УДК 531.36:62–50

© 2001 г. В.И. Каленова, В.М. Морозов, Е.Н. Шевелева

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Основанный на линейной теории управления подход к решению задач стабилизации установившихся движений голономных механических систем [1, 2] в сочетании с теорией критических случаев теории устойчивости применяется к решению аналогичных задач для неголономных систем. Предполагается, что управляющие силы могут действовать как по циклическим, так и по позиционным координатам, причем число r независимых управляющих воздействий может быть существенно меньше числа n степеней свободы системы в отличие от многих других работ (см., например, [3–5]), в которых, как правило, $r = n$. Формулируется ряд новых эффективных критериев управляемости и наблюдаемости, основанных на редукции рассматриваемой задачи к задаче меньшей размерности. Проводится анализ устойчивости нулевого решения полной нелинейной системы, замкнутой выбранным управлением. Этот анализ является необходимым этапом решения задачи стабилизации установившегося движения неголономной системы (в отличие от голономной), так как эта система в большинстве случаев не является полностью управляемой.

Некоторые задачи стабилизации установившихся движений неголономных систем рассматривались ранее [6–8], однако вопросы управляемости и наблюдаемости не исследовались.

1. Постановка задачи стабилизации стационарных движений неголономных механических систем. Рассмотрим неголономную механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$. Скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ стеснены $n - l$ $(l < n)$ стационарными неголономными связями

$$\dot{q}_\chi = \sum_{r=1}^{l} b_{\chi r}(q)\dot{q}_r \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее, если не указано иное, индексы принимают следующие значения: $i = 1, \ldots, k$; $p, r, s = 1, \ldots, l$; $\alpha, \beta, \gamma = k + 1, \ldots, l$; $\mu = m + 1, \ldots, n$; $\rho = l + 1, \ldots, m$; $\chi = l + 1, \ldots, n$.

Уравнения движения неголономной механической системы возьмем в форме уравнений Воронца [9]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\theta}{\partial q_r} - \sum_{\chi=l+1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial q_\chi}b_{\chi r} - \sum_{\chi=l+1}^{n}\theta_\chi\sum_{s=1}^{l}\nu_{\chi rs}\dot{q}_s = Q_r + \sum_{\chi=l+1}^{n}Q_\chi b_{\chi r} \tag{1.2}$$

Здесь θ, θ_χ – результаты исключения величин $\dot{q}_\chi$ при помощи соотношений (1.1) из выражений для T, $\partial T/\partial\dot{q}_\chi$, где T – кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}(q)\dot{q}_r\dot{q}_s > 0$$

$$\nu_{\chi rs} = \frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_r} - \sum_{\chi'=l+1}^{n}\left(b_{\chi' r}\frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_{\chi'}} - b_{\chi' s}\frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_{\chi'}}\right)$$

$$\theta_{\chi p} = a_{\chi p} + \sum_{\chi'=l+1}^{n} a_{\chi\chi'} b_{\chi' p}$$

Q_r, Q_χ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_r, q_χ.

Уравнения (1.2) совместно с уравнениями (1.1) представляют замкнутую систему порядка $n + l$ относительно переменных $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l$.

Предположим, что выполнены условия [10]

$$\frac{\partial T}{\partial q_\mu} = 0, \quad Q_\mu = 0, \quad \frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_\mu} = 0, \quad Q_{r\rho} = Q_{r\rho}(q_r, \dot{q}_r, q_\rho)$$

означающие, что последние $n - m$ уравнений неголономных связей (1.1) – связи типа Чаплыгина (первые $m - l$ связей – связи общего вида).

Кроме того, пусть среди обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$ механической системы имеются циклические координаты (ЦК). Следует отметить, что если определение ЦК для голономных консервативных систем одновременно обеспечивает существование циклических интегралов и стационарных движений (СД), то для неголономных систем существует несколько определений ЦК [10]. При этом уравнения движения системы могут не допускать циклических интегралов, но могут допускать СД. В работе принято определение ЦК [10], которое обеспечивает существование СД. Будем предполагать, что координаты q_α – ЦК в смысле принятого определения, т.е.

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial b_{\rho r}}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\chi=l+1}^{n} \theta_{\chi p}\nu_{\chi rs} = 0, \quad Q_{i,\alpha,\rho} = Q_{i,\alpha,\rho}(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_\alpha, q_\rho)$$

Остальные координаты q_i и q_ρ – позиционные.

