ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 65. Вып. 6, 2001

УДК 532.5:534.284

© 2001 г. Е.Л. Гусев

СВОЙСТВО ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ В ОПТИМАЛЬНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ВОЛН

Исследуются общие свойства слоистых линейно-упругих локально-изотропных тел, энергетически оптимальных при заданном наклонном падении плоской волны. Показано, что при специальных дополнительных условиях типа наличия в необходимом спектре частот предельно достижимого значения энергетической характеристики или достаточно малого угла падения задача сводится к попеременному расположению не более двух из данного набора одинаковых как по физическим свойствам, так и по ширине слоев. Ранее эти свойства были установлены автором для распространения электромагнитных и чисто продольных волн.

Эффективное решение проблемы исследования предельных возможностей многослойных структур в процессах управления энергетикой волновых процессов разной физической природы предполагает возможность эффективного полного перебора всех допустимых вариантов конструкций, количество которых чрезвычайно велико. Однако в рамках существующих подходов не удается ни объективно оценить, насколько возможности созданных структур отличаются от предельно достижимых, ни эффективно конструировать структуры, реализующие предельные возможности. В соответствии с этим автором была поставлена проблема создания методов всестороннего исследования предельных возможностей композиционных конструкций и выдвинута гипотеза о существовании общих закономерностей, которые присущи структурам, реализующим предельные возможности.

Создание конструкций с уникальными свойствами связано с исследованием их предельных возможностей, соответствующих тому предельному уровню, которого можно достичь на основе управления структурой конструкции. В многоэкстремальных задачах, к которым относятся волновые задачи синтеза, возможности предсказания поведения целевой функции ограничены. Локального же предсказания недостаточно для построения эффективных процедур поиска решений.

Для случаев наклонного падения электромагнитных волн на систему магнитодиэлектрических слоев, а также наклонного падения акустических волн на систему слоев, в которых сдвиговые волны не распространяются, были установлены качественные закономерности структуры оптимального решения. В частности, показано [1][1], что взаимосвязь параметров в структурах, реализующих предельные возможности по достижению заданного комплекса свойств, обладает определенной внутренней симметрией, что позволяет эффективно выделять полную совокупность вариантов, реализующих предельные возможности для таких задач. При этом взаимосвязи параметров в оптимальных структурах при воздействии как электромагнитных, так и акустических волн присущ один и тот же тип симметрии.

Возникает вопрос, сохраняется ли установленный тип симметрии во взаимосвязи параметров в оптимальных структурах и при переходе к волновым задачам синтеза, описываемым более сложными моделями, в частности, когда возможно преобразование различных типов волн на границах раздела. Этому вопросу и посвящена данная работа.

[1] См. также: *Гусев Е.Л.* Априорные оценки в задачах синтеза многослойных структур при воздействии волн: Препринт, Якутск: ЯНЦ СО РАН СССР, 1990.

1. Постановка задачи оптимального синтеза. Пусть требуется сконструировать многослойную структуру, которая реализовывала бы предельные возможности по гашению упругих волн в заданном диапазоне частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. Полупространства, окаймляющие систему слоев, будем считать идеальными жидкостями.

Распространение упругой волны в системе упругих слоев описывается системой динамических уравнений теории упругости:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} = \mu_s \Delta \mathbf{u}_s + (\lambda_s + 2\mu_s) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_s, \quad s = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_s(x, y, z, t)$ – вектор смещения частиц в s-й среде, ρ_s – плотность s-го слоя, λ_s, μ_s – параметры Ламе s-го слоя, N – число слоев.

Векторное поле смещений допускает представление в виде суперпозиции двух полей [2]:

$$\mathbf{u}_s = \operatorname{grad} \Phi_s + \operatorname{rot} \mathbf{P}_s \tag{1.2}$$

Здесь Φ_s, $\mathbf{P}_s$ – скалярный и векторный потенциалы волнового поля. Плоская волна общего вида может быть представлена в виде суперпозиции плоских гармонических волн

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_s(x, y, z, t) \\ \mathbf{P}_s(x, y, z, t) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \begin{matrix} f_s^+(z, \omega) \\ f_s^-(z, \omega) \end{matrix} \right\| \exp(i\Delta_0 x + i\Delta_0 y - i\omega t) d\omega, \quad s = 1, \ldots, N \tag{1.3}$$

$$\Delta_0 = k_0 \sin \vartheta_0, \quad k_0 = \omega / c_0$$

Здесь k_0 – волновое число падающей волны, c_0 – скорость распространения волны в полупространстве, из которого приходит волна, ϑ_0 – угол падения волны.

