновесия  $\theta_0 = 0$ . Можно проверить, что положение  $\theta_0 = 0$  устойчиво, если  $\rho^2 > 1$ . Другие положения равновесия могут быть найдены как корни кубического уравнения (фиг. 2)

$$f(z) = 2\rho^2 z^3 - (1 + \rho^2)z = -\lambda, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (2.5)$$

Элементарный анализ показывает, что при выполнении условия

$$\frac{2}{3\sqrt{6}} (1 + \mu^2)^{3/2} > \mu^2 \lambda, \quad \mu = \frac{1}{\rho} \quad (2.6)$$

уравнение (2.5) имеет три вещественных корня, два из которых положительны. На фиг. 2 эти корни определяются как точки пересечения прямой 1 с графиком функции (2.5). При нарушении этого условия уравнение (2.5) имеет единственный вещественный отрицательный корень, определяемый пересечением прямой 2 с графиком функции (2.5) (фиг. 2). Этот корень не принимается в рассмотрение при анализе устойчивости.

При достаточно малых  $\mu = 1/\rho < 1$  и  $\lambda < 1$  условие (2.6) всегда выполняется, и корни уравнения (2.6), и соответствующие им положения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &\approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \mu^2 \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - \lambda \right), & \theta_1 &\approx \frac{\pi}{2} - \mu^2 \left( 1 - \frac{4}{\sqrt{2}} \lambda \right) \\ z_2 &\approx \mu^2 \lambda, & \theta_2 &\approx \pi - 2\mu^2 \lambda \end{aligned} \quad (2.7)$$

Исследуя устойчивость положений равновесия, получим, что при  $\mu < 1$ ,  $\rho > 1$  устойчивы положение  $\theta_0 = 0$  и положение  $\theta_2 \approx \pi - 2\mu^2 \lambda$ , а положение равновесия  $\theta_1$  неустойчиво.

При достаточно малых  $\rho \ll 1$  условие (2.6) выполняется, но максимальный корень  $z_1 > 1$ . Следовательно, существуют два положения равновесия: неустойчивое положение  $\theta_0 = 0$  и устойчивое положение  $\theta_2$ , соответствующее ми-

нимальному положительному корню  $z_2 \approx \lambda(1 + \rho^2)$ , т.е.  $\theta_2 \approx (\arccos \lambda + \sqrt{2}\rho/4)$ . Таким образом, при  $\rho \ll 1$  влияние слабого быстрого возмущения сводится к незначительному сдвигу устойчивого положения равновесия. Если  $\rho \gg 1$ , то интенсивность возмущения достаточно велика, и появляются новые положения устойчивого равновесия.

**3. Движение шара под действием высокочастотной нагрузки.** Как пример системы с циклическими координатами исследуем качение без скольжения неоднородного весомого шара по гладкой горизонтальной плоскости. Центр тяжести шара  $D$  лежит на оси динамической симметрии, но не совпадает с геометрическим центром  $O$ , и  $OD = d \neq 0$ . В качестве независимых координат выберем координаты центра тяжести  $x_D, y_D$  и углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ , где  $\theta$  – угол нутации между вертикальной осью  $z$  и осью динамической симметрии  $\zeta$ ,  $\psi$  – угол прецессии,  $\varphi$  – угол чистого вращения вокруг оси динамической симметрии  $\zeta$  (фиг. 3). Исследуем движение шара под действием инерционного возбуждения  $J = h\omega^2 \sin \omega t$ , приведенного к центру масс, при условии сохранения безотрывного движения шара по плоскости.

Кинетическая энергия тела определяется выражением [15]

$$2T = (K + Md^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + K\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + Mv_D^2 \quad (3.1)$$

где  $M$  – масса тела,  $C$  – момент инерции относительно оси динамической симметрии, два других главных центральных момента инерции равны  $K$ , скорость движения центра тяжести  $v_D^2 = \dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2$ . Потенциальная энергия шара равна

$$\Pi(\theta) = -Mgd \cos \theta \quad (3.2)$$

сила  $J$  создает вращающий момент вокруг оси нутации (фиг. 3)

