УДК 539.375

© 2001 г. Е.И. Шифрин

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ УПРУГИХ ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ КОНТУРА ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ МАТЕРИАЛОВ

Исследуется характер напряженно-деформированного состояния в окрестности фронта плоской трещины на границе соединения двух полупространств из идеально упругих изотропных материалов. Получен вид асимптотических разложений проекций вектора перемещений на оси, направленные вдоль касательной, главной нормали и бинормали к контуру трещины. Показано, что асимптотические разложения проекций вектора перемещений на направления, отвечающие касательной и главной нормали, начиная со второго члена разложения, включают в себя как члены с полуцелыми, так и с комплексными степенями расстояний до контура трещины. Это означает, что указанные проекции решений трехмерной задачи имеют особенности, определяемые как решениями антиплоской, так и плоской задач о трещинах на границе соединения материалов. Особенности проекции вектора перемещений на бинормаль соответствуют особенностям решения плоской задачи.

1. Постановка задачи. Пусть трещина занимает область G в плоскости $z = 0$ безграничного упругого пространства. Предположим, что граница ∂G области G – бесконечно гладкая кривая. Коэффициент Пуассона и модуль сдвига равны соответственно ν_1 и μ_1 для верхнего полупространства ($z > 0$) и ν_2, μ_2 для нижнего ($z < 0$). В плоскости $z = 0$, вне трещины G, предполагаются выполненными условия жесткого сцепления между полупространствами, т.е.

$$u^{(1)}(x,y,0) = u^{(2)}(x,y,0), \quad \sigma_{3j}^{(1)}(x,y,0) = \sigma_{3j}^{(2)}(x,y,0)$$
$$j = 1, 2, 3; \ (x, y) \notin G$$

Здесь $u^{(k)}(x, y, 0)$ ($k = 1, 2$) – векторы перемещений, $\sigma_{3j}^{(k)}(x,y,0)$ – компоненты тензора напряжений, верхний индекс (1) отвечает верхнему полупространству, (2) – нижнему.

В окрестности произвольной точки $(x', y', 0) \in \partial G$ введем локальную систему координат, определяемую направлениями касательной, главной нормали и бинормали к ∂G в этой точке. Компоненты вектора перемещений в указанных направлениях обозначим соответственно $u_{\tan}^{(k)}$, $u_{\rm nor}^{(k)}$, $u_3^{(k)}$. Как известно, линейная механика разрушения основывается на анализе главных членов асимптотических разложений сингулярных составляющих этих компонент перемещений в окрестности фронта трещины. Вместе с тем во многих случаях полезно знать не только главные члены разложения, но и вид всего асимптотического ряда или по крайней мере нескольких последующих его членов. Необходимость в такой дополнительной информации возникает, например, при построении замкнутой системы формул вариации решения задачи, вызванной вариацией контура трещины (см. [1]), уточнении численных решений в окрестности фронта трещины, построении уточненных критериев разрушения. Поэтому цель статьи – выяснение полного вида асимптотического разложения компонент перемещений $u_{\tan}^{(k)}$, $u_{\rm nor}^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ вблизи точки $(x', y', 0)$ при условии, что рассматриваемые точки

(x, y, z) расположены в плоскости, проходящей через точку $(x', y', 0)$ и нормальной к ∂G в этой точке.

На первый взгляд, может показаться, что решение поставленной задачи достаточно простое, поскольку разложение решений антиплоской и плоской задач о трещинах на границе раздела сред хорошо известны, а виды разложений $u_{\tan}^{(k)}$ и $(u_{\rm nor}^{(k)}, u_3^{(k)})$ должны, как можно предположить, совпадать с видами разложений соответствующих антиплоской и плоской задач. Данное предположение, однако, оказывается неверным.

Как известно, решение антиплоской задачи о трещине на границе раздела сред вблизи ее кончика может быть представлено в виде (всюду далее суммирование ведется от $n = 0$ до $n = \infty$)

$$u_{\rm ant}^{(k)} = \sum r^{n+1/2} f_n^{*(k)}(\varphi) + \sum r^n h_n^{*(k)}(\varphi), \quad k = 1,2 \tag{1.1}$$

Здесь r – расстояние до кончика трещины, φ – полярный угол, причем $\varphi = \pi$ соответствует верхнему берегу трещины, $\varphi = -\pi$ – нижнему берегу, а $\varphi = 0$ – линии соединения материалов 1 и 2.

Решение плоской задачи представляется в виде

$$u_{\rm pl\,1}^{(k)} + i u_{\rm pl\,2}^{(k)} = \sum r^{n+1/2+i\varepsilon} f_n^{(k)}(\varphi) + \sum r^n h_n^{(k)}(\varphi) \tag{1.2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_2 \varkappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \varkappa_2 + \mu_2}, \quad \varkappa_j = 3 - 4\nu_j, \quad j = 1,2$$

Здесь $u_{\rm pl\,1}^{(k)}$ и $u_{\rm pl\,2}^{(k)}$ – перемещения, направленные перпендикулярно линии трещины и вдоль нее, $f_n^{(k)}(\varphi)$, $h_n^{(k)}(\varphi)$ – комплекснозначные функции.