Тогда задача о распространении упругой волны в системе упругих слоев может быть сведена к решению следующей краевой задачи относительно спектральных плотностей скалярного и векторного потенциалов:

$$\frac{\partial^2 f_s^+(z, \omega)}{\partial z^2} + (k_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega)) f_s^+(z, \omega) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_s^-(z, \omega)}{\partial z^2} + (\gamma_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega)) f_s^-(z, \omega) = 0$$

$$b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s; \quad s = 1, \ldots, N$$

$$f_s^\pm(b_{s-1}, \omega) = (\Phi_s + Q_s) f_{s-1}^\pm(b_{s-1}, \omega) \pm i \frac{Q_s}{\Delta_0} \frac{\partial f_{s-1}^\mp(b_{s-1}, \omega)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f_s^\pm(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} = (\Phi_s - Q_s) \frac{\partial f_{s-1}^\pm(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} \pm i\Delta_0 (1 - \Phi_s - Q_s) f_{s-1}^\mp(b_{s-1}, \omega) \tag{1.4}$$

$$s = 2, \ldots, N$$

$$\frac{\partial f_0^+(0, \omega)}{\partial z} = -i \cos \vartheta_0 \left[k_0 f_0^+(0, \omega) + \frac{2}{k_0 \rho_0 c_0^2} \right], \quad f_0^-(0, \omega) = 0$$

$$\frac{\partial f_{N+1}^+(l, \omega)}{\partial z} = i k_{N+1} \cos \vartheta_{N+1} f_{N+1}^+(l, \omega), \quad f_{N+1}^-(l, \omega) = 0$$

Здесь

$$\Phi_s = \frac{\mu_{s-1} \gamma_{s-1}^2}{\mu_s \gamma_s^2}, \quad Q_s = 2\Delta_0^2 \frac{\mu_s - \mu_{s-1}}{\mu_s \gamma_s^2}; \quad s = 2, \ldots, N$$

Здесь $k_s = \omega/c_s$ – волновое число продольной волны в s-м слое, c_s – скорость распространения продольной волны в s-м слое, $\gamma_s = \omega/d_s$ – волновое число сдвиговой волны в нем, $b_s\,(s = 1, \ldots, N)$ – координаты границ раздела слоев с различными физическими свойствами. Условия на границах раздела слоев являются следствием жесткого сцепления слоев, когда на границах раздела должны быть непрерывны нормальные и тангенциальные составляющие перемещений, а также нормальные и тангенциальные напряжения.

Пусть задан дискретный набор материалов, которые могут участвовать в проектировании. Физические свойства каждого из них будут связаны некоторыми функциональными зависимостями. Так, скорости распространения продольных и поперечных волн в материале будут связаны с его плотностью ρ: $c = c(\rho)$, $d = d(\rho)$. Введем множество плотностей материалов из допустимого набора

$$\Lambda = \{\rho_{\min} = \rho^1 < \rho^2 < \rho^3 < \ldots < \rho^m = \rho_{\max}\}$$

На этом множестве величины c и d-функции дискретного аргумента $\rho \in \Lambda$.

Требуется так подобрать физические свойства материалов слоев $\rho_s\,(s = 1, \ldots, N)$, толщины слоев $\Delta_s = b_s - b_{s-1} (s = 1, \ldots, N)$, число слоев N, а также порядок их взаимного расположения, чтобы зависимость энергетического коэффициента пропускания проектируемой структуры $T(\omega)$ была наиболее близкой к требуемой зависимости $\tilde{T}(\omega)$. Задача сводится к минимизации критерия качества

$$J = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \tau(\omega)[T(\omega) - \tilde{T}(\omega)]^2 d\omega, \quad T(\omega) = \frac{c_0\rho_0 \cos\vartheta_{N+1}}{c_{N+1}\rho_{N+1}\cos\vartheta_0} |f_{N+1}(l, \omega)|^2 \tag{1.5}$$

на решениях системы (1.4). Здесь $\tau(\omega)(0 \leq \tau(\omega) \leq 1)$ – весовая функция.

