УДК 539.3

© 2001 г. Н.М. Бородачев

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Получены девять уравнений неразрывности деформаций, в которые в отличие от классических уравнений совместности Сен-Венана входят только первые производные по координатам. Доказано, что из девяти этих уравнений независимыми являются только шесть уравнений. Показано, что из предлагаемых уравнений можно получить классические уравнения совместности.

Классические уравнения совместности деформаций довольно подробно обсуждаются в монографиях по теории упругости [1–4]. Эти уравнения представляют собой шесть дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно шести компонент тензора деформации. В линейной теории упругости условия совместимости деформаций рассматриваются как условия интегрируемости шести дифференциальных уравнений, связывающих между собой компоненты вектора перемещений и линейного тензора деформаций.

1. Классические уравнения неразрывности деформаций. Воспользуемся прямоугольной системой координат x_1, x_2, x_3. Классические уравнения неразрывности (совместимости) деформаций (уравнения Сен-Венана) имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{x_1}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{x_2}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{x_1x_2}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \gamma_{x_3x_1}}{\partial x_2}+\frac{\partial \gamma_{x_1x_2}}{\partial x_3}-\frac{\partial \gamma_{x_2x_3}}{\partial x_1}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{x_1}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.2}$$

Здесь и далее символ (1 2 3) означает, что невыписанные уравнения (или выражения) получаются круговой перестановкой индексов; $\varepsilon_{x_1}, \gamma_{x_1x_2}/2$ (1 2 3) – компоненты линейного симметричного тензора деформаций.

При помощи трехмерного интегрального преобразования Фурье было показано [5], что из шести уравнений (1.1), (1.2) независимыми являются только три.

Уравнения (1.1), (1.2) содержат вторые производные по координатам от компонент тензора деформаций. Ниже будут получены уравнения неразрывности деформаций, которые содержат только первые производные.

2. Несимметричный тензор деформаций. Известно, что каждая угловая деформация состоит из двух частей (двух углов). Вводя обозначения (u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора перемещений)

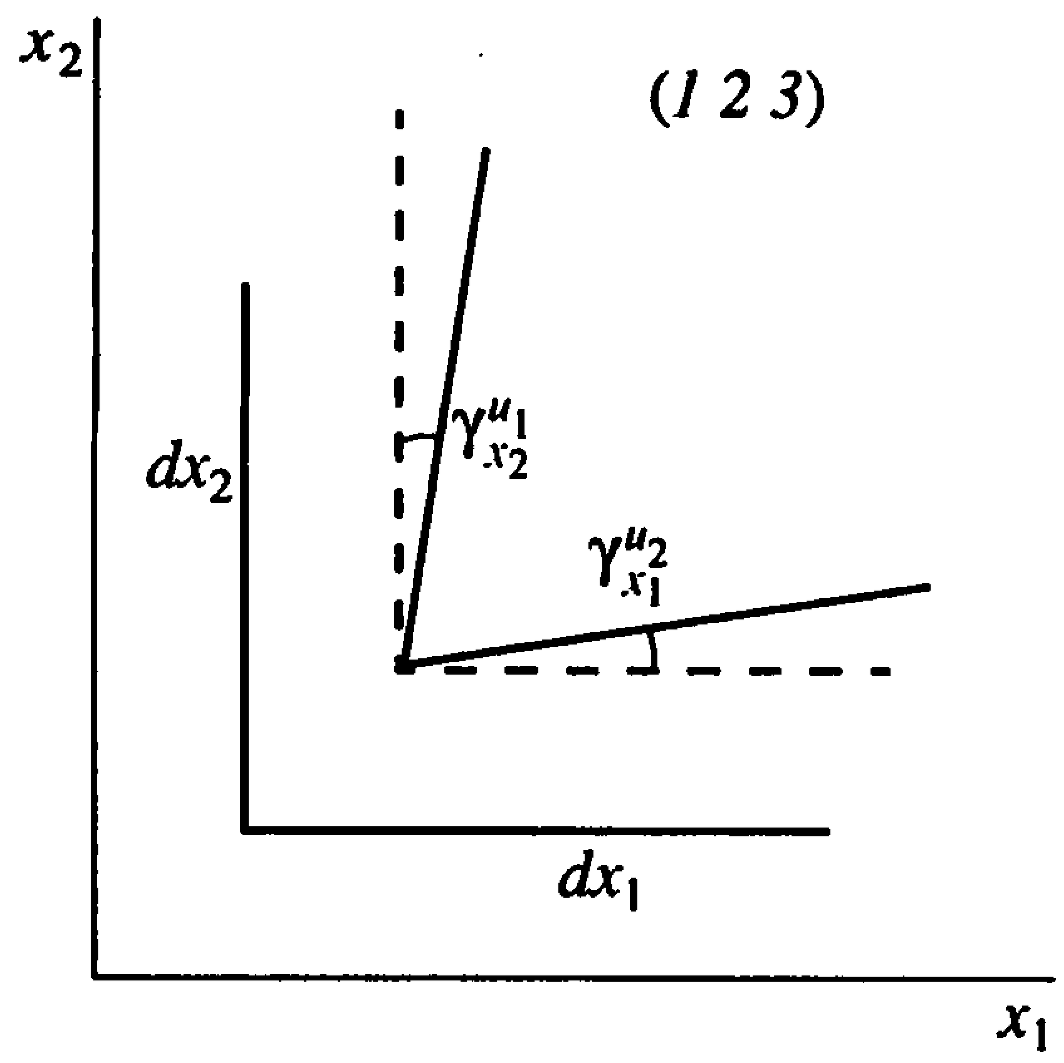
$$\gamma_{x_2}^{u_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.1}$$

