

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. И.Б. Бахолдин, А. Т. Ильичев

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СРЕДАХ

Рассматривается задача о динамической неустойчивости солитонных решений (уединенных волн) гамильтоновых уравнений, описывающих плоские волны в нелинейных упругих композитных средах при наличии и отсутствии анизотропии. В анизотропном случае имеются два двухпараметрических семейства уединенных волн: быстрое и медленное, а при отсутствии анизотропии – одно трехпараметрическое семейство. На основе численного решения задачи Коши модельных уравнений дается классификация неустойчивости уединенных волн быстрого семейства в анизотропном случае и представителей семейств уединенных волн, скорости которых лежат вне диапазона устойчивости при наличии и отсутствии анизотропии. В статье приведены основные уравнения, описывающие плоские волны в нелинейных анизотропных упругих композитах, представлена гамильтонова форма основных уравнений, рассмотрены симметрии в анизотропном и изотропном случаях, приведены сохраняющиеся величины и солитонные решения – уединенные волны, исследован характер неустойчивости представителей всех трех семейств, приводится краткая формулировка результатов и обсуждаются проблемы неустойчивости быстрого семейства в анизотропном случае и представителей семейств, скорости которых лежат вне диапазона устойчивости при наличии и отсутствии анизотропии (взрывная неустойчивость).

Известно, что свойства композита, описываемого осредненными уравнениями (см., например, [1, 2]), и свойства составляющих его компонент существенно различаются. В частности, типичен случай возникновения дисперсии, несмотря на то что в каждом из упругих материалов, составляющих композит, дисперсии нет [1]. Таким образом, композит, состоящий из упругих материалов с нелинейным уравнением состояния, представляет собой диспергирующую среду, в которой могут распространяться волны, являющиеся результатом взаимодействия нелинейных и дисперсионных эффектов, в том числе уединенные волны (УВ). Вопрос о возможности наблюдения УВ на практике, естественно, связан с динамической устойчивостью этих волн.

Была исследована [3, 4] динамическая устойчивость УВ в нелинейно-упругом композите при наличии и отсутствии анизотропии, и определены достаточные условия нелинейной устойчивости разных семейств УВ, ответвляющихся от состояния покоя. Было также высказано предположение, что при нарушении этих условий УВ неустойчивы. Ниже путем численных расчетов устанавливается справедливость этих предположений и проводится классификация форм неустойчивости УВ.

**1. Формулировка задачи, симметрии и солитонные решения.** Изучаются плоские волновые движения в неоднородной нелинейной упругой среде (композите), когда перемещения  $w_\alpha$ , деформации  $u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x$  и скорости частиц  $v_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) зависят от одной пространственной переменной – декартовой координаты  $x = x_3$  и времени  $t$ . Будем рассматривать несжимаемые упругие среды, когда  $u_3$  и  $v_3$  постоянны. Эти постоянные можно положить равными нулю без ограничения общности.

Несмотря на то что движения нелинейного упругого тела описываются гиперболической системой уравнений [5], наличие внутренней неоднородной структуры мате-

риала на макроуровне приводит к дисперсии волн [1, 2]. Как известно [2], дисперсионные члены при осреднении могут быть добавлены двумя способами в уравнения вида

$$\mathcal{Q}\mathbf{v} = -\rho(y_1, y_2, y_3)\partial_{tt}\mathbf{v} + \mathcal{Q}^0\mathbf{v}, \quad \mathcal{Q}^0\mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ij}(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \right), \quad y_j = \frac{x_j}{\varepsilon}$$

