

УДК 539.3

© 2001 г. И.В. Панферов

НЕСИММЕТРИЧНАЯ ТЕМПЕРАТУРНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Решается задача о равномерном нагреве двухслойной пластины. Исследуемый трансверсально-изотропный упругий слой (мягкая пластина) находится в идеальном контакте с абсолютно жестким слоем, деформируемым только за счет теплового расширения. Обобщенно-плоская температурная задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния исследуемого мягкого анизотропного слоя на основе уравнений смешанной задачи теории упругости. На концах пограничного слоя мягкой пластины (контактный слой малой толщины) не ставятся условия. На остальной части концов исследуемой мягкой пластины граничные условия соответствуют свободной границе. Сформулированная задача имеет ограниченное гладкое решение. В отличие от описанного ранее подхода [1] точное решение предлагается искать в виде ординарных рядов Фурье по одной продольной координате. Используются также решения в полиномах. Показано, что наличие этих решений в полиномах позволяет существенным образом усилить сходимость рядов Фурье.

Ранее [1] для решения симметричной температурной задачи для трансверсально-изотропного упругого слоя была предложена модификация метода Матье.

1. Метод решения. Решается задача о равномерном нагреве двухслойной пластины. Исследуемый трансверсально-изотропный упругий слой (мягкая пластина) находится в идеальном контакте с абсолютно жестким слоем, деформируемым только за счет теплового расширения. Подразумевается, что исследуемый слой из анизотропного материала практически не влияет на другой слой в силу своей относительно малой жесткости.

Обобщенно-плоская температурная задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропной мягкой пластины длиной $2L$ и толщиной H

$$|x'| \leq L, \quad 0 \leq y' \leq H$$

на основе уравнений смешанной задачи теории упругости.

Мягкая пластина, вообще говоря, ограничена вдоль оси v , перпендикулярной к осям, направленным по длине и толщине пластины.

Для деформации вдоль этой оси имеем

$$\varepsilon_v = \lambda_0 T \tag{1.1}$$

где λ_0 – коэффициент теплового расширения изотропного абсолютно жесткого слоя, $T = \text{const}$ – приращение температуры.

В дальнейшем будем использовать безразмерные декартовы координаты x, y , отнесенные к L . Тогда $y = 0$ – боковая поверхность исследуемого слоя, $x = \pm 1$ – его концы, а $y = h$ – поверхность контакта с абсолютно жестким слоем ($h = H/L$).

Запишем связь между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}/2$

исследуемого трансверсально-изотропного материала для случая обобщенно-плоской деформации при учете соотношения (1.1)

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu_0\sigma_y + E(1 + \nu)\Delta\lambda T + E\lambda_0 T \quad (1.2)$$

$$E\varepsilon_y = \omega\sigma_y - \nu_0\sigma_x + E[\lambda_y + \nu_0(1 - \nu)\Delta\lambda]T, \quad E\varepsilon_{xy} = \gamma_0\sigma_{xy}$$

$$E = \frac{E_x}{1 - \nu^2}, \quad \omega = \frac{k - (k\nu')^2}{1 - \nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{k\nu'}{1 - \nu}, \quad k = \frac{E_x}{E_y}$$

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{1 - \nu^2}, \quad \gamma = \frac{E_x}{G}, \quad \Delta\lambda = \lambda_x - \lambda_0$$

Здесь принято, что ось изотропии (симметрии) материала направлена по оси y ; E_x , E_y – модули упругости по оси x и y ; G – модуль сдвига для плоскости (x, y) ; ν , ν' – коэффициенты Пуассона; λ_x , λ_y – коэффициенты теплового расширения соответственно по осям x и y . Коэффициент ν характеризует поперечное сжатие в плоскости изотропии (x, y) при растяжении в этой плоскости, ν' – то же, при растяжении в направлении оси y [2].