имеем

$$\gamma_{x_1x_2}=\gamma_{x_2}^{u_1}+\gamma_{x_1}^{u_2} \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.2}$$

Углы $\gamma_{x_2}^{u_1}, \gamma_{x_1}^{u_2}$ (1 2 3) показаны на фигуре.

Основу данного подхода составляет разделение каждой угловой деформации на две части (два угла).



Из трех линейных деформаций ε_{x_1} (1 2 3) и шести углов $\gamma^{u_1}_{x_2}, \gamma^{u_1}_{x_3}$ (1 2 3) составим новый (несимметричный) тензор

$$\hat{D} = \begin{Vmatrix} \varepsilon^{u_1}_{x_1} & \gamma^{u_1}_{x_2} & \gamma^{u_1}_{x_3} \\ \gamma^{u_2}_{x_1} & \varepsilon^{u_2}_{x_2} & \gamma^{u_2}_{x_3} \\ \gamma^{u_3}_{x_1} & \gamma^{u_3}_{x_2} & \varepsilon^{u_3}_{x_3} \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

В соответствии с обозначениями (2.1) имеем

$$\varepsilon_{x_1} = \varepsilon^{u_1}_{x_1} \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.4}$$

Тензор (2.3) можно получить из вектора перемещений **u** следующим образом:

$$\hat{D} = (\nabla \mathbf{u})^* = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \tag{2.5}$$

($(\nabla \mathbf{u})^*$ – производная вектора **u** по радиус-вектору **r** [2]).

Далее имеем

$$\hat{D} + \hat{D}^* = (\nabla \mathbf{u})^* + \nabla \mathbf{u} = 2 \operatorname{def} \mathbf{u} = 2\hat{\varepsilon}$$

где $\hat{\varepsilon}$ – классический линейный тензор деформации, т.е. тензор $\hat{\varepsilon}$ представляет собой симметричную часть тензора $\hat{D}$.

Следовательно

$$\hat{D} = \hat{\varepsilon} + \hat{\Omega}, \qquad \hat{\Omega} = (\hat{D} - \hat{D}^*)/2$$

3. Вывод новых уравнений неразрывности деформаций. Составим тензор

$$\hat{B} = \operatorname{rot} \hat{D}^* = \operatorname{rot}(\nabla \mathbf{u}) = 0 \tag{3.1}$$

Отсюда следуют девять новых уравнений неразрывности деформаций

$$\frac{\partial \gamma^{u_1}_{x_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma^{u_1}_{x_2}}{\partial x_3} = 0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{u_1}_{x_1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma^{u_1}_{x_3}}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \gamma^{u_1}_{x_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon^{u_1}_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.3}$$

В уравнения неразрывности деформаций (3.2), (3.3) входят только первые производные по координатам, в то время как в классические уравнения Сен-Венана (1.1), (1.2) входят вторые производные.

Тензор $\hat{B}$ можно назвать тензором совместности (неразрывности) деформаций.

Из новых уравнений неразрывности деформаций (3.2), (3.3) можно получить классические уравнения (1.1), (1.2).