Будем считать, что обобщенные силы, отвечающие позиционным координатам, представляют сумму потенциальных, диссипативных и управляющих сил; обобщенные силы, действующие по части ЦК ($\alpha = k + 1, \ldots, k + h$), являются только управляющими силами; по остальным ЦК ($\beta = k + h + 1, \ldots, l$) никакие обобщенные силы не действуют. Заметим, что если управляющие силы действуют по всем ЦК, то $h = l - k$. Таким образом, обобщенные силы могут быть представлены в виде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + F_i, \quad Q_\rho = \frac{\partial U}{\partial q_\rho} + F_\rho, \quad Q_\alpha = F_\alpha, \quad Q_\beta = 0$$

Здесь U – силовая функция, Φ – приведенная диссипативная функция, управляющие силы F_j зависят от обобщенных координат q_i и q_ρ и линейно зависят от управляющих воздействий $u^{(1)}(r_1 \times 1)$, $u^{(2)}(r_2 \times 1)$, $u^{(3)}(r_3 \times 1)$, приложенных соответственно по координатам q_i, q_ρ, q_α. В зависимости от каждой конкретной задачи могут рассматриваться те или иные варианты введения управлений $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$.

Информация о значениях q_i, $\dot{q}_i$, $\dot{q}_\alpha$, q_ρ доставляется измерителями, которые располагаются как на самой системе, так и вне ее. Вектор измерений, имеющий размерность $s \times 1$, в общем случае является функцией всех позиционных координат q_i, q_ρ, а также циклических и независимых позиционных скоростей $\dot{q}_\alpha$, $\dot{q}_i$.

Пусть при некоторых начальных условиях возможно установившееся движение системы, такое, что постоянны позиционные координаты и циклические скорости:

$$q_i(t) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i(t) = 0, \quad \dot{q}_\alpha(t) = \dot{q}_{\alpha 0} = \omega_\alpha, \quad q_\rho(t) = q_{\rho 0} \tag{1.3}$$

При этом m постоянных величин $q_{i0}, \dot{q}_{\alpha 0}, q_{\rho 0}$ удовлетворяют m уравнениям, которые здесь не выписаны.

Следовательно, в общем случае СД может оказаться изолированным. При различных дополнительных предположениях относительно коэффициентов уравнений неголономных связей, кинетической энергии и обобщенных сил возможны случаи существования многообразия СД [9, 10]. Будем считать, что на СД управляющие силы равны нулю.

Задача стабилизации СД состоит в том, чтобы надлежащим выбором управляющих воздействий, приложенных как по циклическим, так и по позиционным координатам (или по части этих координат), сделать СД (1.3) асимптотически устойчивым (или просто устойчивым) по отношению к позиционным координатам q_i, q_ρ и позиционным $\dot{q}_i$ и циклическим $\dot{q}_\alpha$ скоростям. Аналогичным образом можно сформулировать задачу об оптимальной стабилизации СД. Особенностью постановки задачи о стабилизации СД неголономных систем (как и задачи устойчивости) является то, что в состав системы уравнений возмущенного движения входят уравнения связей (за исключением систем Чаплыгина).

Введем отклонения

$$x_i = q_i - q_{i0}, \quad y_\alpha = \dot{q}_\alpha - \omega_\alpha, \quad z_\rho = q_\rho - q_{\rho 0} \tag{1.4}$$

и запишем уравнения возмущенного движения на основании уравнений (1.1), (1.2) для переменных $x(k \times 1)$, $y((l-k) \times 1)$, $z((m-l) \times 1)$, выделив линейные члены,

$$\begin{aligned} &A\ddot{x} + C\dot{y} = W_1 x + D_1\dot{x} + P_1 y + V_1 z + F^{(1)}u^{(1)} + D_3^T F^{(2)}u^{(2)} + X(x, \dot{x}, y, z) \\ &C^T\ddot{x} + B\dot{y} = W_2 x + D_2\dot{x} + P_2 y + V_2 z + F^{(3)}u^{(3)} + P_3^T F^{(2)}u^{(2)} + Y(x, \dot{x}, y, z) \\ &\dot{z} = W_3 x + D_3\dot{x} + P_3 y + V_3 z + Z(x, \dot{x}, y, z) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Формулы для элементов матриц $A, B, \ldots$ аналогичны соответствующим формулам, приведенным ранее [10]; X, Y, Z – вектор-функции, содержащие члены порядка выше первого по введенным переменным.

Система (1.5) имеет наиболее общую структуру, из которой как частные случаи могут быть получены уравнения возмущенного движения в окрестности:

1° – положений равновесия голономной системы ($k = l = n = m$, $y \equiv 0$, $z \equiv 0$);

2° – положений равновесия неголономной системы со связями общего вида ($l = k$, $m = n$, $y \equiv 0$);

3° – СД голономных систем ($l = n$, $z \equiv 0$);

4° – СД неголономных систем Чаплыгина ($m = l$, $z \equiv 0$).