Ниже будет показано, что хотя вид главного члена сингулярной составляющей асимптотического разложения $u_{\tan}^{(k)}$ совпадает с видом главного члена разложения (1.1), однако для более слабых особенностей в трехмерной задаче за счет зависимости решения от касательной к контуру трещины переменной имеет место взаимодействие особенностей типа (1.1) и (1.2), в результате чего разложение $u_{\tan}^{(k)}$ включает в себя как члены порядка $r^{n+1/2}$, так и члены порядка $r^{n+3/2+i\varepsilon}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Здесь r – расстояние до контура трещины.

Вполне аналогично асимптотический ряд для сингулярной составляющей перемещения $u_{\rm nor}^{(k)}$ начинается с члена порядка $r^{1/2+i\varepsilon}$, что соответствует решению плоской задачи (1.2), а далее содержит как члены порядка $r^{n+3/2+i\varepsilon}$, так и члены порядка $r^{n+3/2}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Существует два основных подхода к решению задачи о виде асимптотического разложения перемещений и напряжений вблизи контура трещины. Один из них основывается на построении аналитического решения какой-либо задачи о трещине и дальнейшем его асимптотическом разложении. При этом необходимо, чтобы данное частное решение несло в себе основные свойства общего решения задачи.

Другой подход заключается в том, что рассматривается задача о трещине в виде полуплоскости. Все компоненты вектора перемещений представляются в виде $r^\lambda \Phi_j(\varphi,\tau)$, где τ – координата на оси, направленной вдоль фронта трещины, (r, φ, τ) – цилиндрические координаты, j – индекс, отвечающий компоненте перемещений. Ищется решение уравнений теории упругости, удовлетворяющее условиям жесткого сцепления на границе раздела материалов и дающее нулевые усилия на поверхностях трещины.

Применение первого подхода к рассматриваемой задаче затруднено тем, что имеется весьма ограниченное количество аналитически решенных пространственных задач о трещинах на границе раздела сред. Среди них задача о дискообразной трещине, к поверхностям которой приложены однородные нормальные усилия [2, 3]. Разложения нормального и радиального перемещений в этой задаче имеют вид (1.2) и не содержат полуцелых степеней расстояний до ограничивающей трещину окружности. Однако, поскольку данная задача осесимметрична и перемещения в тангенциальном направлении равны нулю, очевидно, в ней не может реализоваться взаимодействие особенностей типа (1.1) и (1.2). Аналогичная ситуация имеет место и для решений задачи о дискообразной трещине, к поверхностям которой приложены осесимметричные усилия радиального сдвига [4].

Имеет аналитическое решение и другая задача – о дискообразной трещине, к поверхностям которой приложены скручивающие усилия [4]. В этой задаче тангенциальная составляющая вектора перемещений дается асимптотическим разложением вида (1.1), однако и данное напряженное состояние не является достаточно общим, так как в нем радиальное и нормальное к плоскости трещины перемещения равны нулю.

Было получено [5] решение задачи о дискообразной трещине, к поверхностям которой приложены нагрузки достаточно общего вида. Однако получить из него полный вид асимптотического разложения вблизи фронта трещины довольно трудно, так как это решение представлено в достаточно сложном виде в терминах преобразования Радона.

В связи с изложенным и в целях более ясного выявления причин, по которым происходит взаимодействие особенностей типа (1.1) и (1.2), ниже для получения вида асимптотического разложения решения принят второй подход. При этом следует отметить, что если все компоненты вектора перемещений искать в виде $r^\lambda \Phi_j(\varphi, \tau)$ с одинаковым показателем λ, то ничего, кроме решений плоской и антиплоской задач, получить нельзя. Взаимодействие особенностей может быть установлено, если представлять компоненты перемещений в виде $r^{\lambda_j} \Phi_j(\varphi, \tau)$ с различными показателями λ_j, причем, как будет показано ниже, особые решения такого типа получаются путем небольших модификаций решений антиплоской и плоской задач.

2. Решение антиплоской задачи и его модификация. Пусть трещина расположена в плоскости $z = 0$ и имеет форму полуплоскости, занимая область $x < 0$. Перемещения в направлениях x, y и z обозначим соответственно $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ и $u_3^{(k)}$, где верхний индекс (k) указывает, как и выше, на рассматриваемое полупространство. Заметим, что для данной трещины перемещения $u_1^{(k)}$ совпадают с $u_{\text{nor}}^{(k)}$, а перемещения $u_2^{(k)}$ – с $u_{\tan}^{(k)}$.

Задача нахождения решения уравнений теории упругости, удовлетворяющего однородным краевым условиям, формулируется следующим образом. Перемещения удовлетворяют уравнениям Ламе

$$\Delta u_j^{(k)} + \frac{1}{1-2\nu_k}\frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial x_j} = 0, \quad \theta^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial z} \tag{2.1}$$

(x_j для $j = 1, 2, 3$ соответствуют x, y, z). Предполагается, что функции $u_j^{(1)}(x,y,z)$ определены в полупространстве $z > 0$, а функции $u_j^{(2)}(x,y,z)$ – в полупространстве $z < 0$. В соответствии с этим уравнения (2.1) выполняются для $k = 1$ в полупространстве $z > 0$ и для $k = 2$ в полупространстве $z < 0$.

