УДК 539.3:534.1

© 2001 г. К.И. Романов

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИШНИХ НЕИЗВЕСТНЫХ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

Приближенный метод определения критических нагрузок в задачах устойчивости сжатых стержней распространен на класс статически неопределимых систем. С этой целью разработан метод решения задач устойчивости при наличии лишних неизвестных, определяемых условием стационарности потенциальной энергии системы. Показано, что в сочетании с методом Граммеля и вариационным принципом Гамильтона изложенный в статье метод определения лишних неизвестных в статически неопределимых системах может быть применен и в задачах нахождения собственных частот колебаний стержней.

1. Энергетический метод в теории устойчивости. В задачах устойчивости сжатых в пределах упругости стержней широко используется энергетический метод [1–5], в соответствии с которым при потере устойчивости без растяжения оси критическая сила приближенно определяется по формуле

$$P_* = \frac{U}{\lambda} = \int_0^l EJy''^2 dz \left(\int_0^{l_0} y'^2 dz \right)^{-1} \tag{1.1}$$

где U – потенциальная энергия деформации, λ – перемещение точки приложения продольной силы, EJ – минимальная жесткость, l – длина стержня, $y(z)$ – приближенная зависимость прогиба от продольной координаты. При этом потенциальная энергия деформации, как правило, определяется выражением

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EJy''^2 dz \tag{1.2}$$

Вместе с тем энергия деформации может быть вычислена [1] непосредственно в виде

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dz}{EJ} \tag{1.3}$$

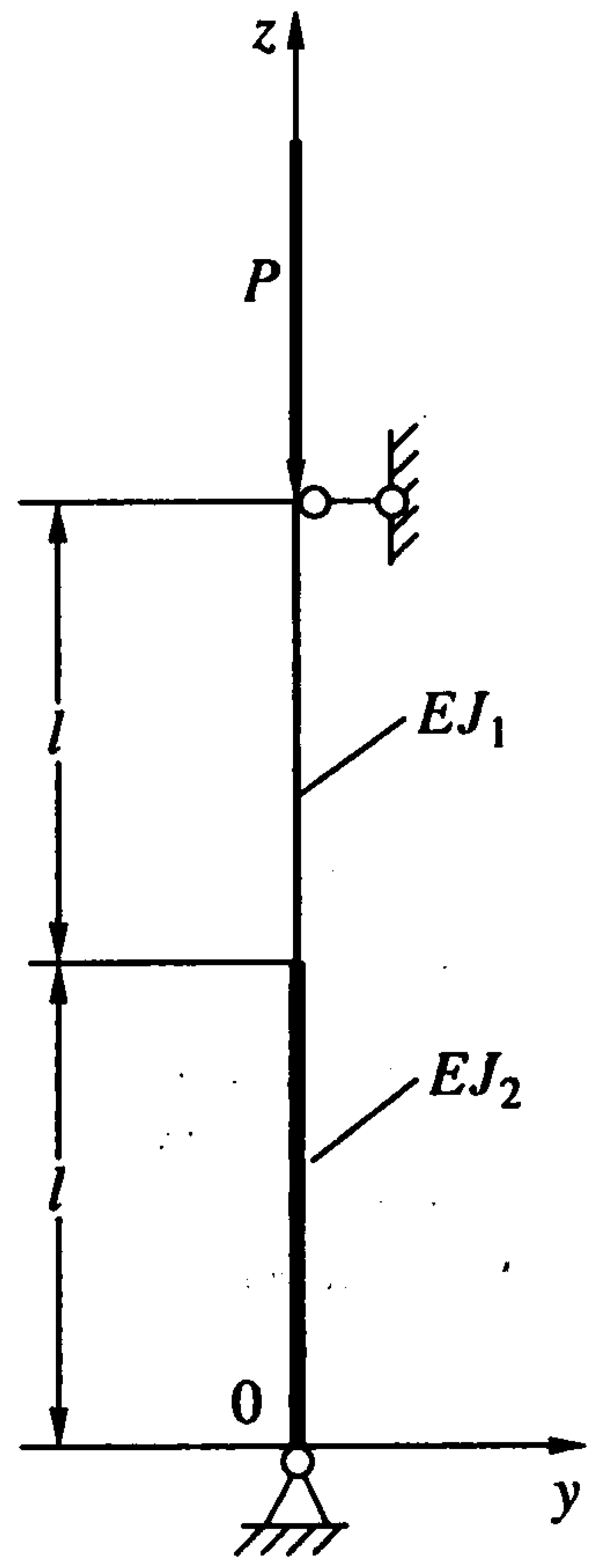
где M – функция изгибающего момента, определяемая условием равновесия отсеченной части стержня в деформированном состоянии.