Напряжение σ_y определяется из уравнения (1.1)

$$\sigma_y = \nu\sigma_x + k\nu'\sigma_y - E_x\Delta\lambda T$$

Уравнения анизотропной теории упругости при учете соотношений (1.1), (1.2) запишем в форме

$$\omega \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \mu = \gamma_0 - 2\nu_0$$

Граничные условия на боковой поверхности $y = 0$ и на контактной поверхности $y = h$ имеют вид

$$y = 0: \sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \quad (1.4)$$

$$y = h: \varepsilon_x = \lambda_0 T, \quad \partial W / \partial x = 0 \quad (1.5)$$

где W – безразмерное перемещение (отнесенное к L) по оси y .

Последнее соотношение (1.5) сводится к равенству

$$y = h: \int_0^x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dx = (\mu + \nu_0)\sigma_{xy}$$

На концах исследуемого слоя отсутствуют нагрузки

$$x = \pm 1: \sigma_x = \sigma_{xy} = 0 \quad (1.6)$$

Решение задачи (1.1) – (1.6), предположительно, имеет особенность (бесконечную) в угловых точках $(x = \pm 1, y = h)$ исследуемого анизотропного слоя. Найдем ограниченное гладкое напряженно-деформированное состояние исследуемого слоя, которое совпадает с решением системы (1.1) – (1.6) всюду, за исключением некоторой малой области угловых точек $(x = \pm 1, y = h)$.

Задача формулируется следующим образом.

Условно разделим исследуемый слой на полосы $S_n: \{y_n \geq y \geq y_{n-1}\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, где $y_0 = 0$, $y_N = h$, а N – общее количество полос.

Пластина S_N – тонкий контактный слой с априорно заданной малой толщиной

$\sigma_N \ll h$. В этом слое требуется найти точное решение уравнения (1.3), соответствующее внутренней смешанной температурной задаче, т.е. это решение должно удовлетворять только граничным условиям на боковых поверхностях $y = h - \sigma_N$ и $y = h$. Этот слой будем называть пограничным [1].

В других слоях требуется найти точное решение температурной задачи, позволяющее удовлетворить соответствующим граничным условиям на боковых поверхностях $y = y_{n-1}$, $y = y_n$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) и интегральным граничным условиям на концах $x = \pm 1$, которые соответствуют свободной границе. Вообще говоря, эти слои могут иметь различные толщины $\delta_n = y_n - y_{n-1}$.

Точное решение сформулированной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= M_6^{(n)}(6x^2\xi_n^2 - \mu\xi_n^4) + N_6^{(n)}(x^4 - 1 - \omega\xi_n^4) + M_4^{(n)}(x^2 - 1 - \mu\xi_n^2) - \\ &- N_4^{(n)}\omega\xi_n^2 + M_2^{(n)} + D_5^{(n)}(3x^2\xi_n - \mu\xi_n^3) + D_3^{(n)}\xi_n + \Sigma_1 \\ \sigma_y^{(n)} &= M_6^{(n)}\left[\xi_n^4 - \left(x^4 - \frac{1}{5}\right)\frac{1}{\omega}\right] + N_6^{(n)}\left[6x^2\xi_n^2 - \frac{\mu}{\omega}\left(x^4 - \frac{1}{5}\right)\right] + \\ &+ M_4^{(n)}\xi_n^2 + N_4^{(n)}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - D_1^{(n)}\xi_n + D_5^{(n)}\xi_n^3 - \Sigma_2 \\ \sigma_{xy}^{(n)} &= -4M_6^{(n)}x\xi_n^3 - 4N_6^{(n)}x^3\xi_n - 2M_4^{(n)}x\xi_n + D_1^{(n)}x - 3D_5^{(n)}x\xi_n^2 + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi mx) \cdot \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m}^{(n)} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m}\xi_n) + R_{2i,m}^{(n)} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m}\xi_n)]\kappa_i \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\Sigma_l = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi mx) \cdot \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m}^{(n)} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m}\xi_n) + R_{2i,m}^{(n)} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m}\xi_n)] [l-1 + (2-l)\kappa_i^2]$$

$$\alpha_{i,m} = \pi m \kappa_i, \quad \xi_n = y - y_{n-1}, \quad y_0 = 0, \quad y_N = h, \quad 0 \leq \xi_n \leq \delta_n$$

$$2\kappa_i^2 = \mu - (-1)^i (\mu^2 - 4\omega)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \quad \kappa_i > 0$$