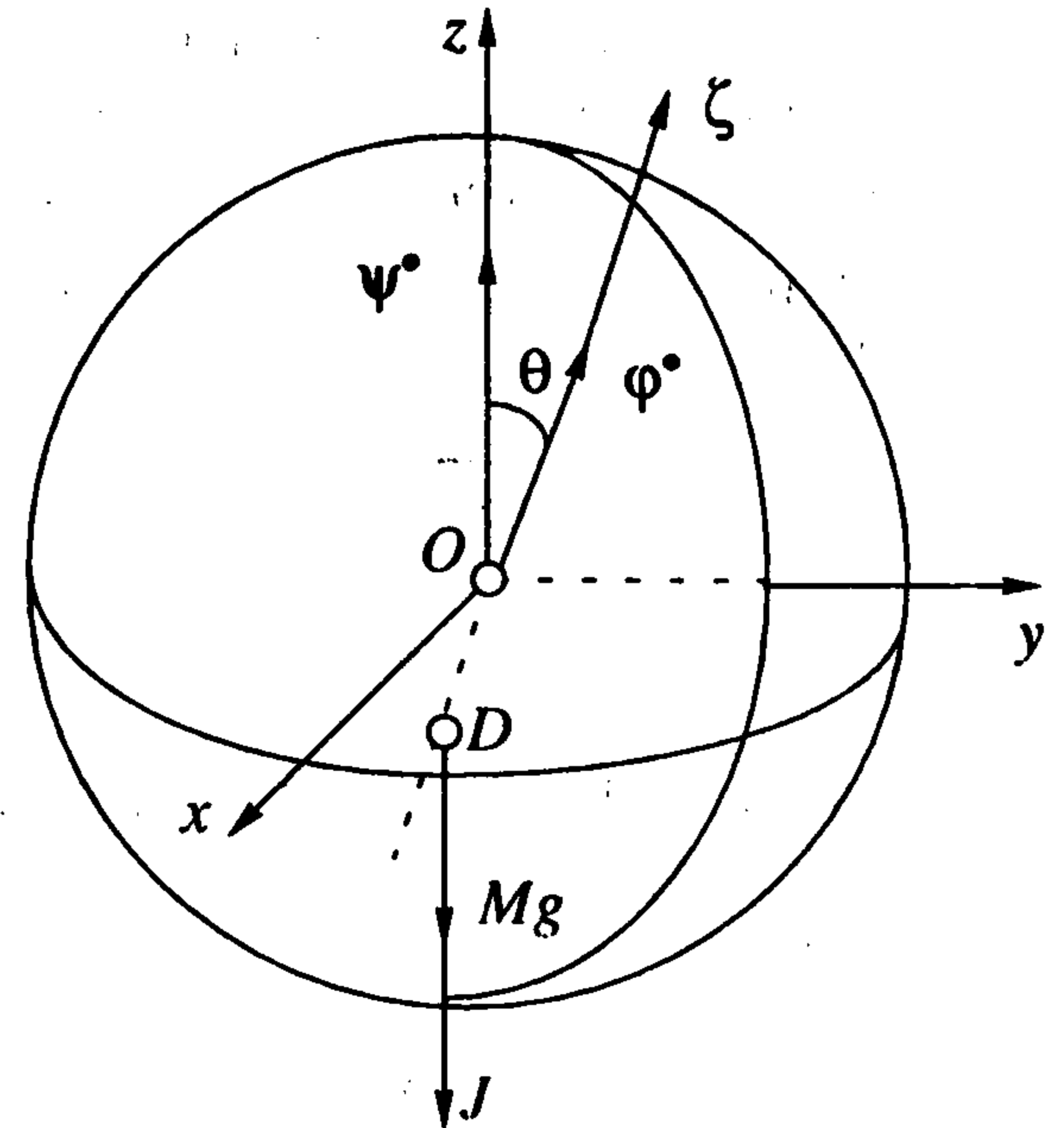
$$Y(\theta) = -Jd \sin \theta = -hd\omega^2 \sin \theta \sin \omega t \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.1) – (3.3) следует, что  $x_D, y_D, \varphi, \psi$  – циклические координаты,  $\theta$  – позиционная координата. Соответствующие им импульсы

$$\begin{aligned} p_\theta &= A(\theta)\dot{\theta}, & A(\theta) &= K + Md^2 \sin^2 \theta \\ p_x &= M\dot{x}_D = m, & p_y &= M\dot{y}_D = n \\ p_\varphi &= C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = G, & p_\psi &= K\dot{\psi} \sin^2 \theta + G \cos \theta = D \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $m, n, G, C$  – постоянные. Внося (3.4) в (3.1) и учитывая (3.2), запишем потенциал Рауса в виде [15]

$$\Pi^*(\theta) = \frac{1}{2K \sin^2 \theta} (D - G \cos \theta)^2 - Mgd \cos \theta + \frac{1}{2M} (m^2 + n^2) \quad (3.5)$$