При выполнении определенных условий, возникающих в разных задачах, структура уравнений возмущенного движения (1.5) может существенно упрощаться. Наиболее распространенными дополнительными условиями, принятыми при анализе устойчивости СД неголономных систем в случае, когда управляющие силы отсутствуют, являются условия [10]

$$b_{\rho\alpha} = 0 \text{ (условие 1)}, \qquad \sum_{\mu=m+1}^{n} \theta_{\mu\beta}\nu_{\mu\alpha\gamma} = 0 \text{ (условие 2)} \tag{1.6}$$

При выполнении условия 1 в уравнениях (1.5) матрицы P_2, P_3, W_3, V_3 – нулевые, а при выполнении условия 2 нулевыми являются матрицы P_2, P_3. Если же выполнены оба условия 1 и 2, то уравнения, соответствующие ЦК, и уравнения, соответствующие уравнениям неголономных связей, не содержат линейных членов по переменным x_i, y_α, z_ρ, т.е. $P_j = 0$, $W_j = 0$, $V_j = 0$ ($j = 2, 3$).

Уравнение измерений представим в виде

$$\sigma = H_1 x + H_2\dot{x} + H_3 y + H_4 z \tag{1.7}$$

Здесь $\sigma(s \times 1)$ – линейная часть вектора измерений, $H_1, \ldots, H_4$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Линеаризованные уравнения движения в форме (1.5) и уравнения измерений (1.7) являются основными при решении задачи стабилизации установившихся движений неголономных систем со стационарными связями.

Решение задачи стабилизации [1, 2] включает в себя:

1) выяснение принципиальных возможностей стабилизации, которое сводится к исследованию управляемости системы (1.5);

2) определение рационального состава измерительной информации о состоянии системы (о величинах x, y, $\dot{x}$, z), необходимой для построения стабилизирующего управления, которое сводится к анализу наблюдаемости системы (1.5), (1.7);

3) построение самого алгоритма стабилизации, например, по оценке вектора состояния системы, которая строится на основе определенной выше измерительной информации [1];

4) анализ устойчивости нелинейной системы, замкнутой выбранным линейным управлением.

2. Управляемость. Непосредственное применение известных критериев управляемости [13, 14] к системе (1.5), записанной в форме Коши, приводит к необходимости исследования рангов громоздких матриц высокого порядка.

Для исследования управляемости системы (1.5) введем переменные

$$\eta = By + C^T\dot{x} - (D_2 - P_2B^{-1}C^T)x, \quad \zeta = z - (D_3 - P_3B^{-1}C^T)x$$

и преобразуем линеаризованную систему (1.5) к виду

$$\begin{aligned} &S\ddot{x} + N\dot{x} + Kx + M_1\eta + M_2\zeta = F^{(1)}u^{(1)} + D_4^TF^{(2)}u^{(2)} - CB^{-1}F^{(3)}u^{(3)} \\ &\dot{\eta} = R_1x + P_2B^{-1}\eta + V_2\zeta + P_3^TF^{(2)}u^{(2)} + F^{(3)}u^{(3)} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

$$\dot{\zeta} = R_2x + P_3B^{-1}\eta + V_3\xi \qquad (2.2)$$

Здесь

$$S = S^T > 0, \quad S = A - CB^{-1}C^T, \quad D_4 = D_3 - P_3B^{-1}C^T, \quad D_5 = D_2 - P_2B^{-1}C^T$$

$$N = CB^{-1}D_5 + P_1B^{-1}C^T - D_1, \quad K = -W_1 - P_1B^{-1}D_5 + CB^{-1}R_1 - V_1D_4$$

$$M_1 = (CB^{-1}P_2 - P_1)B^{-1}, \quad M_2 = CB^{-1}V_2 - V_1$$

$$R_1 = W_2 + V_2D_3 + P_2B^{-1}D_5, \quad R_2 = W_3 + V_3D_4 + P_3B^{-1}D_5$$

Используя критерий управляемости [14], можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Система (2.1), (2.2) управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} L_1(\lambda) & M_1 & M_2 & F^{(1)} & D_4^TF^{(2)} - & CB^{-1}F^{(3)} \\ -R_1 & \lambda E_{l-k} - P_2B^{-1} & -V_2 & 0 & P_3^TF^{(2)} & F^{(3)} \\ -R_2 & -P_3B^{-1} & \lambda E_{m-l} - V_3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = m, \quad \forall\lambda \in \Lambda$$

$$\Lambda = \{\lambda_i : \det[L(\lambda)] = 0\}, \quad L_1(\lambda) = S\lambda^2 + N\lambda + K$$

$$L(\lambda) = \begin{Vmatrix} L_1(\lambda) & M_1 & M_2 \\ -R_1 & \lambda E_{l-k} - P_2B^{-1} & -V_2 \\ -R_2 & -P_3B^{-1} & \lambda E_{m-l} - V_3 \end{Vmatrix}$$