Здесь $\sigma_\alpha^{(n)} = \sigma_\alpha^{(n)}(x, y)$, а $R_{j,m}^{(n)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $M_{2j}^{(n)}$ ($j = 1, 2, 3$), $N_{2j}^{(n)}$ ($j = 2, 3$), $D_1^{(n)}$, $D_3^{(n)}$, $D_5^{(n)}$ – постоянные, подлежащие определению в процессе решения.

Для трансверсально-изотропного материала с ярко выраженной анизотропией можно принять, что $\mu > 2\sqrt{\omega}$.

Для пограничного слоя полагаем

$$M_6^{(N)} = N_6^{(N)} = 0 \quad (1.8)$$

Условия сопряжения слоев запишем в форме

$$y = y_{n-1}: \quad \sigma_x^{(n)} = \sigma_x^{(n-1)}, \quad \sigma_y^{(n)} = \sigma_y^{(n-1)} \quad (1.9)$$

$$y = y_{n-1}: \quad \sigma_{xy}^{(n)} = \sigma_{xy}^{(n-1)}, \quad \int_0^x \frac{\partial \sigma_x^{(n)}}{\partial y} dx = \int_0^x \frac{\partial \sigma_x^{(n-1)}}{\partial y} dx \quad (1.10)$$

$$n = 2, 3, \dots, N$$

Первое равенство в (1.9) следует из непрерывности по y деформации ϵ_x . Второе равенство в (1.10) означает, что величина dW/dx непрерывна по координате y .

Граничное условие (1.5) на поверхности контакта исследуемого мягкого анизотропного слоя с жесткой пластиной принимает вид

$$y = h: \quad \epsilon_x^{(N)} = \lambda_0 T, \quad \int_0^x \frac{\partial \sigma_x^{(N)}}{\partial y} dx = (\mu + \nu_0) \sigma_{xy}^{(N)} \quad (1.11)$$

Перепишем условие (1.4) на свободной поверхности

$$y = 0: \sigma_y^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0 \quad (1.12)$$

Запишем интегральные граничные условия на концах $x = \pm 1$ при учете симметрии напряжений по координате x .

$$\int \sigma_x^{(n)}(1, y) dy = \int \sigma_x^{(n)}(1, y) \xi_n dy = \int \sigma_{xy}^{(n)}(1, y) dy = 0 \quad (1.13)$$

$$n = 1, 2, \dots, N - 1$$

В (1.13) верхний и нижний пределы интегрирования соответственно равны y_n и y_{n-1} . Из соотношений (1.7) следует, что третье условие (1.13) автоматически удовлетворяется.

Выписанные выше постоянные в формулах (1.7) определяются из уравнений (1.8) – (1.13).

Наличие частных решений в полиномах уравнения (1.3) позволяет усилить сходимость рядов Фурье в (1.7).

Кратко укажем метод составления бесконечной системы алгебраических уравнений для определения искомых постоянных.

Используются следующие разложения функций в ряды Фурье:

$$2x^2 - x^4 = \frac{7}{15} + 48 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(\pi mx)}{(\pi m)^4}$$

$$x^3 - x = 12 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(\pi mx)}{(\pi m)^3} \quad (1.14)$$

Функциональные уравнения (1.9), первое уравнение (1.11) и первое уравнение (1.12) разлагаются по базовым функциям $x^2, 1, \cos(\pi mx)$. Это означает, что в этих уравнениях разлагаются в ряд Фурье полином $2x^2 - x^4$ по первой формуле (1.14). Затем приравняются нулю алгебраические выражения со множителями $\cos(\pi mx), x^2$, а также сумма всех постоянных (множитель единица) данного функционального уравнения.