Задача (1.4), (1.5) относится к числу задач оптимального управления составными системами комбинаторного типа, которые изучались ранее [1]; были сформулированы необходимые условия оптимальности для составных систем с такой структурой.

2. Необходимые условия оптимальности. Для задачи оптимального управления (1.4), (1.5) могут быть сформулированы необходимые условия оптимальности, являющиеся обобщением принципа максимума Л.С. Понтрягина на задачи оптимального управления составными системами [1]. При этом аналогом функций Гамильтона являются функции, которые для задачи оптимального управления (1.4), (1.5) представимы в виде [1]

$$R_s(f_s^+,\ f_s^-,\ p_s,\ q_s;\ \rho)|_z = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \sum_{i=1}^{8} \alpha_s^i(z,\ \omega) G_s^i(\omega;\ \rho) d\omega \tag{2.1}$$

$$b_{s-1} \leq z \leq b_s, \quad s = 1, \ldots, N$$

(В правой части формулы (2.1) отмечено, что все аргументы функции R_s подсчитываются в точке z).

Функции $\alpha_s^i = \alpha_s^i(z,\ \omega)(i = 1, \ldots, 8)$ выражаются через решение

$$f_s^+(z,\ \omega),\ f_s^-(z,\ \omega),\ b_{s-1} \leq z \leq b_s,\ s = 1, \ldots, N$$

исходной (1.4) и решение

$$p_s(z,\ \omega),\ q_s(z,\ \omega),\ b_{s-1} \leq z \leq b_s,\ s = 1, \ldots, N$$

сопряженной к (1.4) систем [1]

$$\alpha_s^1=\mathrm{Im}\frac{\partial p_s}{\partial z}f_s^+,\ \alpha_s^2=\mathrm{Im}\frac{\partial f_s^+}{\partial z}p_s,\ \alpha_s^3=\mathrm{Im}\frac{\partial q_s}{\partial z}f_s^-,\ \alpha_s^4=\mathrm{Im}\frac{\partial f_s^-}{\partial z}q_s$$

$$\alpha_s^5=\mathrm{Re}\,f_s^+q_s,\ \alpha_s^6=\mathrm{Re}\frac{\partial f_s^+}{\partial z}\frac{\partial q_s}{\partial z},\ \alpha_s^7=\mathrm{Re}\,p_sf_s^-,\ \alpha_s^8=\mathrm{Re}\frac{\partial p_s}{\partial z}\frac{\partial f_s^-}{\partial z} \tag{2.2}$$

Функции $G_s^i=G_s^i(\omega;\ \rho)$ имеют вид:

$$G_s^1=\frac{\omega}{1-2\xi_s(\omega)}\{-(n_s(\rho)\gamma_s^2(\omega)-\Delta_0^2(\omega))+\Delta_0^2(\omega)(1-\tilde\rho)+$$
$$+4\Delta_0^2(\omega)(n_s(\rho)-\nu(\rho)+4\Delta_0^4(\omega)h_s(\rho))\}$$

$$G_s^2=\frac{\omega\eta_s(\omega)}{\xi_s(\omega)}\left\{\tilde\rho+4\xi_s(\omega)\left(\frac{1}{m_s(\rho)}-1\right)\right\}.$$

$$G_s^3=\omega\left\{\frac{\gamma_s^2(\omega)}{m_s(\rho)}(1-2\xi_s(\omega))+\tilde\rho\frac{\Delta_0^2(\omega)}{1-2\xi_s(\omega)}+2\Delta_0^2(\omega)\right\}$$

$$G_s^4=\frac{\omega(1-2\xi_s)}{1-\xi_s(\omega)}\{-\tilde\rho\gamma_s^2(\omega)+4\Delta_0^2(\omega)h_s(\rho)\} \tag{2.3}$$