Фиг. 3

Введем малый параметр  $\varepsilon$ . Предположим, что собственная частота нутационных колебаний шара под действием сил тяжести мала по сравнению с частотой внешнего воздействия, т.е.  $g/d\omega^2 = \varepsilon^2$ . Вводя обычные предположения о соотношениях между параметрами системы, определим

$$\frac{h}{Md} = \varepsilon\mu, \quad \frac{G}{K\omega} = \varepsilon\gamma, \quad \frac{D}{K\omega} = \varepsilon\delta, \quad \frac{Md^2}{K} = \beta$$

Тогда из соотношений (1.8), (3.3) – (3.5) получим

$$Y(\theta) = \varepsilon S(t, \theta), \quad S(t, \theta) = -\omega^2 K \mu \beta \sin \omega t \sin \theta$$

что дает

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \omega^2 K \mu^2 \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{1 + \beta \sin^2 \theta}, \quad \Pi^*(\theta) = \varepsilon^2 \Phi^*(\theta)$$

т.е.

$$\Phi^*(\theta) = \frac{1}{2} \omega^2 K \left[ \frac{(\delta - \gamma u)^2}{1 - u^2} - 2\beta u \right], \quad u = \cos \theta \quad (3.6)$$

(постоянная составляющая в  $\Phi^*(\theta)$  опускается).

Ограничимся детальным исследованием неособого случая  $\sin \theta \neq 0$ ,  $\delta \neq \gamma$  при условии  $\delta\gamma > 0$ . Из уравнений (1.11) и выражения для эффективного потенциала  $U = F + \Phi^*$  получим уравнение для определения положений равновесия

$$R(\theta) = \frac{1}{2} \omega^2 K \sin \theta \left\{ \frac{(\delta - \gamma u)(\gamma - \delta u)}{(1 - u^2)^2} + 2\beta + 2\beta^2 \mu^2 \frac{u}{[1 + \beta(1 - u^2)]^2} \right\} = 0 \quad (3.7)$$