Функциональные уравнения (1.10), второе уравнение (1.11) и второе уравнение (1.12) разлагаются по базовым функциям $x, \sin(\pi mx)$. Здесь используется разложение в ряд Фурье функции $x^3 - x$.

Полученную систему алгебраических уравнений для определения искомых постоянных в решении (1.7) замыкают уравнения (1.8) и два первых уравнения (1.13).

2. Результаты расчетов. Расчеты безразмерных напряжений (отнесенных к величине $E\Delta\lambda T$), приведенные в этом разделе, выполнены при

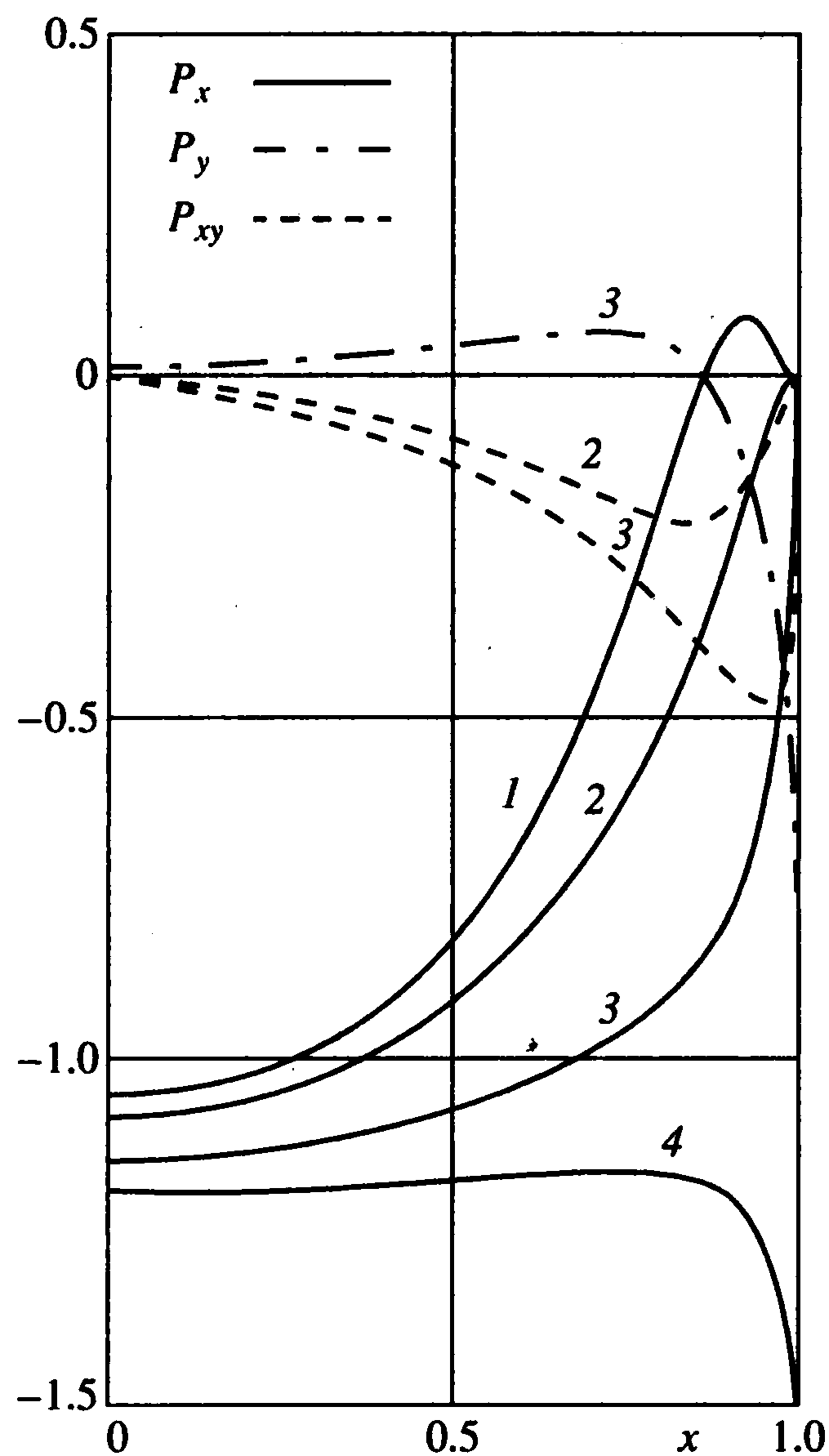
$$k = 3, \gamma = 6, \nu = 0,2, \nu' = 0,1, h = 0,2, N = 6, \delta_N = 0,2h$$