Заметим, что управляемости системы (2.1), (2.2) (выполнения условий теоремы 1) можно добиться, вообще говоря, при наличии только одного из управляющих воздействий $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$.

При выполнении условий (1.6) специфика структуры системы (1.5) позволяет получить, осуществив редукцию задачи к системам меньшего порядка, новые эффективные критерии управляемости.

Управляемость системы (1.5) при выполнении условия 1. Из структуры уравнений (2.1), (2.2) следует, что при выполнении условия 1 (1.6) система (1.5) распадается на две подсистемы ($R_2 = 0$), вторая из которых, соответствующая уравнениям неголономных связей, неуправляема. Таким образом, при любых управляющих силах система неуправляема по переменным ζ, которые соответствуют позиционным координатам, скорости которых зависимы в силу уравнений связей. В этом состоит особенность систем с неголономными связями по сравнению с голономными.

Применение критерия управляемости [14] к подсистеме (2.1) (при $\zeta \equiv 0$), учет специфики структуры системы и использование эквивалентных преобразований позволяют, осуществив редукцию, доказать следующую теорему, в которой условия управляемости системы порядка $k + l$ сводятся к проверке рангов и матриц порядка k.

Теорема 2. Система (2.1) порядка $k + l$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} K & P_1B^{-1} & F^{(1)} & D_3^TF^{(2)} & CB^{-1}F^{(3)} \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & F^{(3)} \end{Vmatrix} = k, \quad \text{если} \quad \lambda = 0 \in \Lambda_2$$

$$\operatorname{rank}\| L_1(\lambda),\ F^{(1)},\ D_3^TF^{(2)},\ CB^{-1}F^{(3)} \| = k, \quad \forall\lambda \neq 0 \in \Lambda_2$$

$$\left(\Lambda_2 = \{\lambda_i : \det[L_2(\lambda)] = 0\}, \quad L_2(\lambda) = \det\begin{Vmatrix} L_1(\lambda) & -P_1B^{-1} \\ -R_1 & \lambda E_{l-k} \end{Vmatrix}\right)$$

Управляемость системы (1.5) при выполнении обоих условий 1 и 2. Пусть выполнены оба условия (1.6). Разобьем вектор η на части

$$\eta = \left\|\eta_1^T\eta_2^T\eta_3^T\right\|^T \eta_1(h_1\times 1),\ \ \eta_2((h-h_1)\times 1),\ \ \eta_3((l-k-h)\times 1)$$

в соответствии с тем, по каким ЦК приложены управляющие воздействия, а по каким – нет. Здесь h_1 – число независимых управляющих воздействий, приложенных по ЦК. Представим матрицу $F^{(3)}((l-k)\times h_1)$ в виде

$$\operatorname{col}\left\{E_{h_1},\ F^{(4)}_{(h-h_1)\times h_1},\ 0\right\}$$

где $E_{h_1}(h_1\times h_1)$ – единичная матрица.

Заметим, что если управляющие воздействия прикладываются по всем ЦК и все они независимы, $F^{(3)}$ – единичная матрица порядка $l-k$.

Введя новую переменную $\xi = \eta_2 - F^{(4)}\eta_1$, запишем уравнения (2.1) в виде

$$S\ddot{x} + N\dot{x} + Kx - P_1B^{-1}F^{(3)}\eta_1 = F^{(1)}u^{(1)} + D_3^TF^{(2)}u^{(2)} + CB^{-1}F^{(3)}u^{(3)},\ \ \dot{\eta}_1 = u^{(3)} \tag{2.3}$$

$$\dot{\xi} = 0,\ \ \dot{\eta}_3 = 0 \tag{2.4}$$

Очевидно, что подсистема (2.4) неуправляема, причем ей соответствуют нулевые корни характеристического уравнения. Влияние управляющих воздействий $u^{(3)}$, приложенных по ЦК η, на управляемость по позиционным координатам существенно зависит от того, каковы матрицы C и P_1.