Корни этого уравнения могут быть найдены графически как точки пересечения кривых

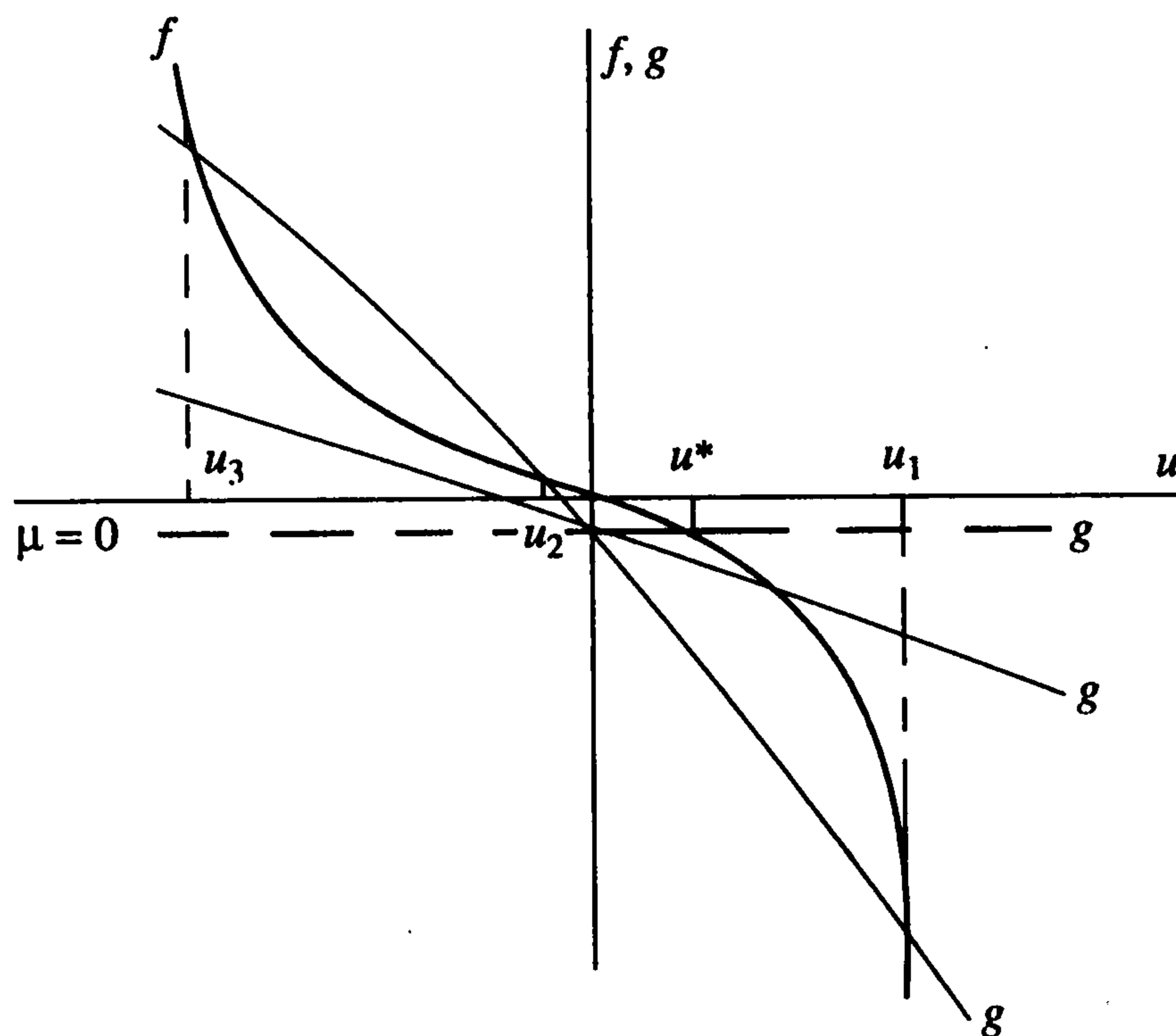
$$f(u) = \frac{(\delta - \gamma u)(\gamma - \delta u)}{(1 - u^2)^2}, \quad g(u) = -2\beta \left\{ 1 + \beta \mu^2 \frac{u}{[1 + \beta(1 - u^2)]^2} \right\} \quad (3.8)$$

Если  $\delta$  и  $\gamma$  – величины одного знака, то при  $\beta > 0$  в невозмущенной системе существует единственное устойчивое положение равновесия  $u^* > 0$ ,  $\theta^* = \arccos u^*$ , соответствующее расположению центра тяжести ниже геометрического центра шара [15] (фиг. 4). При достаточно малых значениях  $\mu$  угол наклона оси  $OD$  уменьшается, но положение равновесия остается единственным и устойчивым. При увеличении параметра  $\mu$  возникают три точки пересечения кривых, которым соответствуют нижнее ( $u_1 > 0$ ), верхнее ( $u_3 < 0$ ) и промежуточное ( $u_2 < 0$ ,  $\theta_2 = \arccos u_2 > \pi/2$ ) положения равновесия.

Найдем приближенное значение  $u_2$  и оценим устойчивость соответствующего положения равновесия. Предполагая, что  $\theta_2 = \pi/2 + \eta$ ,  $\eta \ll 1$ , получим  $u_2 \approx -\eta$  и пренебрежем величиной  $\eta^2$  в уравнении (3.7). Тогда корень  $u_2$  может быть найден из линеаризованного уравнения

$$\delta\gamma + 2\beta + (\rho^2 - \gamma^2 - \delta^2)u = 0; \quad \rho^2 = 2\beta^2 \mu^2 (1 + \beta)^{-2} \quad (3.9)$$

При  $\delta\gamma > 0$  корень  $u_2 = (\gamma^2 + \delta^2 - \rho^2)^{-1}(\delta\gamma + 2\beta) < 0$  существует, если  $\rho^2 > \gamma^2 + \delta^2$ , т.е. интенсивность возмущения велика.