Условия отсутствия нагрузок на поверхностях трещины записываются в виде

$$\sigma_{31}^{(k)}(x,y,0) = \sigma_{32}^{(k)}(x,y,0) = \sigma_{33}^{(k)}(x,y,0) = 0 \quad \text{при} \quad x<0 \tag{2.2}$$

где $\sigma_{3j}^{(k)}$ $(j = 1,2,3)$ – компоненты тензора напряжений.

Условия жесткого сцепления между полупространствами вне трещины имеют вид

$$u_j^{(1)}(x,y,0) = u_j^{(2)}(x,y,0), \quad \sigma_{3j}^{(1)}(x,y,0) = \sigma_{3j}^{(2)}(x,y,0) \tag{2.3}$$

при $x > 0$, $j = 1, 2, 3$

Напомним коротко решение антиплоской задачи, которое получается, если положить

$$u_1^{(k)} = u_3^{(k)} = 0, \quad u_2^{(k)} = \overset{0}{u}{}_2^{(k)}(x,z)$$

Перейдем к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi, \qquad -\pi < \varphi < \pi$$

В этих координатах верхнее полупространство определяется условиями $0 < \varphi < \pi$, а нижнее – условиями $-\pi < \varphi < 0$. Поверхности трещины соответствуют $\varphi = \pm\pi$, а граница раздела материалов соответствует $\varphi = 0$.

Будем искать решение в виде

$$\overset{0}{u}{}_2^{(1)}(r,\varphi) = r^{\lambda} f_1(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi; \quad \overset{0}{u}{}_2^{(2)}(r,\varphi) = r^{\lambda} f_2(\varphi), \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$$

тогда из уравнения (2.1) для $j = 2$ следует, что

$$f_k(\varphi) = c_{k1}\cos\lambda\varphi + c_{k2}\sin\lambda\varphi$$

где c_{k1}, c_{k2} – некоторые постоянные.

Подставив эти выражения в условия (2.2) и (2.3), получим систему четырех линейных однородных уравнений

$$\sigma_{32}^{(1)}(r,\pi) = 0, \quad \sigma_{32}^{(2)}(r,-\pi) = 0$$

$$\overset{0}{u}{}_2^{(1)}(r,0) = \overset{0}{u}{}_2^{(2)}(r,0), \quad \sigma_{32}^{(1)}(r,0) = \sigma_{32}^{(2)}(r,0)$$

относительно четырех неизвестных c_{k1}, c_{k2} $(k = 1, 2)$.

Для того чтобы существовало ненулевое решение этой системы, ее определитель должен равняться нулю. Из этого условия получается равенство $\sin\lambda\pi\cos\lambda\pi = 0$, корни которого $\lambda = n$ и $\lambda = n + 1/2$, где n – целые числа. Из условия конечности энергии для n оставляются значения $n = 0, 1, 2, \ldots$. Корни $\lambda = n$ отвечают регулярной части разложения решения антиплоской задачи, а корни $\lambda = n + 1/2$ – сингулярной части. Собственные функции $f_1(\varphi), f_2(\varphi)$, отвечающие значению $\lambda = n + 1/2$, имеют вид

$$f_1(\varphi) = C_n\sin(n + 1/2)\varphi, \quad f_2(\varphi) = C_n(\mu_1/\mu_2)\sin(n + 1/2)\varphi$$

где C_n – произвольная постоянная.

Таким образом, представляющие здесь интерес сингулярные решения антиплоской задачи имеют вид

$$u_1^{(k)} = u_3^{(k)} = 0$$
$$\overset{0}{u}{}_{n2}^{(1)} = C_n r^{n+1/2}\sin(n + 1/2)\varphi, \quad \overset{0}{u}{}_{n2}^{(2)} = C_n(\mu_1/\mu_2)r^{n+1/2}\sin(n + 1/2)\varphi \tag{2.4}$$

Нижний индекс n для перемещений указывает на то, какое именно сингулярное решение берется.

Модифицируем теперь решения (2.4), построив сингулярные решения задачи (2.1)–(2.3), в которых порядки особенностей перемещений $u_1^{(k)}$ будут равны $r^{n+3/2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Будем искать решения задачи (2.1)–(2.3) в виде

$$u_n^{(1)}(r,\varphi,y) = (u_{n1}^{(1)}(r,\varphi), y\overset{0}{u}{}_{n2}^{(1)}, 0), \quad u_n^{(2)}(r,\varphi,y) = (u_{n1}^{(2)}(r,\varphi), y\overset{0}{u}{}_{n2}^{(2)}, 0)$$

Выберем перемещения $u_{n1}^{(1)}$ и $u_{n1}^{(2)}$ так, чтобы $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$, как и в антиплоской задаче, оставались равными нулю. Для этого должны быть выполнены условия $\partial u_{n1}^{(k)} / \partial x + \overset{0}{u}{}_{n2}^{(k)} = 0$, или в полярных координатах

$$\cos\varphi \frac{\partial u_{n1}^{(k)}}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial u_{n1}^{(k)}}{\partial\varphi} + \overset{0}{u}{}_{n2}^{(k)} = 0 \tag{2.5}$$