Случай $P_1 \equiv 0$, $C \not\equiv 0$. Используя предложенный ранее критерий [14] и учитывая структуру системы и спектр ее собственных значений

$$\lambda \in \Lambda_1, \lambda = 0;\ \ \Lambda_1 = \{\lambda_i : \det[L_1(\lambda)] = 0\}$$

можно показать, что имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Для управляемости системы (2.3) порядка $2k + h_1$ в случае $P_1 \equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы была управляема система порядка $2k$:

$$S\dddot{x} + N\ddot{x} + Kx = F^{(1)}u^{(1)} + D_3^T F^{(2)}u^{(2)} - CB^{-1}F^{(3)}u^{(3)}$$

и выполнялось условие

$$\operatorname{rank}\left\|K, F^{(1)},\ D_3^T F^{(2)}\right\| = k$$

Теорема 4. Система (2.3) порядка $2k + h_1$ в случае $P_1 \equiv 0$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\text{а) } \operatorname{rank}\left\|K, F^{(1)}, D_3^T F^{(2)}\right\| = k,\ \text{ б) } \operatorname{rank}\left\|L_1(\lambda), CB^{-1}F^{(3)}, F^{(1)}, D_3^T F^{(2)}\right\| = k,\ \ \forall\lambda \neq 0 \in \Lambda_1$$

Для одной из наиболее распространенных постановок задачи об управлении системой с ЦК [15], когда управляющие воздействия прикладываются только по ЦК (или их части), имеет место.

Следствие 1. Если управляющие силы действуют только по ЦК ($F^{(1)} \equiv 0$, $F^{(2)} \equiv 0$), то система (2.3) порядка $2k + h_1$ в случае $P_1 \equiv 0$ управляема тогда и только тогда, когда

$$\det K \neq 0 \ \text{ и } \operatorname{rank}\left\|L_1(\lambda),\ CB^{-1}F^{(3)}\right\| = k,\ \ \forall\lambda \neq 0 \in \Lambda_1$$

Случай $P_1 \equiv 0$, $C \equiv 0$. В этом случае система (2.3) расщепляется на две независимые подсистемы, причем вторая является полностью управляемой.

Следствие 2. В случае $P_1 \equiv 0$, $C \equiv 0$ система (2.3) порядка $2k + h_1$ управляема тогда и только тогда, когда

а) $\operatorname{rank}[L_1(\lambda), F^{(1)}, D_3^T F^{(2)}] = k,\ \ \forall\lambda \in \Lambda_1$ либо

б) управляющие воздействия прикладываются по всем позиционным координатам, скорости которых независимы в силу уравнений связей ($F^{(1)} = E_k$).

Таким образом, для управляемости системы (2.3) в случае $P_1 \equiv 0$, $C \equiv 0$ необходимо прикладывать управляющие воздействия по позиционным координатам, причем управляемости можно достичь приложением управляющих воздействий как по тем позиционным координатам, скорости которых независимы, так и по позиционным координатам, скорости которых зависимы в силу уравнений связей.

Случай $P_1 \neq 0$, $C \equiv 0$. В этом случае систему (2.3) можно рассматривать как систему, состоящую из последовательно соединенных подсистем, одна из которых, очевидно, управляема. Тогда, вводя вспомогательный вектор управления w порядка h_1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. Для управляемости системы (2.3) порядка $2k + h_1$ в случае $C \equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы была управляема следующая система порядка $2k$:

$$S\ddot{x} + N\dot{x} + Kx = F^{(1)}u^{(1)} + D_3^T F^{(2)}u^{(2)} + P_1 B^{-1}F^{(3)}w \tag{2.5}$$

Используя полученные ранее результаты [16], можно показать, что система (2.5) управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\|L_1(\lambda), F^{(1)}, D_3^T F^{(2)}, P_1 B^{-1}F^{(3)}\right\| = k,\ \ \forall\lambda \in \Lambda_1$$

Случай $P_1 \neq 0$, $C \neq 0$. В этом случае утверждение о сведении вопроса об управляемости исходной системы (2.3) к анализу управляемости редуцированной системы меньшего порядка, аналогичного теореме 3, получить не удается. Имеет место теорема, доказываемая аналогично теореме 4.

Теорема 6. Система (2.3) порядка $2k + h_1$ управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\|L_1(\lambda), F^{(1)}, D_3^T F^{(2)}, (\lambda C - P_1)B^{-1}F^{(3)}\right\| = k,\ \ \forall\lambda \in \Lambda_1, \lambda = 0$$

Теперь, используя теорему 6, можно доказать следующую теорему о редукции.