Фиг. 4

Исследуем устойчивость положения  $\theta_2$ . При  $\theta_2 = \pi/2 + \eta$ ,  $\eta \ll 1$  имеем

$$dR/d\theta = -\omega^2 K(\rho^2 - \gamma^2 - \delta^2)/2 < 0$$

т.е. промежуточное положение неустойчиво. В свою очередь, нижнее положение  $\theta < \pi/2$  и верхнее положение  $\theta_3 > \theta_2 > \pi/2$  устойчивы. Это означает, что высокочастотное возбуждение может поддерживать устойчивое движение, при котором центр тяжести шара оказывается выше его геометрического центра. При слабых возмущениях  $\rho^2 < \gamma^2 + \delta^2$  существует единственное нижнее положение равновесия  $\theta^* < \pi/2$ .

Исследуем существование регулярной прецессии при движении шара. Из выражений (3.4) имеем  $\delta = \gamma u + \psi(1 - u^2)$ . В результате преобразований уравнение (3.7) принимает вид

$$-u[\psi^2(1 - c) + 2\beta^2\mu^2(1 + \beta - \beta u^2)^{-2}] = \beta + c\psi\psi'; \quad c = C/K \quad (3.10)$$

Равенство (3.10) рассматривается как условие существования регулярной прецессии при  $|u| < 1$ . Решение  $|u| < 1$  существует, если

$$|\psi^2(1 - c) + 2\beta^2\mu^2(1 + \beta)^{-2}| > |\beta + c\psi\psi'| \quad (3.11)$$

В невозмущенной системе регулярная прецессия существует, если

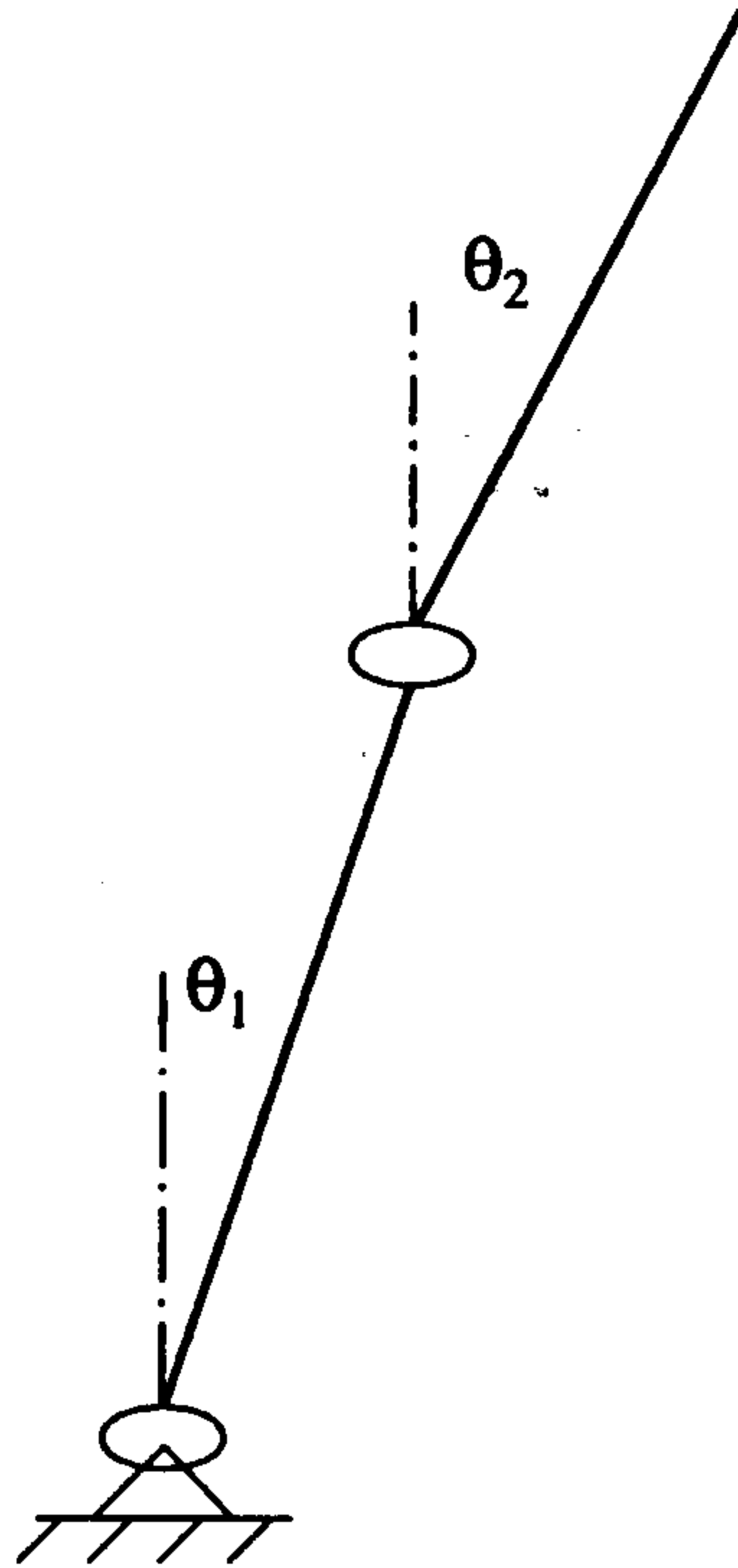
$$\psi^2 |1 - c| > |\beta + c\psi\psi'| \quad (3.12)$$