Здесь  $\rho$  и  $A_{ij} = A_{ij}^T$  – периодические функции с периодом единица,  $\varepsilon \ll 1$ , что означает, что период неоднородности среды много меньше характерной длины изучаемых волн. В случае, когда  $A_{ij} = A_{ij}(y)$ ,  $y = x_1/\varepsilon$  и волна распространяется в направлении  $x_1$ , дисперсионные члены младшего порядка, возникающие при осреднении, имеют вид (если  $\mathbf{v}$  – двумерный вектор)  $\mathbf{v}''' \times \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{b}$  – постоянный псевдовектор, штрих означает производную по пространственной переменной. В случае, когда направление распространения волны ортогонально направлению периодичности среды, добавочные дисперсионные члены в низшем порядке по  $\varepsilon$  имеют вид  $\mathcal{M}\mathbf{v}'''$ , где  $\mathcal{M}$  – симметричная матрица. Предположим далее, что отсутствует волновая анизотропия и  $\mathcal{M} = \text{diag}\{m, m\}$ . Относительно упругой среды примем, что нелинейность, анизотропия и дисперсия малы и представляются членами одного порядка. Тогда система основных уравнений может быть записана в виде [6]

$$\partial_t u_i - \partial_x v_i = 0, \quad \rho_0 \partial_t v_i - \partial_x (\partial \Phi / \partial u_i) + m \partial_{xxx} u_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho_0$  – средняя плотность материала,  $\Phi$  – упругий потенциал, который дается выражением

$$\Phi = \frac{1}{2} f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4} \kappa (u_1^2 + u_2^2)^2$$

Постоянные  $g > 0$  и  $\kappa$  характеризуют анизотропию и нелинейность соответственно. Выражения для постоянных  $f$ ,  $g$  и  $\kappa$  приведены в [5]. Дисперсионное слагаемое с  $m > 0$  появляется в уравнениях движения (второй паре уравнений в (1.1)), например в случаях, когда однородная упругая легкодеформируемая среда содержит однородно распределенные стержни, имеющие достаточную жесткость на изгиб и расположенные параллельно оси  $x$  [6]. Кубическая нелинейность в изотропной упругости рассматривалась ранее [7] в нелинейной задаче о поперечных колебаниях, возбуждаемых в бесконечном упругом слое периодическим действием внешней касательной силы на одной из плоских границ.

Уравнения (1.1) могут быть записаны в гамильтоновом виде

$$\partial_t \mathbf{w} = \mathcal{J} \frac{\delta E(\mathbf{w})}{\delta \mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x, \quad \frac{\delta}{\delta \mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \delta / \delta u_1 \\ \delta / \delta u_2 \\ \delta / \delta v_1 \\ \delta / \delta v_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [v_1^2 + v_2^2 + \mu_1 u_1^2 + \mu_2 u_2^2 - \frac{\kappa}{2\rho_0} (u_1^2 + u_2^2)^2 + \frac{m}{\rho_0} (\partial_x u_1)^2 + \frac{m}{\rho_0} (\partial_x u_2)^2] dx$$

$$\mu_1 = (f - g) / \rho_0, \quad \mu_2 = (f + g) / \rho_0$$

Очевидно, что гамильтониан  $E$  постоянен в силу системы (1.2). Кроме этого, легко видеть, что и функционал

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} [u_1 v_1 + u_2 v_2] dx$$

является инвариантом. Формально сохраняющейся величиной является также векторный функционал

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} w dx$$

Уравнения (1.1), (1.2) в анизотропном случае ( $g \neq 0$ ) и функционалы  $E$ ,  $Q$ ,  $A$  инвариантны относительно группы трансляций

$$T(s)w = w(x + s) = \exp(s\partial_x)w(x), \quad s \in \mathbf{R}$$

Функционал  $Q$  является сохраняющейся величиной вследствие трансляционной инвариантности (1.1).

Система уравнений (1.2) имеет дополнительные сохраняющиеся величины в частном случае вырождения анизотропии ( $g = 0$ ). В этом случае имеем дополнительную вращательную симметрию

$$G(\varphi)w = \exp(\mathcal{A}\varphi)w, \quad \varphi \in S^1; \quad \mathcal{A} = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

где  $S^1$  – окружность. В результате наличия вращательной симметрии формально сохраняется величина

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [y_1 v_2 - y_2 v_1 + u_2 w_1 - u_1 w_2] dx; \quad \partial_x y_i = u_i, \quad \partial_x w_i = v_i$$

Гамильтониан  $E$  и функционал  $Q$  также инвариантны относительно группы вращений.