Теорема 7. Система (2.3) порядка $2k + h_1$ управляема тогда и только тогда, когда наблюдаема система

$$S\ddot{x} + N^T\dot{x} + K^T x = 0$$

порядка $2k$ по измерению

$$\sigma = H_1 x + H_2 \dot{x};\ H_1 = \begin{Vmatrix} F^{(1)T} \\ F^{(2)T} D_3 \\ -F^{(3)T} B^{-1} P_1^T \end{Vmatrix},\ H_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -F^{(3)T} B^{-1} C^T \end{Vmatrix}$$

Следствие. Если управляющие силы действуют только по всем ЦК и они независимы ($F^{(1)} = 0$, $F^{(2)} = 0$, $F^{(3)} = E_{l-k}$), то система (2.3) порядка $2k + h_1$ управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\|L_1(\lambda), C\lambda - P_1\| = k,\quad \forall\lambda \in \Lambda_1$$

Аналогичные теоремы о редукции задачи управляемости и критерии управляемости можно сформулировать при выполнени условия 2.

3. Наблюдаемость. Для решения задачи стабилизации неголономных механических систем путем формирования управления в виде линейной обратной связи необходимо иметь информацию о состоянии системы, которая доставляется различными измерительными устройствами. Практический интерес представляет вопрос о минимальном количестве доступной измерительной информации, необходимой для определения полного вектора состояния системы. Следует иметь в виду, что измерение позиционных координат, позиционных скоростей и циклических скоростей проводится посредством разных датчиков.

При выполнении условий 1 и 2 специфика структуры системы позволяет, так же как при анализе управляемости, осуществив редукцию задачи, получить новые более простые и эффективные критерии наблюдаемости.

Здесь ограничимся лишь рассмотрением условий наблюдаемости системы (1.5) в случае, когда выполнены условия 1 и 2 по измерениям

$$\sigma_1 = H_1 x + H_2 \dot{x},\ \sigma_1(s_1 \times 1) \tag{3.1}$$

$$\sigma_2 = H_3 y,\ \sigma_2(s_2 \times 1) \tag{3.2}$$

Предполагается, что матрицы $H_1(s_1 \times k)$, $H_2(s_1 \times k)$, $H_3(s_2 \times (l-k))$ – полного ранга.

Теорема 8. Для того чтобы система (1.5), (3.1) была наблюдаема, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} L_1(\lambda) \\ H_1 + \lambda H_2 \end{Vmatrix} = k,\ \forall\lambda \in \Lambda_1;\ \operatorname{rank} H_1 = k,\ \operatorname{rank}\| P_1 B^{-1} \quad V_1 \| = m - k \tag{3.3}$$

Для доказательства удобно ввести, как и в начале разд. 2, переменные ζ, η, а также переменную $\chi = P_1 B^{-1}\eta + V_1\zeta$ и представить систему (1.5) в виде

$$S\ddot{x} + N\dot{x} + Kx - \chi = 0;\ \dot{\chi} = 0$$

Важно подчеркнуть, что для выполнения условий (3.3) необходимо, чтобы выполнялось равенство $s_1 = k$ (число s_1 измерений (3.1) равно числу позиционных координат x) (т.е. необходимо измерять все позиционные координаты). Для того чтобы из наблюдаемости вектора χ следовала наблюдаемость переменных η, ς, необходимо, чтобы $k \geqslant m - k$, т.е. число k позиционных координат должно быть не меньше суммы числа циклических координат и числа неголономных связей общего вида.

Очевидно, что система (1.5) ненаблюдаема по измерению только позиционных скоростей ($H_1 \equiv 0$). Можно показать, что полной наблюдаемости системы (1.5) не может быть и по измерению (3.2).

Замечание. В задаче стабилизации до неасимптотической устойчивости стационарных движений неголономной механической системы нет необходимости в оценке *всего* вектора состояния. Поэтому может оказаться целесообразным оценивание только той части вектора циклических скоростей (см. разд. 2), по которой вводится управляющее воздействие.

В случае, когда измеряются σ_1, σ_2, первое и второе условия наблюдаемости теоремы 8 сохраняются, а третье имеет вид

$$\operatorname{rank}\left\| \begin{matrix} P_1B^{-1} & V_1 \\ H_3 & 0 \end{matrix} \right\| = m - k$$

4. Алгоритмы стабилизации стационарных движений и исследование устойчивости замкнутой системы. В общем случае исходная линеаризованная система (1.5), (1.7) может быть управляемой и наблюдаемой. Тогда в ней всегда можно построить управление в виде обратной связи по оценке вектора состояния таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость нулевого решения полной замкнутой нелинейной системы.