Высокочастотное воздействие ослабляет условие существования регулярной прецессии, так как возможно выполнение условий

$$\psi^2 |1 - c| < |\beta + c\psi\psi'| < |\psi^2(1 - c) + 2\beta^2\mu^2(1 + \beta)^{-2}| \quad (3.13)$$

Таким образом, высокочастотное воздействие может породить не только новые положения равновесия, но и устойчивые стационарные движения, отсутствующие в невозмущенной системе.

Аналогичный анализ можно провести для случая  $\delta\gamma < 0$ .



Фиг. 5

Рассмотрим особые случаи:

1)  $\theta = 0, u = 1, \delta = \gamma$ . Вычисляя производную от  $R(\theta)$  при  $\theta = 0$ , получим  $dR/d\theta > 0$  при всех значениях параметров, включая  $\mu = 0$  (невозмущенная система);

2)  $\theta = \pi, u = -1, \delta = -\gamma$ . Вычисляя производную от  $R(\theta)$  при  $\theta = \pi$ , получаем, что

$$dR/d\theta > 0, \quad \gamma^2/4 > 2\beta(1 - \beta\mu^2) \quad (3.14)$$

Из неравенств (3.14) следует, что в невозмущенной системе верхнее положение равновесия неустойчиво, если  $\gamma^2/4 < 2\beta$ , т.е. высокочастотное воздействие может стабилизировать неустойчивое положение равновесия.

**4. Возрастание критической нагрузки при быстрой пульсации следящей силы.** Как пример системы, на которую действуют непотенциальные быстропеременные силы, рассмотрим двухзвенный маятник, состоящий из двух одинаковых невесомых стержней длины  $l$  и массы  $m$ , сосредоточенной на конце стержня, соединенных упругими шарнирами жесткости  $c$  и установленных на неподвижном основании (фиг. 5). Следящая сила  $F$  отслеживает положение верхнего стержня. Потеря устойчивости системы на неподвижном основании изучена достаточно подробно [18]. Известно, что при достижении критической нагрузки возникает неустойчивость. При квазипериодических колебаниях основания критическое значение нагрузки повышается [5].

Исследуем влияние пульсации нагрузки на устойчивость системы. Пусть следящая сила имеет вид  $F = F_0 + F_\epsilon(\tau)$ , где  $F_0$  — постоянная составляющая и  $F_\epsilon(\tau)$  — быстроменяющаяся переменная составляющая, удовлетворяющая условиям из разд. 1. Движение происходит в горизонтальной плоскости, влиянием силы тяжести и диссипативными силами пренебрегаем. Полный анализ положений равновесия и их устойчивости достаточно сложен и требует численного анализа, поэтому ограничимся определением критической нагрузки, приводящей к потере упругой устойчивости системы.