$$\delta_i = \delta(i = 2, 3, 4, 5), \delta_1 = 0,5\delta, \delta = (h - 0,2h)/(N - 1,5), L = 80$$

где L – номер, на котором обрывается ряд Фурье по координате x . Значение толщины первого слоя δ_1 взято меньше, чем величины толщин других слоев, чтобы улучшить аппроксимацию граничного условия $\sigma_x(1, y) = 0$ вблизи свободной боковой поверхности $y = 0$.

На фигуре показано распределение безразмерных напряжений p_x (сплошная кривая), p_y (штрих-пунктир), p_{xy} (штриховая кривая) по x в разных сечениях исследуемого анизотропного слоя. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям

$$y = 0, \quad y = 4h/9, \quad y = h_1, \quad y = h (h_1 = h - \delta_N = 0,8h)$$



Сравнение результатов расчета напряжений с индексами (n) и $(n - 1)$ на поверхностях сопряжений этих решений $y = y_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$ свидетельствует о высокой степени сходимости рядов Фурье в решении (1.7). В частности, ниже приведены величины напряжений $p_y^{(n)}$, $p_y^{(n-1)}$ на поверхностях сопряжений $y = y_{n-1}$, $n = 4, 6$ ($y_3 = 4h/9$, $y_5 = h_1$)

x	0	0,5	0,8	0,9	1
$10^4 \times p_y^{(6)}$	165	429	467	-700	-7760
$10^4 \times p_y^{(5)}$	166	430	468	-700	-7780
$10^4 \times p_y^{(4)}$	55	154	34	-697	460
$10^4 \times p_y^{(3)}$	55	154	34	-697	456

Вычисления также показывают, что при $N \geq 4$ решения практически совпадают.

Ранее [1] была решена обобщенно-плоская задача о равномерном нагреве симметричной трехслойной пластины с абсолютно жесткими внешними слоями, деформируемыми только за счет теплового расширения. Аналогично вводился пограничный слой исследуемого мягкого заполнителя из трансверсально-изотропного материала. Для нахождения симметричного точного решения задачи использовалась модификация метода Матье; решение строилось как суперпозиция ординарных рядов Фурье по двум

координатам x , y и частных решений в полиномах уравнения (1.3). Эта задача также была решена методом, изложенным в настоящей работе ($N = 5$, $\delta_i = \delta$, $i = 1, 2, 3, 4$). Сравнение решений при

$$k = 3, \gamma = 6, \nu = 0,2, \nu' = 0,1, h = 0,2, \delta_N = h/6$$

где $2h$ – толщина исследуемого анизотропного заполнителя, а δ_N – толщина пограничного слоя, показало, что они практически совпадают всюду, в том числе и в угловых точках $(\pm 1, h)$.

Заметим, что характер изменения по x величин напряжений, полученных для симметричной и несимметричной температурных задач, примерно одинаков. Исключение составляет изменение напряжений σ_x в малой области точки $x = 1$, $y = 0$. Например, сплошная кривая l на фигуре имеет зону небольших растягивающих напряжений вблизи конца $x = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панферов И.В.* Температурная смешанная симметричная задача для трансверсально-изотропного упругого слоя // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 167–171.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VII.2000