$$G_s^5=\frac{\omega\Delta_0(\omega)(1-2\xi_s)}{1-\xi_s(\omega)}\left\{\gamma_s^2(\omega)[\tilde\rho-1+2\nu(\rho)-2n_s(\rho)]-4\Delta_0^2(\omega)h_s(\rho)\right\}$$

$$G_s^6=\omega\Delta_0(\omega)\left\{2\frac{\mu_s}{\mu(\rho)}-\frac{\tilde\rho\gamma_s^2(\omega)-2\Delta_0^2(\omega)}{\gamma_s^2(\omega)(1-2\xi_s(\omega))}-1\right\}$$

$$G_s^7=\omega\Delta_0(\omega)\eta_s(\omega)\left\{-2\frac{\mu_s}{\mu(\rho)}+\frac{\tilde\rho(\gamma_s^2(\omega)-2\Delta_0^2(\omega))}{\gamma_s^2(\omega)(1-\xi_s(\omega))}+1\right\}$$

$$G_s^8=\frac{\omega\Delta_0(\omega)h_s(\omega)}{1-2\xi_s(\omega)}$$

Здесь

$$\xi_s(\omega)=\frac{\Delta_0^2(\omega)}{\gamma_s^2(\omega)},\quad \eta_s(\omega)=k_s^2(\omega)-\Delta_0^2(\omega),\quad h_s(\rho)=m_s(\rho)-1-n_s(\rho)+(2-m_s(\rho))\nu(\rho)$$

$$m_s(\rho)=\frac{\tilde\rho d^2(\rho)}{d_s^2},\quad n_s(\rho)=\frac{d_s^2}{\tilde\rho c^2(\rho)},\quad \nu(\rho)=\frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)},\quad \tilde\rho=\frac{\rho}{\rho_s}$$

Можно показать, что функции $\alpha_s^i=\alpha_s^i(z,\ \omega)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial^3\alpha_s^i}{\partial z^3}+4k_s^2(\omega)\frac{\partial\alpha_s^i}{\partial z}=0,\quad i=1,\ldots,4 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^4\alpha_s^i}{\partial z^4}+2(k_s^2(\omega)+\gamma_s^2(\omega)-2\Delta_0^2(\omega))\frac{\partial^2\alpha_s^i}{\partial z}+(k_s^2(\omega)-\gamma_s^2(\omega))\alpha_s^i=0,\ i=5,\ \ldots,8,$$

$$b_{s-1}\leqslant z\leqslant b_s,\quad s=1,\ldots,N$$

Пусть N^* – оптимальное число слоев, $\rho_s^*(s=1,\ldots,N^*)$ – оптимальные физические параметры материалов слоев, $b_s^*(s=1,\ldots,N^*-1)$ – оптимальные координаты границ раздела слоев. Тогда на оптимальном решении выполняется следующее условие:

$$R_s(f_s^{+*},\ f_s^{-*},\ p_s^*,\ q_s^*;\ \rho_s^*)|_z = \max_{\rho\in\Lambda} R_s(f_s^{+*},\ f_s^{-*},\ p_s^*,\ q_s^*;\ \rho)|_z,$$
$$b_{s-1}^* \leqslant z \leqslant b_s^*,\quad s=1,\ldots,N^* \tag{2.5}$$

Исследуем возможность существования качественных закономерностей структуры оптимальных решений в задачах оптимального синтеза вида (1.4), (1.5). Будем рассматривать наиболее интересный как в теоретическом, так и прикладном аспектах случай, когда требуемая зависимость $\tilde{T}(\omega)$ такова, что для каждого значения частоты $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ значение $\tilde{T}(\omega)$ является предельно достижимым. Таким образом, требуемая зависимость $\tilde{T}(\omega)$ может принимать только два значения по отдельности: либо нуль (полное отражение), либо единица (полное пропускание).

К рассматриваемому типу относятся следующие классы задач оптимального синтеза, в которых требуется обеспечить: максимальное гашение упругой волны в заданном диапазоне частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, минимальное отражение упругой волны в заданном диапазоне частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, максимальное гашение упругой волны в одних участках спектра и минимальное отражение в других участках.