Однако, как указывалось в разд. 2, 3, система (1.5), (1.7) в наиболее распространенных случаях не является полностью управляемой и наблюдаемой. Поэтому обеспечить асимптотическую устойчивость стационарного движения (1.3) введением обратной связи по оценке вектора состояния, вообще говоря, невозможно. В этих случаях, построив управление для управляемой подсистемы, необходимо провести анализ устойчивости нулевого решения полной замкнутой нелинейной системы (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению в данном случае неприменима).

Пусть выполнены условия 1 и 2. Как показано в разд. 2, система (1.5) расщепляется на две подсистемы. Одной из них соответствуют нулевые корни характеристического уравнения. Если выполнены условия теорем 4–6, подсистема (2.3) – управляема и для нее можно построить управление в виде

$$u^{(j)} = -K_{j1}x - K_{j2}\dot{x} - K_{j3}\eta_1, \quad j = 1,2,3 \tag{4.1}$$

где K_{ji} – постоянные матрицы соответствующих размеров, выбранные из условий асимптотической устойчивости системы (2.3), замкнутой управлением (4.1).

При выполнении условий наблюдаемости теоремы 8 существует возможность формирования линейной обратной связи по оценке вектора состояния системы в виде

$$u^{(j)} = -K_{j1}\tilde{x} - K_{j2}\dot{\tilde{x}} - K_{j3}\tilde{y}, \quad j = 1,2,3 \tag{4.2}$$

$\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{y}$ – оценки векторов $x, \dot{x}, y$, полученные, например, из алгоритма оценивания

$$\dot{\tilde{w}} = A_w\tilde{w} + L_w(\sigma - C_w\tilde{w}) + B_w u, \quad w = \operatorname{col}\left\lfloor x^T, \dot{x}^T, y^T, z^T \right\rfloor \tag{4.3}$$

Здесь $\sigma = C_w w$ – измерение, по которому система наблюдаема. Матрица коэффициентов усиления L_w определяется из какого-либо критерия малости ошибки оценки $\Delta w = w - \tilde{w}$. Ошибка оценки Δw подчиняется уравнению

$$\Delta\dot{w} = (A_w - L_w C_w)\Delta w$$

которое при наличии наблюдаемости системы может иметь наперед заданный характеристический многочлен за счет соответствующего выбора постоянной матрицы коэффициентов усиления фильтра L_w. В частности, при наличии случайных погрешностей измерений матрица L_w может выбираться из условий минимизации дисперсии ошибки оценки Δw. Замкнутая управляемая система в этом случае описывается соотношениями (2.3), (4.2), (4.3).

Исследуем устойчивость нулевого решения полной замкнутой линейным управлением системы (2.1), (2.2) при условии, что подсистема (2.3) полностью управляема и управления $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ имеют вид (4.2).

Характеристическое уравнение линейной системы (2.1), (2.2), замкнутой управлением (4.2), имеет $m-(k+h_1)$ нулевых корней, а остальные лежат в левой полуплоскости. Можно показать, что рассматриваемая система приводится к виду, который полностью отвечает особенному случаю нескольких нулевых корней, и выполняется теорема Ляпунова – Малкина [10, 17], согласно которой нулевое решение системы устойчиво. При этом всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t\to\infty$ к одному из возможных СД.

Заметим, что вопросы об устойчивости полной нелинейной системы, замкнутой линейным управлением, действующим только по циклическим координатам или их части, при условиях 1 и 2 рассматривались ранее [8].

5. Пример. Рассмотрим классическую задачу о движении саней Чаплыгина по наклонной плоскости [9]. Тяжелое твердое тело опирается на наклонную плоскость P тремя ножками, две из которых абсолютно гладкие, а третья снабжена полукруглым лезвием; проекция центра масс тела на плоскость P лежит на прямой, перпендикулярной к лезвию и проходящей через точку K соприкосновения лезвия с плоскостью P. В качестве обобщенных координат примем декартовы координаты ξ_1, ξ_2 (ось ξ_1 параллельна горизонтальной плоскости, ось ξ_2 направлена вверх по опорной плоскости P) точки K и угол поворота φ тела вокруг прямой, перпендикулярной плоскости P. Неголономная связь, выражающая условие отсутствия скольжения тела в направлении, ортогональном плоскости лезвия, описывается уравнением $\dot\xi_2=\dot\xi_1\operatorname{tg}\varphi$. Функция Лагранжа имеет вид

$$L=\frac{m}{2}\left[(\dot\xi_1+l\dot\varphi\cos\varphi)^2+(\dot\xi_2+l\dot\varphi\sin\varphi)^2+k^2\dot\varphi^2\right]-mg\sin\alpha(\xi_2-l\cos\varphi)$$