Подбирая решения уравнения (2.5) в виде $u_{n1}^{(k)} = r^{\gamma} g_k(\varphi)$, можно убедиться, что решениями являются функции

$$\begin{aligned} u_{n1}^{(1)} &= -C_n (n + 3/2)^{-1} r^{n+3/2} \sin(n + 3/2)\varphi \\ u_{n1}^{(2)} &= -C_n (n + 3/2)^{-1} (\mu_1 / \mu_2) r^{n+3/2} \sin(n + 3/2)\varphi \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $\theta^{(k)} = 0$, а $\overset{0}{u}{}_{n2}^{(k)}(r,\varphi)$ и $u_{n1}^{(k)}(r,\varphi)$ – гармонические функции, то уравнения (2.1), очевидно, выполняются. Выполнение условий (2.2), (2.3) также проверяется без труда.

Таким образом, показано, что перемещения

$$u_n^{(1)} = (u_{n1}^{(1)}, y\overset{0}{u}{}_{n2}^{(1)}, 0), \quad u_n^{(2)} = (u_{n1}^{(2)}, y\overset{0}{u}{}_{n2}^{(2)}, 0)$$

где $u_{n1}^{(k)}$ определяются в (2.6), а $\overset{0}{u}{}_{n2}^{(k)}$ – в (2.4), являются решениями краевой задачи (2.1)–(2.3). Отсюда следует, что в разложении перемещений $u_1^{(k)} = u_{\text{nor}}^{(k)}$ для произвольных гладких нагрузок должны присутствовать члены порядка $r^{n+3/2}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Замечание. Построить аналогичным образом решение задачи (2.1) – (2.3), в котором $u_{n1}^{(k)} = 0$, $u_{n3}^{(k)} = u_{n3}^{(k)}(r,\varphi)$, не удается. Действительно, если искать решение в виде

$$u_n^{(k)}(r,\varphi,y) = (0, y\overset{0}{u}{}_{n2}^{(k)}, u_{n3}^{(k)}(r,\varphi))$$

и выбирать перемещения $u_{n3}^{(k)}$ так, чтобы $\theta^{(k)} = 0$, то должны выполняться равенства

$$\partial u_{n3}^{(k)} / \partial z + \overset{0}{u}{}_{n2}^{(k)} = 0, \quad k = 1,2 \tag{2.7}$$

В силу того, что $\theta^{(k)} = 0$, напряжения $\sigma_{33}^{(k)}$ записываются в виде $\sigma_{33}^{(k)} = 2\mu_k \partial u_{n3}^{(k)} / \partial z$. Отсюда и из (2.7) следует, что $\sigma_{33}^{(k)} = -2\mu_k \overset{0}{u}{}_{n2}^{(k)}$. Поскольку $\overset{0}{u}{}_{n2}^{(1)}(r,\pi)$ и $\overset{0}{u}{}_{n2}^{(2)}(r,-\pi)$ не равны нулю, удовлетворить краевым условиям на поверхности трещины ($\sigma_{33}^{(1)}(r,\pi) = 0$, $\sigma_{33}^{(2)}(r,-\pi) = 0$) оказывается невозможно.

Сделанное замечание, конечно, еще не доказывает того, что в разложении перемещений $u_3^{(k)}$ отсутствуют полуцелые степени r. Вместе с тем анализ решения задачи о дискообразной трещине на границе раздела полупространств, полученного ранее [5], также показывает, что разложение $u_3^{(k)}$ не содержит членов порядка $r^{n+3/2}$.

3. Решение плоской задачи и его модификация. Рассмотрим ту же задачу о трещине, имеющей форму полуплоскости, что и в разделе 2. Удобно перейти к цилиндрической системе координат r, φ, y ($x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$).

Уравнения Ламе в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)u_r^{(k)}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{1-2\nu_k}\frac{\partial\theta^{(k)}}{\partial r}=0$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)u_\varphi^{(k)}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{1-2\nu_k}\frac{1}{r}\frac{\partial\theta^{(k)}}{\partial\varphi}=0 \qquad (3.1)$$

$$\Delta u_2^{(k)}+\frac{1}{1-2\nu_k}\frac{\partial\theta^{(k)}}{\partial y}=0$$

Входящие в краевые условия компоненты тензора напряжений выражаются через перемещения следующим образом:

$$\tau_{\varphi r}^{(k)}=\mu_k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial r}-\frac{u_\varphi^{(k)}}{r}\right)$$

$$\tau_{\varphi y}^{(k)}=\mu_k\left(\frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial y}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial\varphi}\right) \qquad (3.2)$$

$$\sigma_\varphi^{(k)}=2\mu_k\left[\frac{\nu_k}{1-2\nu_k}\left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial\varphi}+\frac{u_r^{(k)}}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial\varphi}+\frac{u_r^{(k)}}{r}\right]$$

Условия отсутствия нагрузок на поверхностях трещины записываются в виде

$$\tau_{\varphi r}^{(1)}(r,\pi,y)=0,\quad \tau_{\varphi y}^{(1)}(r,\pi,y)=0,\quad \sigma_\varphi^{(1)}(r,\pi,y)=0$$

$$(3.3)$$

$$\tau_{\varphi r}^{(2)}(r,-\pi,y)=0,\quad \tau_{\varphi y}^{(2)}(r,-\pi,y)=0,\quad \sigma_\varphi^{(2)}(r,-\pi,y)=0$$