Так известно [1, 3], что применение выражения (1.3) предпочтительнее по сравнению с (1.2), так как при вычислении U по формуле (1.3) точность приближенного решения зависит от точности задания $y(z)$, а не от точности аппроксимации $y''(z)$, которая в ряде случаев может оказаться ниже, чем точность подбора $y(z)$.

Кроме того, энергетический метод, основанный на использовании выражения (1.2), приводит к неверному результату в случае стержней кусочно-постоянной жесткости.

Рассмотрим в подтверждение сказанного пример, приведенный В.Л. Бидерманом[1].

[1] *Бидерман В.Л.* Энергетический метод в теории устойчивости сжатых стержней. Доклад на заседании кафедры "Прикладная механика (Сопротивление материалов и динамика и прочность машин)" МГТУ им. Н.Э. Баумана (16.04.93 г.).



Фиг. 1

На фиг. 1 изображен статически определимый стержень, сжатый вдоль оси силой P. Для определения критической силы задаемся функцией прогибов в виде

$$y = A\sin(\pi z/(2l))$$

Тогда по формуле (1.1)

$$P_* = \frac{\pi^2}{8l^2}(EJ_1 + EJ_2) \tag{1.4}$$

т.е. при $EJ_1 \to 0$ имеем $P_* \neq 0$, хотя должно быть $P_* \to 0$, так как верхний участок не держит нагрузку.

Решая эту же задачу на основе выражения (1.3), получим $M = -Py$ и, следовательно,

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2l}\frac{M^2dz}{EJ} = \frac{P^2A^2l}{4}\left(\frac{1}{EJ_1} + \frac{1}{EJ_2}\right)$$

Поэтому на основании энергетического уравнения [2]

$$U = P_*\lambda \tag{1.5}$$

имеем

$$P_* = \frac{\pi^2}{2l^2}\left(\frac{1}{EJ_1} + \frac{1}{EJ_2}\right)^{-1} \tag{1.6}$$

В данном случае отсутствует недостаток, отмеченный выше, поскольку при $EJ_1 \to 0$ или $EJ_2 \to 0$, $P_* \to 0$, что согласуется с физическим смыслом задачи.

В частности, сопоставим между собой точность решения задачи для рассмотренного примера, когда $EJ_2 = 4\,EJ_1 = 4EJ$. Имеем

$$P_* = \xi\frac{EJ}{l^2}, \quad \xi = \begin{cases} 5\pi^2/8 = 6.16 & \text{по формуле (1.4)} \\ 2\pi^2/5 = 3.94 & \text{по формуле (1.6)} \\ 3.65 & \text{для точного решения [2].} \end{cases}$$

Видно, что при существенной неоднородности поперечного сечения энергетический метод, основанный на вычислении потенциальной энергии по выражению (1.3), приводит к значительно лучшему соответствию с точным решением, чем метод, основанный на использовании выражения (1.2).

В основе обоих подходов лежит приближенное задание функции прогибов $y(z)$, т.е. одно и то же поле перемещений. Поэтому оба способа дают завышенную оценку критической силы. Принципиальное различие этих двух подходов заключается в способе вычисления U.

Дальнейшее развитие метода, связанного с использованием выражения $M = M(P, y, z)$, сопряжено с распространением этого метода на класс статически неопределимых задач, особенность которых обусловлена наличием лишних неизвестных, не определяемых уравнениями статики.

2. Общий подход. Общий подход к решению статически неопределимых задач устойчивости стержня, сжатого силой P, сводится к следующему.

1°. Задаемся приближенно с учетом граничных условий задачи функцией прогибов $y = Af(z)$, где A – неопределенный коэффициент.

2°. По выражению (1.3) определяем потенциальную энергию деформации $U = U(X_1, X_2, \ldots, P, A)$, где $X_1, X_2, \ldots$ – лишние неизвестные статически неопределимой задачи.