Солитонные решения системы уравнений (1.1) представляют собой бегущие УВ, быстро убывающие на бесконечности. После подстановки в (1.1)  $w = w(\xi)$ , где  $\xi = x - Vt$ ,  $V$  – постоянная скорость распространения волны, и однократного интегрирования с использованием условий убывания на бесконечности получим

$$v_i = -Vu_i, \quad \frac{m}{\rho_0} \ddot{u}_i = (\mu_i - V^2)u_i - \frac{\kappa}{\rho_0} u_i(u_1^2 + u_2^2) \quad (1.3)$$

Точки означают дифференцирование по переменной  $\xi$ .

Уравнения (1.3) для УВ записываются в эквивалентной форме

$$\frac{\delta E(\phi_V)}{\delta w} + V \frac{\delta Q(\phi_V)}{\delta w} = 0; \quad \phi_V = \{u_1^s, u_2^s, v_1^s, v_2^s\}^T, \quad v_i^s = -Vu_i^s \quad (1.4)$$

При  $\mu_i > 0$ ,  $\kappa > 0$  уравнения (1.3) имеют солитонные решения (обозначенные индексом  $s$  в (1.4)), для описания которых удобно ввести функцию

$$S(\xi, v) = \pm \frac{\sqrt{2\rho_0\kappa^{-1}(v - V^2)}}{\text{ch} \sqrt{\rho_0 m^{-1}(v - V^2)}\xi}$$

В анизотропном случае уравнения (1.3) имеют два семейства солитонных решений, отвечающих из состояния покоя

$$1) u_1^s = S(\xi, \mu_1), \quad u_2^s = 0; \quad 2) u_1^s = 0, \quad u_2^s = S(\xi, \mu_2) \quad (1.5)$$

$$V \in I, \quad I = \{V, V^2 < \mu_{1,2}\}$$

Каждое из семейств (1.5) – двухпараметрическое: параметрами служат скорость  $V$  и сдвиг  $s$  по координате  $\xi$ . Далее будем называть первое семейство УВ в (1.5) медленным, как существующее для меньшего диапазона скоростей, а второе – быстрым.

При отсутствии анизотропии  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  имеет место дополнительная вращательная симметрия: если  $\phi_V = \{u_1^s, u_2^s, v_1^s, v_2^s\}^T$  – солитонное решение уравнений (1.3), то  $\exp(\mathcal{A}\varphi)\phi_V$ ,  $\varphi \in S^1$  также будет солитонным решением. Поэтому достаточно рассмотреть лишь конкретный случай с фиксированным  $\varphi$ :

$$u_1^s = S(\xi, \mu), \quad u_2^s = 0; \quad V \in I, \quad I = \{V, V^2 < \mu\} \quad (1.6)$$

Семейство УВ, представителем которого является (1.6), является трехпараметрическим, третьим параметром служит угол вращения  $\varphi$ .

Устойчивость граничных состояний функционала  $E$  (солитонных решений) обусловлена возможностью построения функционала (имеющего смысл функции Ляпунова), обладающего локальным минимумом в окрестности солитонного решения  $\phi_V$ . Для бесконечномерных гамильтоновых систем вида (1.2) в качестве такого функционала используется [8]

$$R(w) = E(w) + VQ(w)$$

Причем в силу свойств симметрии трансляционно инвариантных уравнений функционал  $R(w)$ , как правило, не имеет локального минимума в точке  $\phi_V$  во всем функциональном пространстве  $X$  решений. Минимум может достигаться на нелинейном подмногообразии  $M$  пространства  $X$ , которое определяется следующим образом [8]:

$$M = \{w \in X, Q(w) = Q(\phi_V)\}$$

Наличие локального минимума функционала  $R(w)$  в точке  $\phi_V \in M$  на  $M$  достаточно для нелинейной динамической устойчивости солитона  $\phi_V$ .