Наконец, условия жесткого сцепления между полупространствами вне трещины приобретают вид

$$u_r^{(1)}(r,0,y)=u_r^{(2)}(r,0,y),\quad u_\varphi^{(1)}(r,0,y)=u_\varphi^{(2)}(r,0,y)$$

$$u_2^{(1)}(r,0,y)=u_2^{(2)}(r,0,y),\quad \tau_{\varphi r}^{(1)}(r,0,y)=\tau_{\varphi r}^{(2)}(r,0,y) \qquad (3.4)$$

$$\tau_{\varphi y}^{(1)}(r,0,y)=\tau_{\varphi y}^{(2)}(r,0,y),\quad \sigma_\varphi^{(1)}(r,0,y)=\sigma_\varphi^{(2)}(r,0,y)$$

Решение плоской задачи получается, если положить

$$u_r^{(k)}=\overset{0}{u}{}_r^{(k)}(r,\varphi),\quad u_\varphi^{(k)}=\overset{0}{u}{}_\varphi^{(k)}(r,\varphi),\quad u_2^{(k)}=0$$

Особенности решения плоской задачи впервые исследовались в [6], где были рассмотрены функции напряжений $U_1(r,\varphi)$ в верхней полуплоскости ($0\leqslant\varphi\leqslant\pi$) и $U_2(r,\varphi)$ – в нижней полуплоскости ($-\pi\leqslant\varphi\leqslant 0$), которые представлялись в виде $U_k(r,\varphi)=r^{\lambda+1}F_k(\varphi)$ ($k=1, 2$). Поскольку функции напряжений должны удовлетворять бигармоническому уравнению $\Delta\Delta U_k=0$, функции $F_k(\varphi)$ имеют вид

$$F_k(\varphi)=a_k\sin(\lambda+1)\varphi+b_k\cos(\lambda+1)\varphi+c_k\sin(\lambda-1)\varphi+d_k\cos(\lambda-1)\varphi$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – некоторые постоянные.

Компоненты тензора напряжений выражаются через функции напряжений следующим образом:

$$\sigma_r^{(k)} = r^{\lambda-1}[F_k''(\varphi)+(\lambda+1)F_k(\varphi)], \quad \sigma_\varphi^{(k)} = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)F_k(\varphi)$$

$$\tau_{\varphi r}^{(k)} = -\lambda r^{\lambda-1}F_k'(\varphi) \tag{3.5}$$

Компоненты вектора перемещений записываются в виде

$$u_\varphi^{(k)} = \frac{1}{2\mu_k} r^\lambda\{-F_k'(\varphi) - 4(1-\nu_k)[c_k\cos(\lambda-1)\varphi - d_k\sin(\lambda-1)\varphi]\}$$

$$u_r^{(k)} = \frac{1}{2\mu_k} r^\lambda\{-(\lambda+1)F_k(\varphi) + 4(1-\nu_k)[c_k\sin(\lambda-1)\varphi + d_k\cos(\lambda-1)\varphi]\} \tag{3.6}$$

Условия отсутствия нагрузок на поверхностях трещины (3.3) благодаря выражениям для напряжений (3.5) записываются в виде

$$F_1(\pi) = F_1'(\pi) = F_2(-\pi) = F_2'(-\pi) = 0 \tag{3.7}$$

Условия равенства усилий на продолжении трещины (3.4) в соответствии с выражениями (3.5) имеют вид

$$F_1(0) = F_2(0), \quad F_1'(0) = F_2'(0) \tag{3.8}$$

Условия равенства перемещений на продолжении трещины (3.4) при учете выражений (3.6) приводят к равенствам

$$\frac{1}{2\mu_1}[-F_1'(0) - 4(1-\nu_1)c_1] = \frac{1}{2\mu_2}[-F_2'(0) - 4(1-\nu_2)c_2]$$

$$\frac{1}{2\mu_1}[-(\lambda+1)F_1(0) + 4(1-\nu_1)d_1] = \frac{1}{2\mu_2}[-(\lambda+1)F_2(0) + 4(1-\nu_2)d_2] \tag{3.9}$$

Равенства (3.7)–(3.9) представляют собой восемь линейных однородных уравнений относительно восьми неизвестных a_k, b_k, c_k, d_k (k = 1, 2), определяющих функции $F_k(\varphi)$. Для того чтобы существовало ненулевое решение этой системы, ее определитель должен равняться нулю. Из этого условия было получено [6], что $\lambda = n + \frac{1}{2} + i\varepsilon$ (величина ε определена в (1.2)). Такие значения λ определяют только сингулярную составляющую разложения (1.2).

С помощью техники теории функций комплексного переменного было установлено [7], что разложение решения плоской задачи имеет вид (1.2).

Результаты работы [6] были уточнены [8] благодаря более аккуратному вычислению определителя системы уравнений (3.7)–(3.9). В частности установлено [8], что уравнение, получаемое в результате приравнивания определителя системы нулю, помимо комплексных корней имеет также корни $\lambda = n$. Тем самым методами работы [6] получены все значения λ, отвечающие разложению (1.2), полученному [7]. Кроме того, были вычислены [8] коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k, определяющие собственные функции $F_k(\varphi)$.