3°. Составляем выражение потенциальной энергии системы

$$\Pi = U - P\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2dz}{EJ} - \frac{1}{2}P\int_0^{l_0} y'^2dz \tag{2.1}$$

где l_0 – координата точки приложения силы, и определяем лишние неизвестные X_i из условия стационарности П для консервативных внешних сил

$$\partial \Pi / \partial X_1 = 0, \quad \partial \Pi / \partial X_2 = 0, \ldots \qquad (2.2)$$

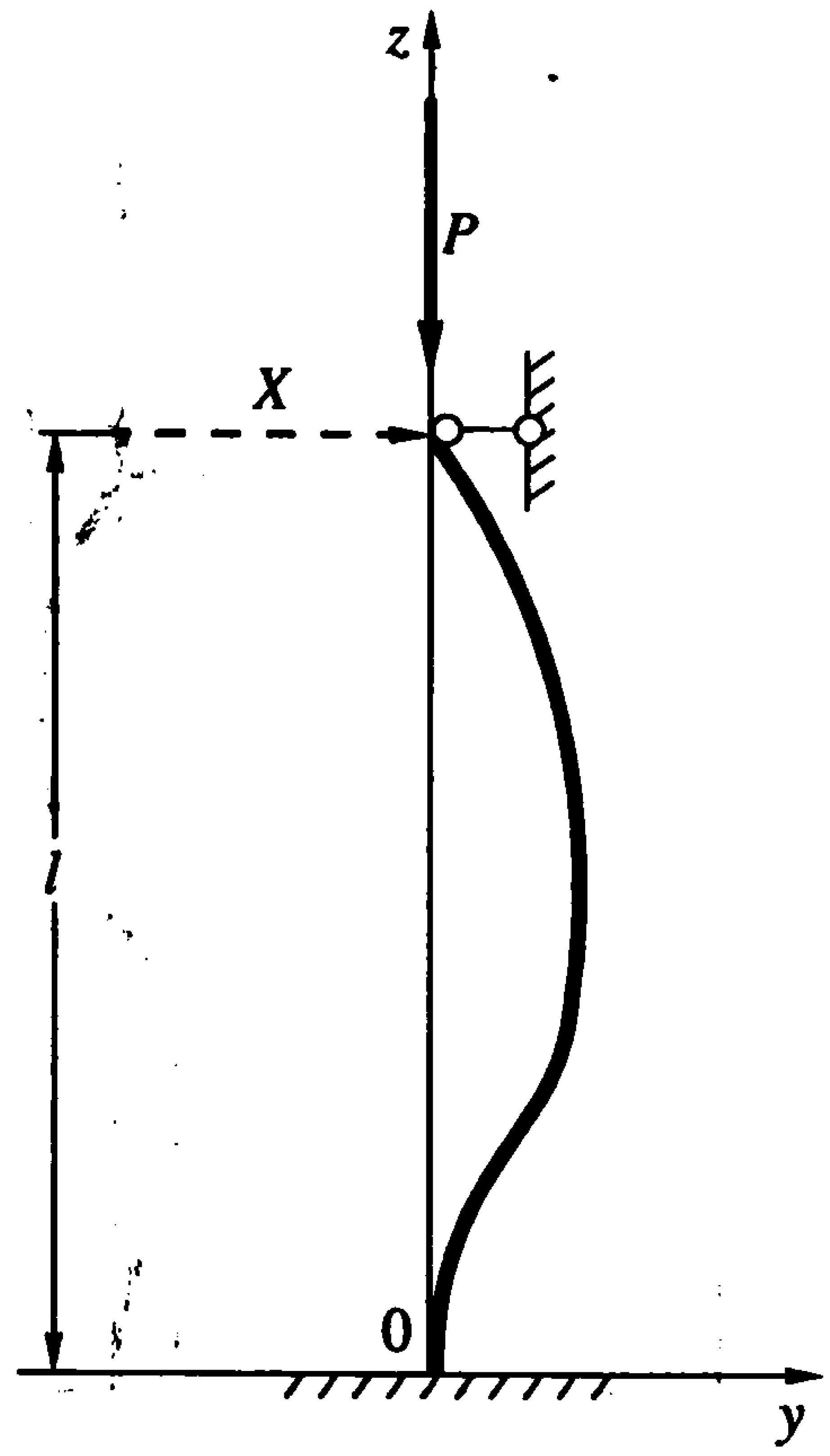
4°. Приравнивая выражение (2.1) к нулю, приходим к уравнению (1.5), из которого определяем критическую силу.