3. Наклонное падение гармонической упругой волны. Будем рассматривать наклонное падение гармонической упругой волны с частотой ω на систему упругих слоев, причем допустимый набор состоит из двух материалов. Для рассматриваемого случая $\rho_s = \rho_{s-2}$, $c_s = c_{s-2}$, $d_s = d_{s-2}$, $s = 3, \ldots, N$, т.е. материалы всех четных и нечетных слоев будут иметь одинаковые физические свойства. С учетом структуры уравнений вида (2.4) для функций $\alpha_s^i(z,\ \omega)$, $b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s(s=1,\ldots,N)$, входящих в состав функций $R_s(f_s^+,\ f_s^-,\ p_s,\ q_s;\ \rho)$ (2.1), а также свойств решений исходной системы (1.4) можно найти связь между функциями $\alpha_s^i(z,\ \omega)$ для слоев с номерами s и $s+2$ (они обладают одинаковыми физическими свойствами). Такой конструктивный анализ дает возможность установить на оптимальном решении справедливость следующих равенств:

$$R_{s-2}(f_s^{+*},\ f_s^{-*},\ p_s^*,\ q_s^*;\ \rho)|_z = R_s(f_s^{+*},\ f_s^{-*},\ p_s^*,\ q_s^*;\ \rho)|_z \tag{3.1}$$
$$b_{s-3}^* \leqslant z \leqslant b_{s-2}^*,\quad s=4,\ldots,N^*-1$$

Поскольку на оптимальном решении функции R_s для внутренних слоев с одинаковыми физическими свойствами имеют одинаковую структуру, расстояние между оптимальными координатами границ раздела слоев для рассматриваемых слоев также будет одинаковым. Отметим, что оптимальные координаты границ раздела слоев являются особыми точками для функций R_s, поскольку в этих точках максимальное значение функций R_s одновременно достигается на различных элементах множества Λ. Поэтому из равенств (3.1) непосредственно получаем

$$\Delta_s^* = \Delta_{s-2}^*,\quad s=4,\ldots,N^*-1 \tag{3.2}$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть при наклонном падении гармонической упругой воны на систему упругих слоев допустимый набор состоит только из двух материалов. Тогда в оптимальной структуре толщина внутренних слоев с одинаковыми физическими свойствами одинакова.

Установленное свойство внутренней симметрии в оптимальных структурах позволяет существенно уменьшить размерность исходной задачи синтеза и свести многопараметрическую задачу синтеза, размерность которой определяется общим числом слоев оптимальной структуры, к трехпараметрической. Независимыми тремя варьируемыми параметрами являются толщины внутренних слоев с различными физическими свойствами и толщина одного из граничных слоев. Следовательно, для рассматриваемого случая может быть эффективно выделена полная совокупность параметров, реализующих предельные возможности композиционных конструкций.

4. Наклонное падение немонохроматической упругой волны. Вернемся к рассмотрению общего случая наклонного падения немонохроматической упругой волны на систему упругих слоев. Задачу оптимального синтеза (1.4), (1.5) будем рассматривать при следующем дополнительном предположении: при некоторой частоте $\omega = \omega^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ значение энергетического коэффициента пропускания проектируемой структуры $T(\omega)$ должно быть предельно достижимым, т.е.

$$T(\omega^*) = T^*_{\omega^*}(\omega^*) \tag{4.1}$$

(правая часть равенства – предельно достижимое значение энергетического коэффициента пропускания при частоте $\omega = \omega^*$).

Поскольку чем уже ширина спектра, тем выше аппроксимация, то наиболее близким к требуемому при частоте $\omega = \omega^*$ значение коэффициента пропускания будет для случая гармонического воздействия с этой частотой. Поэтому множество глобально-оптимальных решений в задаче оптимального синтеза (1.4), (1.5) при дополнительном условии вида (4.1) будет подмножеством глобально-оптимальных решений для случая гармонического воздействия с частотой $\omega = \omega^*$. Следовательно, для рассматриваемого случая структура оптимальных решений обладает теми же качественными закономерностями, что и для случая гармонических воздействий.