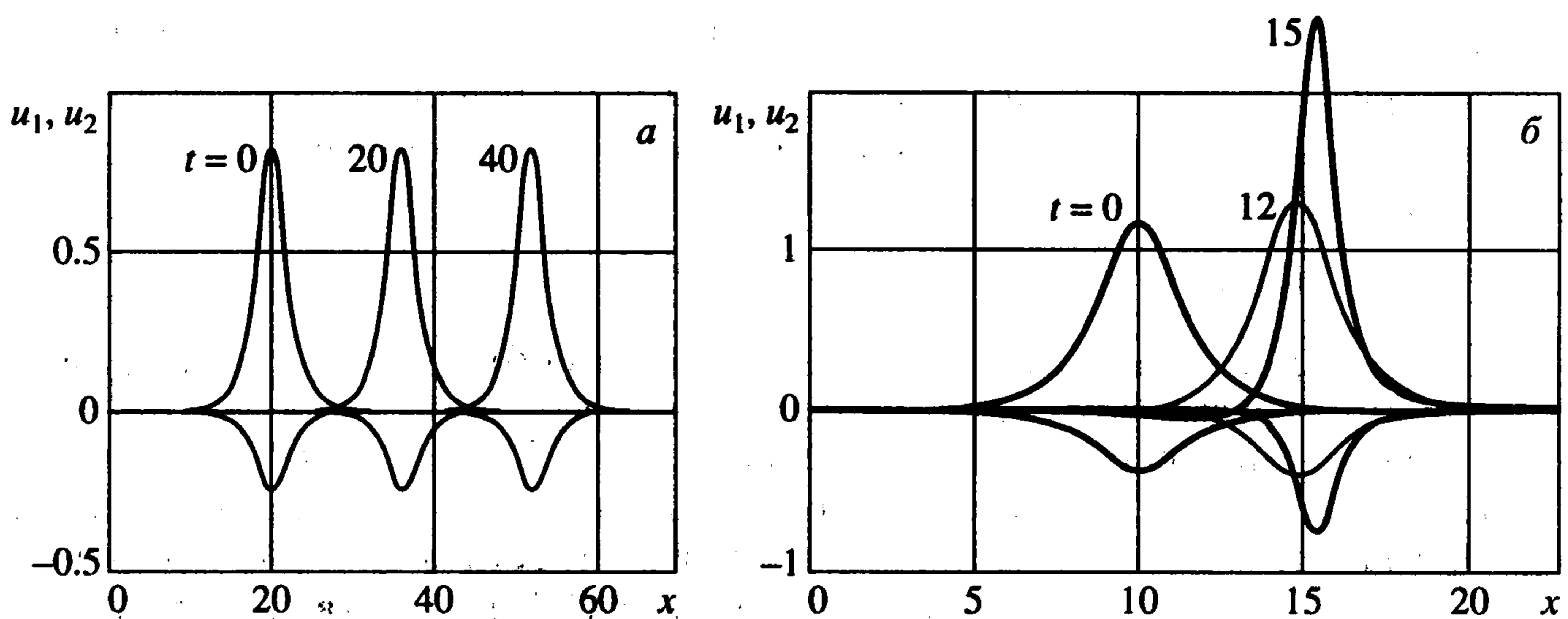
В силу (1.4) поведение функционала  $R(w)$  в окрестности  $w = \phi_V$  полностью определяется спектральными свойствами самосопряженного оператора

$$\mathcal{H} = \frac{\delta^2 E(\phi_V)}{\delta w^2} + V \frac{\delta^2 Q(\phi_V)}{\delta w^2}$$

При сужении  $R(w)$  на подмногообразии  $M$  для наличия динамической устойчивости  $\phi_V$  допускается наличие одного неустойчивого направления оператора  $\mathcal{H}$ , т.е. этот оператор может иметь одно простое отрицательное собственное значение. При этом положительный спектр оператора  $\mathcal{H}$  должен быть отделен от нуля. При выполнении этих свойств спектра функционал  $R(w)$  имеет локальный минимум в точке  $\phi_V$  на  $M$  (что означает устойчивость  $\phi_V$ ) при условии  $\partial Q(\phi_V)/\partial V > 0$  [8]. Было показано [3, 4], что перечисленные выше достаточные условия устойчивости выполняются при  $V \in I_{st}$ ; для медленного семейства УВ  $I_{st} = \{V \in I, V^2 > \mu_1/2\}$  и для изотропных УВ  $I_{st} = \{V \in I, V^2 > \mu/2\}$  (диапазоны устойчивости), т.е. в диапазоне устойчивости имеет место динамическая устойчивость УВ указанных семейств. Было сделано также предположение о том, что УВ упомянутых семейств вне диапазона устойчивости  $I_{st}$ , а также все УВ быстрого семейства неустойчивы [3, 4]. Это предположение подтвердилось в результате численного анализа решений задачи Коши уравнений (1.1).