В результате устанавливается значение силы $P = P_*$, при которой возможно существование рассматриваемой равновесной формы изогнутой силы. Это и будет приближенное значение критической силы.

Рассмотрим в качестве иллюстрации предложенного метода два примера статически неопределимых задач.

Пример 1. Определить критическую силу для стержня, нагруженного по схеме, изображенной на фиг. 2, при $EJ = \text{const}$.

Зададимся приближенно функцией прогибов в виде полинома четвертой степени



Фиг. 2

$$y = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

коэффициенты которого определим из четырех граничных условий

$$z = 0: \quad y = y' = 0; \qquad z = l: \quad y = y'' = 0$$

Функция прогибов, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$y = Af(z), \quad f(z) = z^4 - \frac{5}{2} l z^3 + \frac{3}{2} l^2 z^2$$

Изгибающий момент определяется уравнением равновесия отсеченной части стержня в деформированном состоянии

$$M = X(l - z) - Py = X(l - z) - PAf(z)$$

где X – неизвестная реакция в верхней опоре.

Потенциальная энергия деформации U, перемещение точки приложения силы и потенциальная энергия системы П имеют вид

$$U = \frac{X^2 l^3}{6EJ} - \frac{XPAl^6}{30EJ} + \frac{19P^2A^2l^9}{5040EJ}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l y'^2 dz = \frac{3}{70} A^2 l^7$$