Обозначим решение плоской задачи, отвечающее $\lambda = n + \frac{1}{2} + i\varepsilon$, через $\overset{0}{u}{}_{nr}^{(k)}(r,\varphi)$, $\overset{0}{u}{}_{n\varphi}^{(k)}(r,\varphi)$, а отвечающие этому корню собственные функции через $F_{nk}(\varphi)$. Согласно полученным ранее результатам [8],

$$
\begin{aligned}
&a_{n1} = iM_n \frac{e^{\pi\varepsilon} + (n + 1/2 + i\varepsilon)e^{-\pi\varepsilon}}{n + 3/2 + i\varepsilon}, \quad b_{n1} = M_n \frac{e^{\pi\varepsilon} - (n + 1/2 + i\varepsilon)e^{-\pi\varepsilon}}{n + 3/2 + i\varepsilon} \\
&c_{n1} = -iM_n e^{-\pi\varepsilon}, \; d_{n1} = M_n e^{-\pi\varepsilon}, \quad a_{n2} = iM_n \frac{e^{-\pi\varepsilon} + (n + 1/2 + i\varepsilon)e^{\pi\varepsilon}}{n + 3/2 + i\varepsilon} \\
&b_{n2} = M_n \frac{e^{-\pi\varepsilon} - (n + 1/2 + i\varepsilon)e^{\pi\varepsilon}}{n + 3/2 + i\varepsilon}, \quad c_{n2} = -iM_n e^{\pi\varepsilon}, \quad d_{n2} = M_n e^{\pi\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Нижний индекс n указывает на то, какой собственной функции соответствуют постоянные, M_n – произвольная постоянная.

Модифицируем теперь решение плоской задачи, построив сингулярные решения задачи (3.1)–(3.3), в которых порядки особенностей перемещения $u_2^{(k)}$ будут равны $r^{n+3/2+i\varepsilon}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ищем решения задачи (3.1)–(3.3) в виде

$$u_n^{(1)}(r,\varphi,y) = (u_{nr}^{(1)}, u_{n\varphi}^{(1)}, u_{n2}^{(1)}) = (y \overset{0}{u}{}_{nr}^{(1)}(r,\varphi), \;\; y \overset{0}{u}{}_{n\varphi}^{(1)}(r,\varphi), \;\; u_{n2}^{(1)}(r,\varphi))$$

$$u_n^{(2)}(r,\varphi,y) = (u_{nr}^{(2)}, u_{n\varphi}^{(2)}, u_{n2}^{(2)}) = (y \overset{0}{u}{}_{nr}^{(2)}(r,\varphi), \;\; y \overset{0}{u}{}_{n\varphi}^{(2)}(r,\varphi), \;\; u_{n2}^{(2)}(r,\varphi))$$

Можно убедиться, что для выбранного вида перемещений $u_n^{(k)}(r,\varphi,y)$ имеет место равенство $\theta^{(k)} = y \overset{0}{\theta}{}_n^{(k)}$, где $\overset{0}{\theta}{}_n^{(k)}$ – величина первого инварианта тензора деформаций для соответствующей плоской задачи. Справедливы также равенства

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) u_{nr}^{(k)} = y\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) \overset{0}{u}{}_{nr}^{(k)}, \; \left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) u_{n\varphi}^{(k)} = y\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) \overset{0}{u}{}_{n\varphi}^{(k)}$$

$$\frac{\partial u_{nr}^{(k)}}{\partial \varphi} = y \frac{\partial \overset{0}{u}{}_{nr}^{(k)}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u_{n\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi} = y \frac{\partial \overset{0}{u}{}_{n\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi}$$

Отсюда следует, что первое и второе из уравнений (3.1) будут выполняться.

Из первого и третьего выражений (3.2) следует, что $\tau_{\varphi r}^{(k)} = y \overset{0}{\tau}{}_{\varphi r}^{(k)}$ и $\sigma_{\varphi}^{(k)} = y \overset{0}{\sigma}{}_{\varphi}^{(k)}$, где $\overset{0}{\tau}{}_{\varphi r}^{(k)}$ и $\overset{0}{\sigma}{}_{\varphi}^{(k)}$ – напряжения в соответствующей плоской задаче. Отсюда следует, что выполняются первое, третье, четвертое и шестое равенства из (3.3), а также четвертое и шестое равенства из (3.4). Кроме того, очевидно, что выполняются первое и второе равенства из (3.4).