Линеаризованные уравнения медленного движения в окрестности положения равновесия  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  имеют вид

$$\begin{aligned} 2ml^2\theta_1'' + ml^2\theta_2'' + (2c - Fl)\theta_1 - (c - Fl)\theta_2 &= 0 \\ ml^2\theta_1'' + ml^2\theta_2'' - c\theta_1 + c\theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где штрих означает производную по медленному времени  $\tau = \epsilon t$ . Вводя с помощью стандартных рассуждений малый параметр  $\epsilon$  и переходя к быстрой переменной  $t$ , приведем систему (4.1) к виду (1.1)

$$\begin{aligned}\theta_1'' + [\epsilon^2(3k^2 - f_0) - \epsilon w(t)]\theta_1 + [\epsilon^2(f_0 - 2k^2) + \epsilon w(t)]\theta_2 &= 0 \\ \theta_2'' + [\epsilon^2(f_0 - 4k^2) + \epsilon w(t)]\theta_1 + [\epsilon^2(3k^2 - f_0) - \epsilon w(t)]\theta_2 &= 0\end{aligned}\quad (4.2)$$

где

$$\epsilon^2 k^2 = c/(ml^2), \quad \epsilon^2 f_0 = F_0/(ml), \quad \epsilon w(t) = F_\epsilon/(ml), \quad w(t) = v'(t)$$

Характеристическое уравнение (1.14), соответствующее системе (4.2), принимает вид

$$[p^2 + (3k^2 - \xi)]^2 - (\xi - 2k^2)(\xi - 4k^2) = 0; \quad \xi = f_0 - 2\sigma^2, \quad \sigma^2 = \langle v^2(t) \rangle \quad (4.3)$$

Исследуя корни уравнения (4.3), получим следующие условия [18]:  
стабилизация

$$p^2 < 0, \quad f_0 < 2(k^2 + \sigma^2)$$

динамическая неустойчивость (флаттер)

$$\text{Im } p^2 \neq 0, \quad 2(k^2 + \sigma^2) < f_0 < 4k^2 + 2\sigma^2$$

статическая неустойчивость (дивергенция)

$$p^2 > 0, \quad f_0 > 4k^2 + 2\sigma^2$$

Таким образом, критическая нагрузка удовлетворяет неравенству

$$f_0 > 2(k^2 + \sigma^2)$$

Очевидно, что критическое значение следящей силы возрастает по сравнению с невозмущенной системой ( $\sigma = 0$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-923) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 97-1140).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Meerkov S. Principle of vibrational control: theory and applications // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. V. 25. № 4. P. 755–762.
2. Bellmann R., Bentsman J., Meerkov S. Stability of fast periodic systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V. 30. № 3. P. 289–291.
3. Kabamda P.T., Meerkov S., Poh E. Pole placement capabilities of vibrational control // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. 43. № 9. P. 1256–1261.
4. Акуленко Л.Д. Асимптотический анализ динамических систем, подверженных высокочастотным воздействиям // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 23–31.
5. Anderson G.L., Tadjbakhsh I.G. Stabilization of Ziegler's pendulum by means of the method of vibrational control // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 143. № 1. P. 198–223.
6. Ковалева А.С. Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 44–52.
7. Ковалева А.С. Об усреднении в многочастотных нелинейных системах при случайных возмущениях // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 30–37.
8. Kao J., Wihstutz V. Characterization of stochastic processes which stabilize linear companion form systems // Stochastic Proc. and their Applications. 2000. V. 89. № 1–2. P. 49–68.

9. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–219.
10. Акуленко Л.Д. Квазистационарные вращательно-колебательные движения двухмассовой системы с вертикально вибрирующим основанием // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 2. С. 51–60.
11. Акуленко Л.Д. Управление относительными движениями маятника на вращающемся основании // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 204–216.
12. Холостова О.В. О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 785–796.
13. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
14. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
15. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
16. Ковалева А.С. О построении последовательных приближений метода возмущений для систем со случайными коэффициентами // 1991. ПММ. Т. 55. Вып. 4. С. 612–619.
17. Первозванский А.А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.
18. Ziegler H. Principles of Structural Stability. L. etc.: Blaisdell. 1968. = Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.

Москва

Поступила в редакцию  
12.III.2001