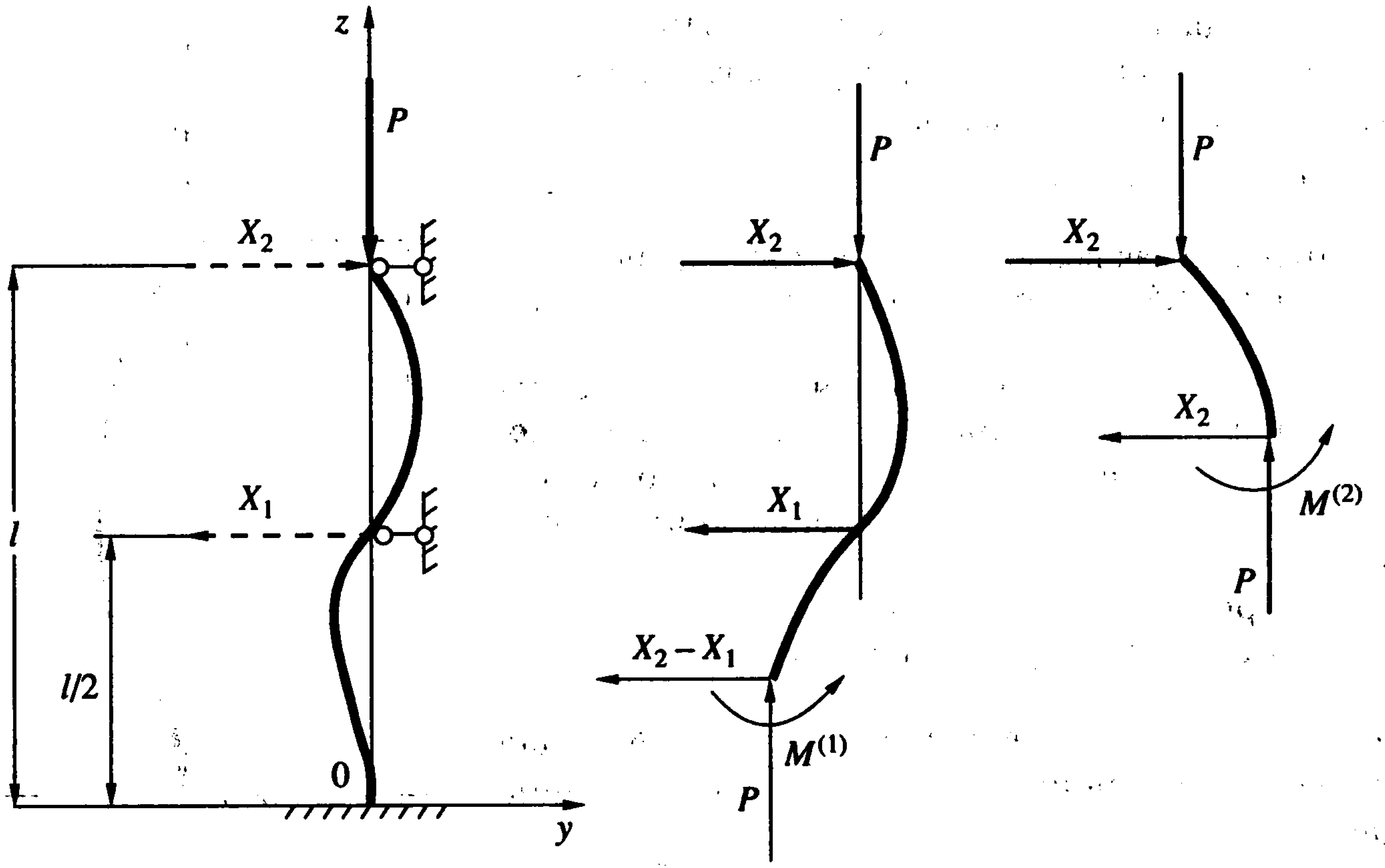
$$\Pi = U - P\lambda$$

Реакция X определяется условием $\partial \Pi / \partial X = 0$, откуда получаем

$X = PAl^3/10$

Потенциальная энергия деформации, соответствующая найденному значению X, равна

$U = 159P^2A^2l^9/(75600EJ)$



Фиг. 3

Из условия П = 0 находим критическую силу

$P_* = 20.4EJ/l^2$

что отличается от точного значения [2] на 1%.

Решение этой же задачи по формулам (1.1) и (1.2) дает

$P_* = 21EJ/l^2$

что отличается от точного решения на 4%.

Таким образом, энергетический метод, основанный на формуле (1.3), приводит к более точному результату, чем приближенное решение с использованием формулы (1.2).

Пример 2. Определить критическую силу для стержня, нагруженного по схеме, изображенной слева на фиг. 3 при EJ = const.