Следовательно, для решения задачи (3.1)–(3.3) необходимо подобрать функции $u_{n2}^{(k)}(r,\varphi)$ таким образом, чтобы удовлетворялось третье из уравнений (3.1), а также краевые условия

$$
\begin{aligned}
&\tau_{\varphi y}^{(1)}(r,\pi,y) = \tau_{\varphi y}^{(2)}(r,-\pi,y) = 0, \quad u_{n2}^{(1)}(r,0) = u_{n2}^{(2)}(r,0) \\
&\tau_{\varphi y}^{(1)}(r,0,y) = \tau_{\varphi y}^{(2)}(r,0,y)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Так как $\theta^{(k)} = y \overset{0}{\theta}{}_n^{(k)}$, третье из уравнений (3.1) приобретает вид

$$\Delta u_{n2}^{(k)}(r,\varphi) = -\frac{1}{1 - 2\nu_k} \overset{0}{\theta}{}_n^{(k)} \tag{3.12}$$

Из выражений (3.5) для $\overset{0}{\sigma}{}_r^{(k)}$ и $\overset{0}{\sigma}{}_\varphi^{(k)}$ и в связи с тем, что $2\mu_k \overset{0}{\theta}{}_n^{(k)}/(1-2\nu_k)=$ $=\overset{0}{\sigma}{}_r^{(k)}+\overset{0}{\sigma}{}_\varphi^{(k)}$, имеем

$$\overset{0}{\theta}{}_n^{(k)}=\frac{1-2\nu_k}{2\mu_k}r^{n-1/2+i\varepsilon}[F''_{nk}(\varphi)+\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)^2 F_{nk}(\varphi)]$$

Учитывая теперь вид функций $F_{nk}(\varphi)$, получим

$$\overset{0}{\theta}{}_n^{(k)}=\frac{1-2\nu_k}{2\mu_k}4\left(n+\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)r^{n-1/2+i\varepsilon}\left[c_{nk}\sin\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi+d_{nk}\cos\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi\right] \tag{3.13}$$

Значения постоянных c_{nk}, d_{nk} даны в (3.10).

Подставив (3.13) в (3.12) и ища частное решение (3.12) в виде $u_ч^{(k)}=r^\gamma\Phi_k(\varphi)$, убеждаемся, что частным решением являются функции

$$u_ч^{(k)}=-\frac{1}{2\mu_k}r^{n+3/2+i\varepsilon}\left(c_{nk}\sin\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi+d_{nk}\cos\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi\right)$$

Если к данному частному решению добавить произвольную гармоническую функцию, то новая функция также будет удовлетворять уравнению (3.12).

Рассмотрим решения уравнения (3.12), имеющие вид

$$\begin{aligned}u_{n2}^{(k)}=\frac{1}{2\mu_k}r^{n+3/2+i\varepsilon}\Bigg[iA_{nk}\sin\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\varphi+B_{nk}\cos\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\varphi-\\ -c_{nk}\sin\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi-d_{nk}\cos\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi\Bigg]\end{aligned} \tag{3.14}$$

где A_{nk}, B_{nk} ($k=1,2$) – некоторые постоянные.

Условия (3.11) представляют собой четыре уравнения, из которых можно определить четыре неизвестных постоянных A_{nk}, B_{nk} ($k=1,2$). Условие $u_{n2}^{(1)}(r,0)=u_{n2}^{(2)}(r,0)$ при учете (3.14) приводит к уравнению

$$\frac{B_{n1}-d_{n1}}{\mu_1}=\frac{B_{n2}-d_{n2}}{\mu_2} \tag{3.15}$$

Учитывая выражение (3.2) для $\tau_{\varphi y}^{(k)}$, имеем

$$\tau_{\varphi y}^{(k)}=\mu_k\left(\overset{0}{u}{}_{n\varphi}^{(k)}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{n2}^{(k)}}{\partial\varphi}\right)$$

Отсюда и из (3.6), (3.14) получим

$$\begin{aligned}\tau_{\varphi y}^{(k)}=\frac{r^{n+1/2+i\varepsilon}}{2}\Bigg\{-F'_{nk}(\varphi)+\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\left(iA_{nk}\cos\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\varphi-\right.\\ \left.-B_{nk}\sin\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\varphi\right)-\left[4(1-\nu_k)+n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right]\times\\ \times\left(c_{nk}\cos\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi-d_{nk}\sin\left(n-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\varphi\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.16}$$

Из условия $\tau^{(1)}_{\varphi y}(r,0,y)=\tau^{(2)}_{\varphi y}(r,0,y)$, (3.16), (3.8), получим

$$\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)iA_{n1}-\left[\varkappa_1+n+\frac{1}{2}+i\varepsilon\right]c_{n1}=\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)iA_{n2}-\left[\varkappa_2+n+\frac{1}{2}+i\varepsilon\right]c_{n2} \tag{3.17}$$

Входящие в (3.17) величины $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ определены в разделе 1.

Подставив в равенство (3.16) значения $\varphi=\pi$ при $k=1$ и $\varphi=-\pi$ при $k=2$, при учете равенств $\tau^{(1)}_{\varphi y}(r,\pi,y)=0$, $\tau^{(2)}_{\varphi y}(r,-\pi,y)=0$ и $F'_{n1}(\pi)=0$, $F'_{n2}(-\pi)=0$, а также выражений (3.10) получим

$$\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\left(\frac{A_{n1}+B_{n1}}{2}e^{-\varepsilon\pi}e^{i(n+3/2)\pi}+\frac{A_{n1}-B_{n1}}{2}e^{\varepsilon\pi}e^{-i(n+3/2)\pi}\right)+$$
$$+M_n\left(\varkappa_1+n+\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)e^{-i(n-1/2)\pi}=0$$

$$\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\left(\frac{A_{n2}-B_{n2}}{2}e^{-\varepsilon\pi}e^{i(n+3/2)\pi}+\frac{A_{n2}+B_{n2}}{2}e^{\varepsilon\pi}e^{-i(n+3/2)\pi}\right)+$$
$$+M_n\left(\varkappa_2+n+\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)e^{i(n-1/2)\pi}=0$$