Таким образом, и для более общего случая наклонного падения упругих волн на систему упругих слоев взаимосвязь параметров в структурах, реализующих предельные возможности конструкции, обладает теми же качественными закономерностями и, в частности, тем же типом внутренней симметрии, что и для рассмотренных ранее случаев электромагнитных и акустических волн [1].

5. Наклонное падение упругой волны, близкое к нормальному. Рассмотрим вопрос о связи качественных закономерностей структуры оптимальных решений для случаев нормального и близкого к нормальному падения упругой волны.

Разложим решения исходной (1.4) и сопряженной к ней систем по степеням малого параметра ϑ_0. Тогда функции R_s (2.1) допускают представление

$$R_s(f_s^+,\ f_s^-,\ p_s,\ q_s;\ \rho)|_z = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \left[\frac{1}{\rho c^2(\rho)} \beta_s^1(z,\ \omega) + \rho \beta_s^2(z,\ \omega) \right] d\omega + O(\vartheta_0^2)$$
$$b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s,\quad s = 1, \ldots, N \tag{5.1}$$

Функции $\beta_s^1(z,\ \omega)$, $\beta_s^2(z,\ \omega)$ выражаются через решения исходной (1.4) и сопряженной к ней систем.

Таким образом, для случаев падения упругой волны, близкого к нормальному, структура функций R_s (5.1) аналогична структуре функций R_s для случая нормального падения упругих волн [1]. Значит, для этих случаев могут быть установлены такие же качественные закономерности структуры оптимальных решений, что и при нормальном падении немонохроматической упругой волны [1].

Конструктивный анализ необходимых условий оптимальности, проведенный по аналогии с полученными ранее результатами [1], позволяет установить следующее.

Введем функцию

$$\varphi(\rho,\ \tau)=\frac{\mu(\rho)}{\rho}+\tau\rho,\quad -\infty<\tau<+\infty;\quad \mu(\rho)=\frac{1}{c^2(\rho)}-\frac{\sin^2\vartheta_0}{c_0^2}$$

Обозначим

$$\rho^+(\tau)=\arg\max_{\rho\in\Lambda}\varphi(\rho,\ \tau),\quad \rho^-(\tau)=\arg\min_{\rho\in\Lambda}\varphi(\rho,\ \tau)$$

$$(x^*=\arg\operatorname{extr}_x A(x),\quad \text{если}\quad A(x^*)=\operatorname{extr}_x A(x))$$

($\rho^+(\tau)$ – монотонно возрастающая, а $\rho^-(\tau)$ – монотонно убывающая функция аргумента τ; в силу дискретности множества Λ обе эти функции кусочно-постоянные). В оптимальную упругую систему могут входить только материалы, свойства которых принадлежат областям значений этих функций. Поэтому анализ функций $\rho^+(\tau)$ и $\rho^-(\tau)$ дает существенную информацию о структуре оптимальной конструкции.

Утверждение 2. Для падения упругой волны на систему упругих слоев, близкого к нормальному, число различных материалов, составляющих оптимальную упругую систему, не может превосходить $p+q$, где p и q – число точек разрыва функций $\rho^+(\tau)$ и $\rho^-(\tau)$ соответственно.

На элементах множества Λ введем функцию

$$L(\alpha,\ \beta)=-\frac{\mu(\beta)-\mu(\alpha)}{\beta-\alpha},\quad \alpha,\ \beta\in\Lambda$$

Материалы, входящие в множество Λ, будем считать упорядоченными в порядке возрастания их плотностей.