Здесь m – масса, k – радиус инерции, α – угол наклона плоскости, l – расстояние от проекции центра масс на плоскость P до точки K. Как было отмечено [10], рассматриваемая связь не является чаплыгинской. Будем полагать, что по позиционной φ и циклической ξ_1 координатам действуют управляющие силы. Можно убедиться, что уравнения движения допускают стационарное движение

$$\varphi(t)=\varphi_0\ \ (\varphi_0=0,\pi),\ \ \dot\varphi(t)=0,\ \ \dot\xi_1=\nu,\ \ \xi_2=\xi_{20} \tag{5.1}$$

представляющее собой равномерное поступательное движение тела со скоростью ν, при этом лезвие движется параллельно оси ξ_1. В данном случае условие 1 выполнено только на стационарном движении. Линеаризованные в окрестности этого стационарного движения уравнения в форме Воронца имеют вид (1.5)

$$\rho^2\ddot x+l\delta\ddot y+gl\delta\sin\alpha x=b_1u_1$$
$$l\delta\ddot x+\dot y+g\sin\alpha x=b_2u_3$$
$$\dot z=\nu x$$

Здесь

$$x=\varphi-\varphi_0,\ \ y=\dot\xi_1-\nu,\ \ z=\xi_2-\xi_{20};\ \ \delta=\cos\varphi_0,\ \ \rho^2=l^2+k^2$$

b_1u_1, b_2u_3 – линейные части управляющих воздействий по позиционной и циклической коориначам соответственно.

Согласно теореме 1 система управляема, если $b_1b_2\nu\neq 0$. Это означает, что положение равновесия не является управляемым ($\nu\neq 0$) и что управление должно быть введено как по позиционной, так и по циклической координатам.

Тогда можно построить управление в виде обратной связи по всем переменным x, $\dot{x}$, y, z, обеспечивающее асимптотическую устойчивость решений (5.1) для полной нелинейной системы уравнений возмущенного движения (по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [17]).

Если управление введено только по циклической координате ($u_1 \equiv 0$), то полной управляемости нет и, вводя переменные

$$\zeta = l\delta g \sin\alpha z + \nu(\rho^2 \dot{x} + \delta l y), \quad \eta = l\delta \dot{x} + y$$

систему можно привести к виду (2.1), (2.2)

$$k^2 \ddot{x} = -\delta l u_2, \quad \dot{\eta} = -g\sin\alpha x + u_2, \quad \dot{\zeta} = 0$$

По теореме 2 подсистема (2.1) по переменным x, $\dot{x}$, η управляема, если $l \sin \alpha \neq 0$. Построив управление в виде (4.1), можно обеспечить в силу теоремы Ляпунова – Малкина [17] устойчивость решений (5.1) по всем переменным x, $\dot{x}$, y, z для полной нелинейной системы уравнений возмущенного движения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00391) и программы "Университеты России" (991736).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каленова В.И., Морозов В.М., Салмина М.А.* К задаче стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 707–714.
2. *Каленова В.И., Морозов В.М., Салмина М.А.* Управляемость и наблюдаемость в задаче стабилизации механических систем с циклическими координатами // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 959–967.
3. *Bloch A.M., Reyhanoglu M., McClamroch N.H.* Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems // IEEE, Trans. on Automat. Control. 1992. V. 37. № 11. P. 1746–1757.
4. *Sordalen O.J., Egeland O.* Exponential stabilization of nonholonomic chained systems // IEEE, Trans. on Automat. Control. 1995. V. 40. № 1. P. 35–49.
5. *Матюхин В.И.* Стабилизация движений механических систем с неголономными связями // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 725–735.
6. *Красинская Э.М.* К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 302–309.
7. *Красинский А.Я.* Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 194–202.
8. *Красинский А.Я.* О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 939–950.
9. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
10. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
11. *Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н.* Устойчивость движения одноколесного велосипеда // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 49–58.
12. *Морозов В.М., Каленова В.И., Шевелева Е.Н.* Об устойчивости и стабилизации движения одноколесного экипажа (моноцикла) // Докл. науч. шк.-конф. "Мобильные работы и мехатронные системы". М.: Ин-т механики МГУ, 1999. С. 31–43.
13. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1969. = *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
14. *Hautus M.L.J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. 1969. V. 72. P. 443–448.
15. *Румянцев В.В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966–976.
16. *Laub Alan J., Arnold F.F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models // IEEE Trans. on Automat. Control. 1984. V. 29. № 2. P. 163–165.
17. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Москва.
e-mail: kalenova@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
19.VII.2000