Граничные условия и соответствующая функция прогибов имеют вид

$$z=0: \quad y=y'=0; \quad z=l/2: \quad y=0; \quad z=l: \quad y=y''=0,$$

$$y=Af(x), \quad f(x)=x^5-\frac{11}{4}x^4+\frac{19}{8}x^3-\frac{5}{8}x^2$$

$x = z/l$

Перемещение точки приложения силы

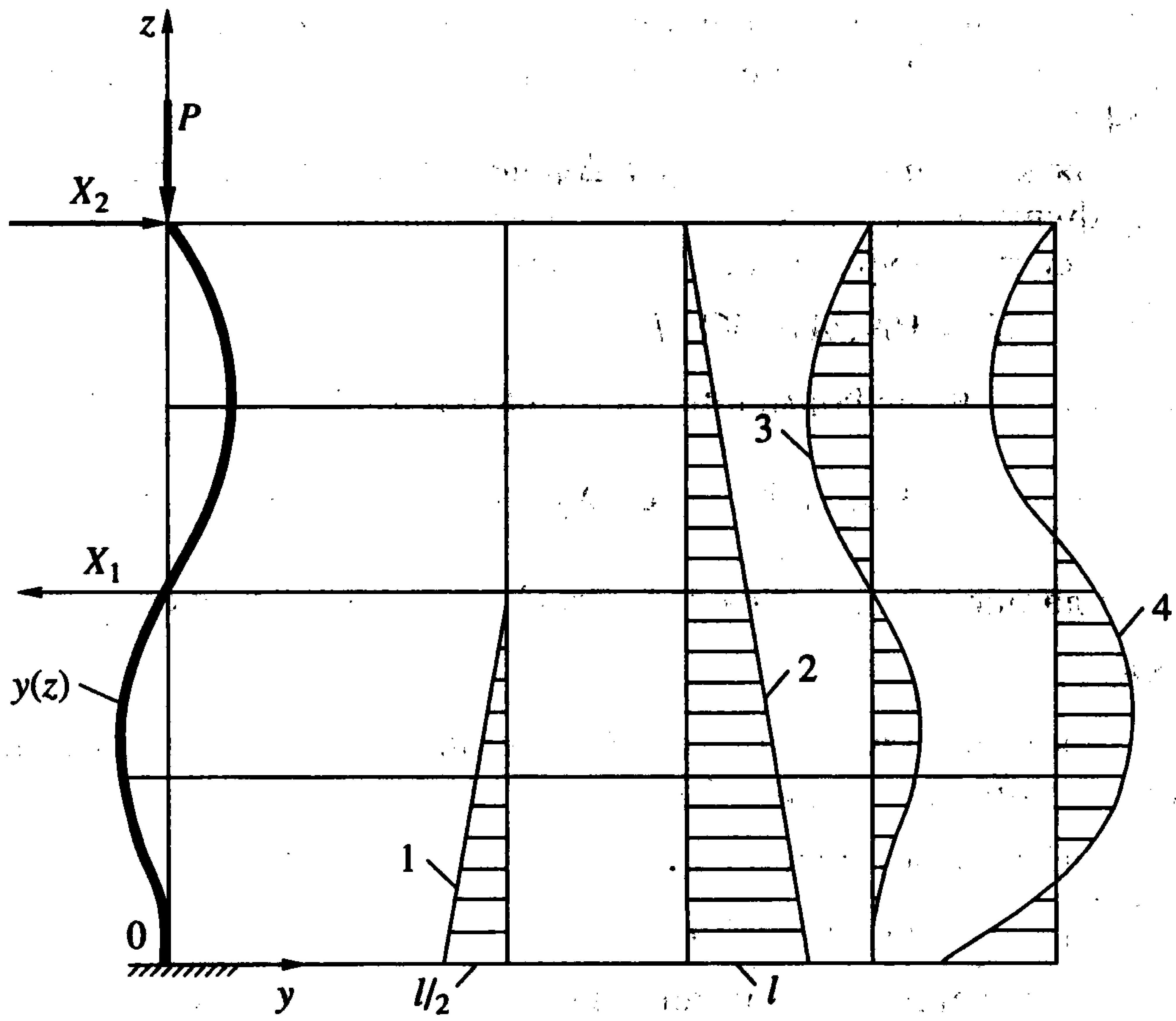
$\lambda = 23A^2/(10080l)$

Изгибающие моменты определяются уравнениями равновесия отсеченных частей стержня в деформированном состоянии (правая часть фиг. 3)

$$M^{(1)} = -Py - X_1(l/2-z) + X_2(l-z)$$

$$M^{(2)} = -Py + X_2(l-z)$$

где X_1 и X_2 – лишние неизвестные.



Фиг. 4

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^{l/2} M^{(1)^2} dz + \int_{l/2}^{l} M^{(2)^2} dz\right] \tag{2.3}$$

Лишние неизвестные определяются условиями (2.2), которые, очевидно, равносильны равенствам

$$\partial U / \partial X_1 = 0, \quad \partial U / \partial X_2 = 0$$

Продифференцируем функцию (2.3) по X_1 и X_2. Тогда получим систему двух уравнений в виде, аналогичном канонической системе метода сил при поперечном изгибе [2],

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \Delta_{i0} = 0, \quad i = 1,2 \tag{2.4}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\int_0^{l/2}\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 dz, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ}\int_0^{l/2}(l - z)\left(\frac{l}{2} - z\right) dz$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}\int_0^{l}(l - z)^2 dz$$

$$\Delta_{10} = \frac{P}{EJ}\int_0^{l/2} y\left(\frac{l}{2} - z\right) dz, \quad \Delta_{20} = -\frac{P}{EJ}\int_0^{l} y(l - z) dz$$

Для определения коэффициентов δ_{ij} можно применить правило Верещагина, заменяющее вычисление интегралов перемножением соответствующих эпюр (фиг. 4), что существенно сокращает объем вычислений. На фиг. 4 слева на расчетной схеме показан график функции y, имеющей значения в характерных сечениях $z = l/4$: $y = 3A/256$ и $z = 3l/4$: $y = 9A/512$. Эпюры 1 и 2 соответствуют единичным силам $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$, эпюра 3 представляет собой график изгибающих моментов от заданной системы сил ($-Py$), 4 – эпюра изгибающих моментов в системе после раскрытия статической неопределимости. В частности, в сечении у заделки значение момента составляет 1528PA/125440.

Для определения коэффициентов Δ_{10} и Δ_{20} необходимо аналитическое интегрирование, поскольку функция $y(z)$ может быть произвольной.