Из уравнений (3.3) имеем

$$\frac{\partial \varepsilon^{u_1}_{x_1}}{\partial x_3} = \frac{\partial \gamma^{u_1}_{x_3}}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varepsilon^{u_3}_{x_3}}{\partial x_1} = \frac{\partial \gamma^{u_3}_{x_1}}{\partial x_3} \tag{3.4}$$

Продифференцируем первое уравнение (3.4) по x_3, а второе – по x_1, затем их почленно сложим. Используя соотношения (2.2), находим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^{u_1}_{x_1}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon^{u_3}_{x_3}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}(\gamma^{u_1}_{x_3} + \gamma^{u_3}_{x_1}) = \frac{\partial^2 \gamma_{x_3 x_1}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

т.е. одно из уравнений (1.1). Остальные два уравнения (1.1) могут быть получены аналогично.

Теперь получим уравнения (1.2). Имеем

$$\frac{\partial\gamma_{x_1}^{u_3}}{\partial x_2}+\frac{\partial\gamma_{x_2}^{u_3}}{\partial x_1}=2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_2} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\gamma_{x_3}^{u_2}}{\partial x_1}+\frac{\partial\gamma_{x_3}^{u_1}}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial\gamma_{x_1x_2}}{\partial x_3} \tag{3.6}$$

Перепишем равенство (3.6) в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\gamma_{x_3}^{u_2}+\gamma_{x_2}^{u_3})+\frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma_{x_1}^{u_3}+\gamma_{x_3}^{u_1})=\frac{\partial\gamma_{x_1x_2}}{\partial x_3}+\frac{\partial\gamma_{x_1}^{u_3}}{\partial x_2}+\frac{\partial\gamma_{x_2}^{u_3}}{\partial x_1}$$

Отсюда, используя соотношения (2.2) и (3.5), имеем

$$\frac{\partial\gamma_{x_2x_3}}{\partial x_1}+\frac{\partial\gamma_{x_3x_1}}{\partial x_2}-\frac{\partial\gamma_{x_1x_2}}{\partial x_3}=2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_2}$$

Дифференцируя это равенство по x_3, приходим к одному из уравнений (1.2). Аналогично могут быть получены остальные два уравнения (1.2).

4. Количество независимых уравнений совместности деформаций. Покажем, что из девяти уравнений неразрывности деформаций (3.2), (3.3) независимыми являются только шесть уравнений.

Применяя к уравнениям (3.2), (3.3) трехмерное интегральное преобразование Фурье вида [6]

$$\bar f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,x_3)e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

и учитывая условия затухания деформаций на бесконечности, получаем алгебраические уравнения

$$\alpha_2\bar\gamma_{x_3}^{u_1}-\alpha_3\bar\gamma_{x_2}^{u_1}=0 \qquad (1\ 2\ 3) \tag{4.1}$$

$$\alpha_3\bar\varepsilon_{x_1}^{u_1}-\alpha_1\bar\gamma_{x_3}^{u_1}=0, \qquad \alpha_1\bar\gamma_{x_2}^{u_1}-\alpha_2\bar\varepsilon_{x_1}^{u_1}=0 \qquad (1\ 2\ 3) \tag{4.2}$$

(чтобы упростить доказательство, рассматривается неограниченная упругая среда).

Из уравнений (4.2) имеем

$$\bar\gamma_{x_3}^{u_1}=\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\bar\varepsilon_{x_1}^{u_1}, \qquad \bar\gamma_{x_2}^{u_1}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar\varepsilon_{x_1}^{u_1}$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение (4.1), получим тождество. Аналогичный результат получается и для остальных двух уравнений (4.1).

Таким образом, из девяти уравнений неразрывности деформаций (3.2), (3.3) независимыми являются только шесть, а именно уравнения (3.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nowacki W.* Teoria Sprezystosci. Warszawa: PWN, 1973. = *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. *Hahn H.G.* Elastizitatstheorie: Grundlagen der Linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und raumliche Probleme. Stuttgart: Teubner, 1985. = *Хан Х.* Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 343 с.
4. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1974. 412 p.
5. *Бородачев Н.М.* Об одном подходе к решению пространственной задачи теории упругости в напряжениях // Прикл. механика. 1995. Т. 31. № 12. С. 38–44.
6. *Davies B.* Integral Transforms and Their Applications. N.Y.: Springer, 1978. 410 p.

Киев

Поступила в редакцию
3.XI.2000