Эти уравнения могут быть переписаны в более простом виде

$$\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\left(\frac{A_{n1}+B_{n1}}{2}e^{-\varepsilon\pi}-\frac{A_{n1}-B_{n1}}{2}e^{\varepsilon\pi}\right)-M_n\left(\varkappa_1+n+\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)=0 \tag{3.18}$$

$$\left(n+\frac{3}{2}+i\varepsilon\right)\left(\frac{A_{n2}-B_{n2}}{2}e^{-\varepsilon\pi}-\frac{A_{n2}+B_{n2}}{2}e^{\varepsilon\pi}\right)+M_n\left(\varkappa_2+n+\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)=0 \tag{3.19}$$

Решая систему уравнений (3.15), (3.17)–(3.19), находим

$$A_{n1}=\alpha_{n1}e^{-\varepsilon\pi}+\beta_{n1}e^{\varepsilon\pi},\quad B_{n1}=-\alpha_{n1}e^{-\varepsilon\pi}+\beta_{n1}e^{\varepsilon\pi}$$

$$A_{n2}=\alpha_{n2}e^{-\varepsilon\pi}+\beta_{n2}e^{\varepsilon\pi},\quad B_{n2}=\alpha_{n2}e^{-\varepsilon\pi}-\beta_{n2}e^{\varepsilon\pi}$$

где

$$\alpha_{n2}=M_n\frac{(\varkappa_2-1)\mu_1e^{\varepsilon\pi}-(\varkappa_1-1)\mu_2e^{-\varepsilon\pi}}{(n+3/2+i\varepsilon)(e^{\varepsilon\pi}-e^{-\varepsilon\pi})(\mu_1+\mu_2)},\quad \beta_{n1}=\alpha_{n2}$$

$$\beta_{n2}=\alpha_{n2}-M_n\frac{\varkappa_2+n+1/2+i\varepsilon}{n+3/2+i\varepsilon},\quad \alpha_{n1}=\alpha_{n2}-M_n\frac{\varkappa_1+n+1/2+i\varepsilon}{n+3/2+i\varepsilon}$$

Таким образом, получена последовательность сингулярных решений задачи (3.1)–(3.3), в которых перемещения $u^{(k)}_{n2}(r,\varphi)=u^{(k)}_{\tan}$ имеют особенности порядка $r^{n+3/2+i\varepsilon}$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Здесь для удобства записи рассматривались комплекснозначные решения, однако ясно, что если брать их вещественные или мнимые части, то можно получить вещественные решения с указанными порядками особенностей.

Из полученных результатов следует, что разложения перемещений вблизи гладкого контура трещины имеют вид

$$u_{\tan}(r,\varphi,\tau)=\sum r^{n+1/2}f^*_n(\varphi,\tau)+\sum \operatorname{Re}(r^{n+3/2+i\varepsilon}g^*_n(\varphi,\tau))+\sum r^nh^*_n(\varphi,\tau)$$

$$u_3(r,\varphi,\tau)+iu_{\mathrm{nor}}(r,\varphi,\tau)=\sum r^{n+1/2+i\varepsilon}f_n(\varphi,\tau)+i\sum r^{n+3/2}g_n(\varphi,\tau)+\sum r^nh_n(\varphi,\tau)$$

Здесь τ – параметр, определяющий положение точки на контуре трещины, (r, φ) – полярные координаты на плоскости, проходящей через данную точку контура, принимаемую за начало координат, и ортогональной ∂G. Функции $f_n^*(\varphi,\tau)$, $h_n^*(\varphi,\tau)$, $g_n(\varphi,\tau)$ – вещественнозначные, а функции $g_n^*(\varphi,\tau)$, $f_n(\varphi,\tau)$ и $h_n(\varphi,\tau)$ – комплекснозначные.

Работа выполнена при частичной поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция" (А0083), а также Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00341).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаревич Й.С.* О вариации решений интегродифференциальных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 961–968.
2. *Моссаковский В.И., Рыбка М.Т.* Обобщение критерия Гриффитса – Снеддона на случай неоднородного тела // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1061–1069.
3. *Kassir M.K., Bregman A.M.* The stress intensity factor for a penny – shaped crack between two dissimilar materials // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1972. V. 39. № 1. P. 308–310.
4. *Kassir M.K., Sih G.C.* Three – Dimensional Crack Problems. V. 2. A New Selection of Crack Problems in Three – Dimensional Elasticity. Leyden: Noordhoff, 1975. 452 p.
5. *Willis J.R.* The penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1972. V. 25. Pt 3. P. 367–385.
6. *Williams M.L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. America. 1959. V. 49. № 2. P. 199–204.
7. *Rice J.R.* Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 1. P. 98–103.
8. *Symington M.F.* Eigenvalues for interface cracks in linear elasticity // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1987. V. 54. № 4. P. 973–974.

Москва

Поступила в редакцию
24.VIII.2000

e-mail: efim@shifrin.msk.ru