В результате из системы уравнений (2.4) получаем

$$X_1 = 9PA/(196l), \quad X_2 = 169PA/(15680l).$$

Потенциальная энергия деформации вычисляется по формуле (2.3)

$$U = \frac{P^2}{2EJ}\int_0^l y^2 dz + \frac{1}{2}\delta_{11}X_1^2 + \delta_{12}X_1X_2 + \frac{1}{2}\delta_{22}X_2^2 + \Delta_{10}X_1 + \Delta_{20}X_2 = 4.34\cdot 10^{-5}\frac{P^2A^2l}{EJ}$$

Критическая сила определяется из условия $\Pi = 0$, откуда следует

$$P = P_* = 52.5EJ/l^2$$

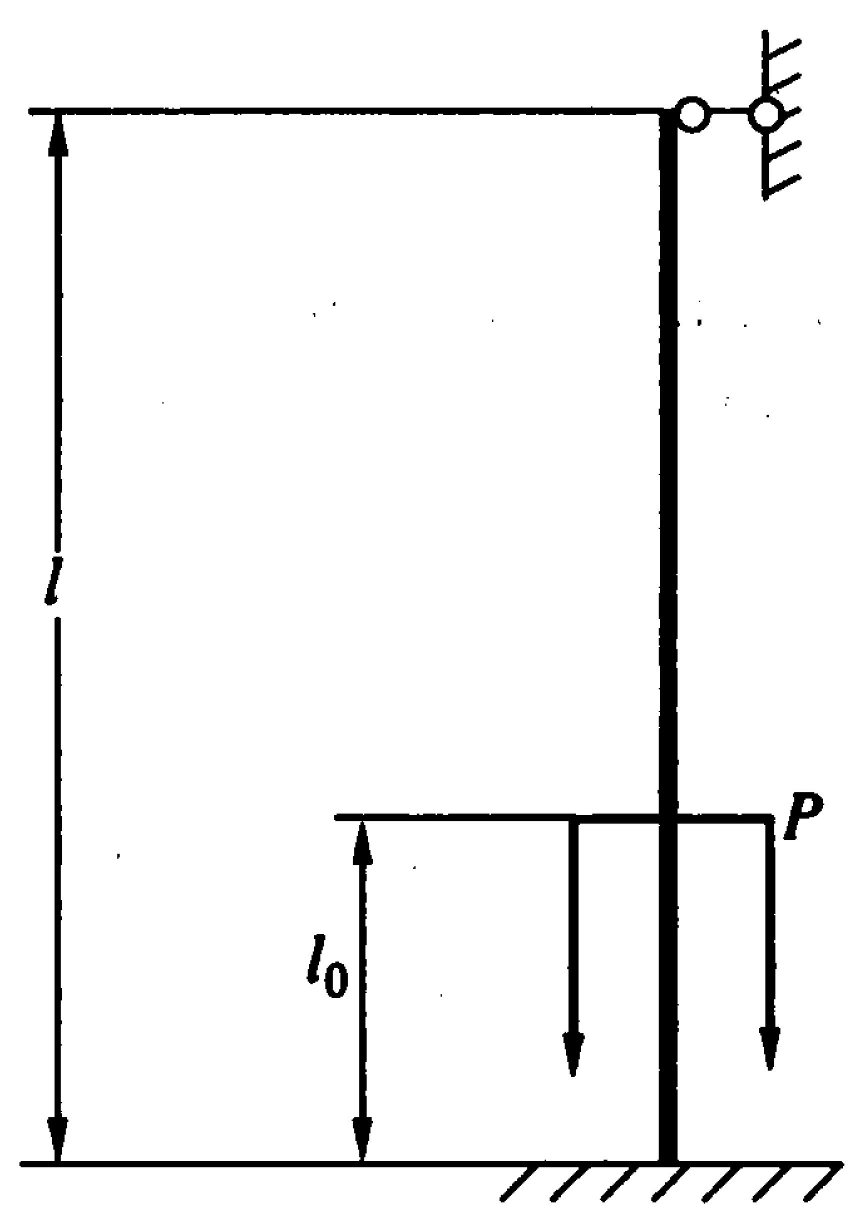
Сопоставим точность полученного приближенного решения с критической силой, определяемой по формулам (1.1) и (1.2)

$$P_* = \xi\frac{EJ}{l^2}, \quad \xi = \begin{cases} 56 \text{ по формуле (1.1)} \\ 51.12 \text{ для точного решения [5]} \end{cases}$$

Таким образом, погрешность применения, в рассматриваемом примере, вычисления U по формуле (1.2) составляет 9,5%, а вычисление U по формуле (1.3) приводит к погрешности 2,7%.