Утверждение 3. Для падения упругой волны, близкого к нормальному, физические свойства материалов, входящих в состав оптимальной упругой системы, удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений:

$$L(\rho^{j^+_{r-1}},\ \rho^{j^+_r})=\min L(\rho^{j^+_{r-1}},\ \rho),\quad \rho^{j^+_{r-1}}\leqslant\rho\leqslant\rho_{\max}$$
$$r=1,\ldots,p;\quad j_0^+=1,\quad j_p^+=m \tag{5.2}$$

$$L(\rho^{j^-_{r-1}},\ \rho^{j^-_r})=\max L(\rho^{j^-_{r-1}},\ \rho),\quad \rho^{j^-_{r-1}}<\rho\leqslant\rho_{\max}$$
$$r=1,\ldots,q;\quad j_0^-=1,\quad j_q^-=m \tag{5.3}$$

Для падения упругой волны, близкого к нормальному, физические свойства материалов, входящих в оптимальную упругую систему, могут быть только элементами множества $\Lambda^*=\Lambda^+\cup\Lambda^-$, где

$$\Lambda^\pm=\{\rho_{\min}=\rho^{j_0^\pm}<\rho^{j_1^\pm}<\ldots<\rho^{j_p^\pm}=\rho_{\max}\}$$

Для падения упругой волны, близкого к нормальному, система рекуррентных соотношений (5.2), (5.3) позволяет осуществлять эффективную априорную редукцию исходного множества допустимых вариантов Λ. При этом открываются новые возможности прогнозирования физических свойств материалов, включение которых в исходный набор приводит к значительному улучшению функциональных характеристик проектируемых структур.

Утверждение 4. Для падения упругой волны, близкого к нормальному, физические параметры материалов соседних слоев оптимальной упругой системы являются соседними в последовательности

$$\ldots\rho^{j_0^+},\ \rho^{j_1^+},\ \ldots\rho^{j_p^+},\ \rho^{j_q^-},\ \rho^{j_{q-1}^-},\ \ldots\rho^{j_0^-},\ \rho^{j_0^+},\ \rho^{j_1^+},\ldots \tag{5.4}$$

Данное свойство устанавливает характер сочленения материалов слоев с различными физическими свойствами на оптимальном решении. Неоднородные структуры, для которых порядок чередования материалов слоев отличен от (5.4), не оптимальны.

Установленные закономерности структуры оптимальных упругих систем позволяют значительно сократить количество допустимых вариантов многослойных конструкций, анализируемых на оптимальность. Знание таких закономерностей позволяет повысить эффективность различных методов поиска оптимального решения и расширить пределы применимости различных подходов.

6. Условия, при которых в состав оптимальной упругой системы может входить не более двух материалов. Вернемся к рассмотрению случая гармонической упругой волны.

Было установлено [3], что если слоистая структура составлена из материалов, в которых сдвиговые волны не возникают, то оптимальная конструкция может состоять не более чем из двух материалов из допустимого набора независимо от количества материалов, составляющих исходный набор.

Конструктивный анализ необходимых условий оптимальности, проведенный по аналогии со случаем, когда в слоях сдвиговые волны не возникают [3], позволяет установить, что при определенных условиях данное свойство может иметь место и для более общего случая, когда в слоях могут возникать сдвиговые волны.

Утверждение 5. При достаточно малых углах падения гармонической упругой волны на систему упругих слоев независимо от количества материалов, составляющих исходный набор, оптимальная слоистая структура будет состоять не более чем из двух материалов из допустимого набора, физические свойства которых являются соседними в последовательности (5.4).

Очевидно, что сформулированное свойство справедливо и для случая немонохроматических упругих волн, но при дополнительном предположении, сформулированном в разд. 4, что при некоторой частоте $\omega^* \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ значение энергетического коэффициента пропускания $T(\omega)$ проектируемой структуры должно быть предельно достижимым, т.е. при дополнительном выполнении условия (4.1).

Таким образом, для рассмотренных выше случаев поставленная задача оптимального синтеза может быть полностью решена, т.е. эффективно может быть выделена полная совокупность вариантов слоистых структур, реализующих предельные возможности.

Проведенный анализ позволяет заключить, что необходимые условия оптимальности (2.5) несут существенную информацию о структуре оптимальной конструкции и, несмотря на сложный вид функций Гамильтона для исследуемой задачи (2.1) – (2.3), на основе конструктивного анализа удается выявить качественную структуру оптимального решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусев Е.Л.* Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993. 268 с.
2. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
3. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности оптимальной структуры конструкций в задачах оптимального синтеза акустических систем // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 5. С. 705–708.

Якутск
e-mail: e.l.gusev@ipng.ysn.ru

Поступила в редакцию
20.VI.2000