Аналогично может быть получено приближенное решение и других задач устойчивости сжатых стержней. Например, для стержня, изображенного на фиг. 5, при $l_0 = 0{,}3l$ имеем

$$P_* = \xi\frac{EJ}{l^2}, \quad \xi = \begin{cases} 81.5 \text{ по формулам (1.1), (1.2)} \\ 74.4 \text{ по формуле (1.3)} \\ 64 \text{ для точного решения} \end{cases}$$



Фиг. 5

Таким образом, вычисление потенциальной энергии по формуле (1.3) приводит в ряде случаев к лучшему согласованию с точным решением, чем вычисление U по формуле (1.2).

3. Энергетический метод в теории колебаний. Изложенный метод определения лишних неизвестных в статически неопределимых системах может быть применен и в задачах определения собственных частот колебаний стержней. Широко используемый в теории колебаний метод Граммеля [6] был применен [7] к решению статически определимой задачи расчета частоты поперечных колебаний консольной балки. Покажем на элементарном примере возможность распространения метода Граммеля на статически неопределимые системы.

Рассмотрим продольные колебания стержня постоянного поперечного сечения, закрепленного по концам [7]. Зададимся амплитудной функцией в виде

$$u = \sin(\pi z/l)$$

соответствующей точной форме собственных колебаний первой частоты.

Тогда максимальная кинетическая энергия движения и максимальная потенциальная энергия деформации вычисляются по формулам

$$T_{\max} = \frac{1}{2}p^2\int_0^l u^2 dz = \frac{1}{4}p^2\rho Fl$$

$$U_0 = \frac{1}{2EF}\int_0^l \left[X - p^2\rho F\frac{l}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi z}{l}\right)\right]^2 dz = \frac{l}{2\pi EF}\left(\pi X^2 - 2Xp^2\rho Fl + \frac{3}{2}p^4\rho^2F^2\frac{l^2}{\pi}\right)$$

где p – частота собственных колебаний, X – неизвестная реакция в опоре.

Для определения реакции в статически неопределимой системе используем равенство

$$\partial U_0/\partial X = 0$$

по существу эквивалентное вариационному принципу Гамильтона. Тогда получим

$$X = p^2\rho Fl/\pi, \quad U_0 = p^4\rho^2F^2l^3/(4\pi^2EF)$$

и равенство $T_{\max} = U_0$ приводит, как и следовало ожидать, к точному решению для первой частоты

$$p = \pi[E/(\rho l^2)]^{1/2}$$

Другим примером являются поперечные колебания жесткозащемленного по концам стержня. В этом случае для стержня длиной l точное значение первой собственной частоты [7]

$$p_1 = 22.4\sqrt{EJ/(m_0 l^4)} \tag{3.1}$$

Приближенное решение по формуле Релея

$$p^2 = \int_0^l EJ\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2 dz\left(\int_0^l m_0 u^2 dz\right)^{-1}$$

для функции $u = 1 - \cos(2\pi z/l)$ приводит к значению, отличающемуся от (3.1) множителем 22.8 вместо 22.4.

По методу Граммеля для половины стержня примем $u = 1 + \cos(2\pi z/l)$. Тогда получим следующее выражение для максимальной кинетической энергии движения и интенсивности сил инерции:

$$T_{\max} \doteq 3p^2 m_0 l/8, \quad q = p^2 m_0(1+\cos x), \qquad x = 2\pi z/l$$

Поперечная сила в сечении

$$Q = \int_0^z q dz = \frac{p^2 m_0 l}{2\pi}(x + \sin x)$$

Изгибающий момент

$$M = -X + \int_0^z Q dz = -X + p^2 m_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + 1\right)$$

где X – неизвестный изгибающий момент в среднем сечении.

Вычисление потенциальной энергии деформации по формуле

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dz}{EJ}$$

и определение X из условия $\partial U_0/\partial X = 0$ дают

$$X = p^2 m_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\pi^2}{6} + 1\right)$$

$$U_0 = 14.65 \frac{p^4 m_0^2 l}{4\pi EJ} \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4$$

Приравнивая $T_{max} = U_0$, получаем точное значение первой собственной частоты.

Таким образом, применение разработанного метода определения лишних неизвестных в задачах устойчивости и колебаний стержней благоприятно сказывается на точности получаемых приближенных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
2. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
3. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
4. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 311 с.
5. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3/Под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1959. 1118 с.
6. *Biezeno C.B., Grammel R.* Technische Dynamik. B.: Springer, 1939. =*Биценко К.Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 900 с.
7. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972. 416 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.VIII.2000