Далее приводятся численные результаты исследования характера неустойчивости вне диапазона устойчивости УВ медленного и изотропного семейств (медленные и изотропные волны большой амплитуды), а также УВ быстрого семейства.

**2. Взрывная и распадная неустойчивость.** В данном разделе численно исследуется эволюция начальных данных типа УВ (1.5), (1.6) с применением трехслойной схемы с центральными разностями. Ранее эта схема уже продемонстрировала свою эффективность в решении ряда задач по моделированию УВ и скачков [9–11]. Она обеспечивает сохранение в численном решении основных свойств модели – консервативности и обратимости. И в данном случае применение этой схемы полностью подтвердило ожидаемые из теоретических рассуждений предположения о неустойчивости УВ в определенных диапазонах параметра скорости.



Фиг. 1

Были проведены расчеты для всех возможных типичных комбинаций параметров: быстрая или медленная волна, изотропный или неизотропный случай, наличие или отсутствие поворота начальных данных в изотропном случае (т.е. присутствует ли вторая компонента деформаций  $u_2$  в результате ортогонального преобразования, примененного к (1.6)), лежит ли скорость внутри или вне диапазона устойчивости. Численные расчеты полностью подтверждают теоретические результаты [3, 4] об устойчивости. Вне диапазонов устойчивости, а также при  $V^2 < \mu_2/2$  для быстрого семейства УВ наблюдается взрывная неустойчивость.

В качестве примера приводятся графики компонент  $u_1$  и  $u_2$  для расчетов УВ в изотропном случае с поворотом начальных данных, имеющих форму (1.6), вокруг оси  $x$ , поскольку в этих расчетах присутствуют две ненулевые компоненты  $u$ , во всех остальных случаях только одна. На фиг. 1 показано распространение изотропной УВ в устойчивом случае (а) при  $V = 0,8$  и эволюция начальных данных типа изотропной уединенной волны в неустойчивом случае (б) при  $V = 0,5$ ;  $\varphi = 0,3$  (угол поворота). Графики  $u_1$  расположены в области  $u > 0$ , графики  $u_2$  — в области  $u < 0$ . Для наглядности толщина линий для разных моментов времени сделана разной. Общие данные для всех фигур статьи:  $f = 1$ ,  $m = 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ .

Качественный вид графиков во всех расчетах одинаков. В устойчивых случаях УВ распространяется без изменения формы. В неустойчивых случаях вначале УВ движется без изменения формы, а затем начинает самофокусироваться, что в конечном итоге приводит к взрывообразному росту амплитуды и остановке расчета. Чем мельче взят пространственный шаг, т.е. чем точнее моделируется УВ, тем позже это происходит. При этом если в начальный момент времени одна из компонент равна нулю, то она остается равна нулю и в последующие моменты времени. Для изотропных расчетов с поворотом во все моменты времени остается верным соотношение  $u_2/u_1 = -\text{tg}\varphi$ , вплоть до момента остановки расчета.

Приведенные выше результаты расчетов по проверке устойчивости УВ медленного и быстрого семейств в анизотропном случае позволяют проверить устойчивость только по одному направлению. В них одна из компонент деформаций остается нулевой в течение всего времени расчета. Однако наличие дополнительного неустойчивого направления у оператора  $\mathcal{H}$  в этом случае [3, 4] позволяет предположить, что быстрые УВ неустойчивы во всем диапазоне значений  $V$ , а не только при  $V^2 < \mu_2/2$ . С целью проверки этого предположения были осуществлены расчеты с начальным ортогональным возмущением. Начальные данные для компоненты  $u_1$  теперь ненулевые:  $u_1 = \varepsilon u_2$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения. Отметим сразу, что рассматриваемая здесь неустойчивость — медленно

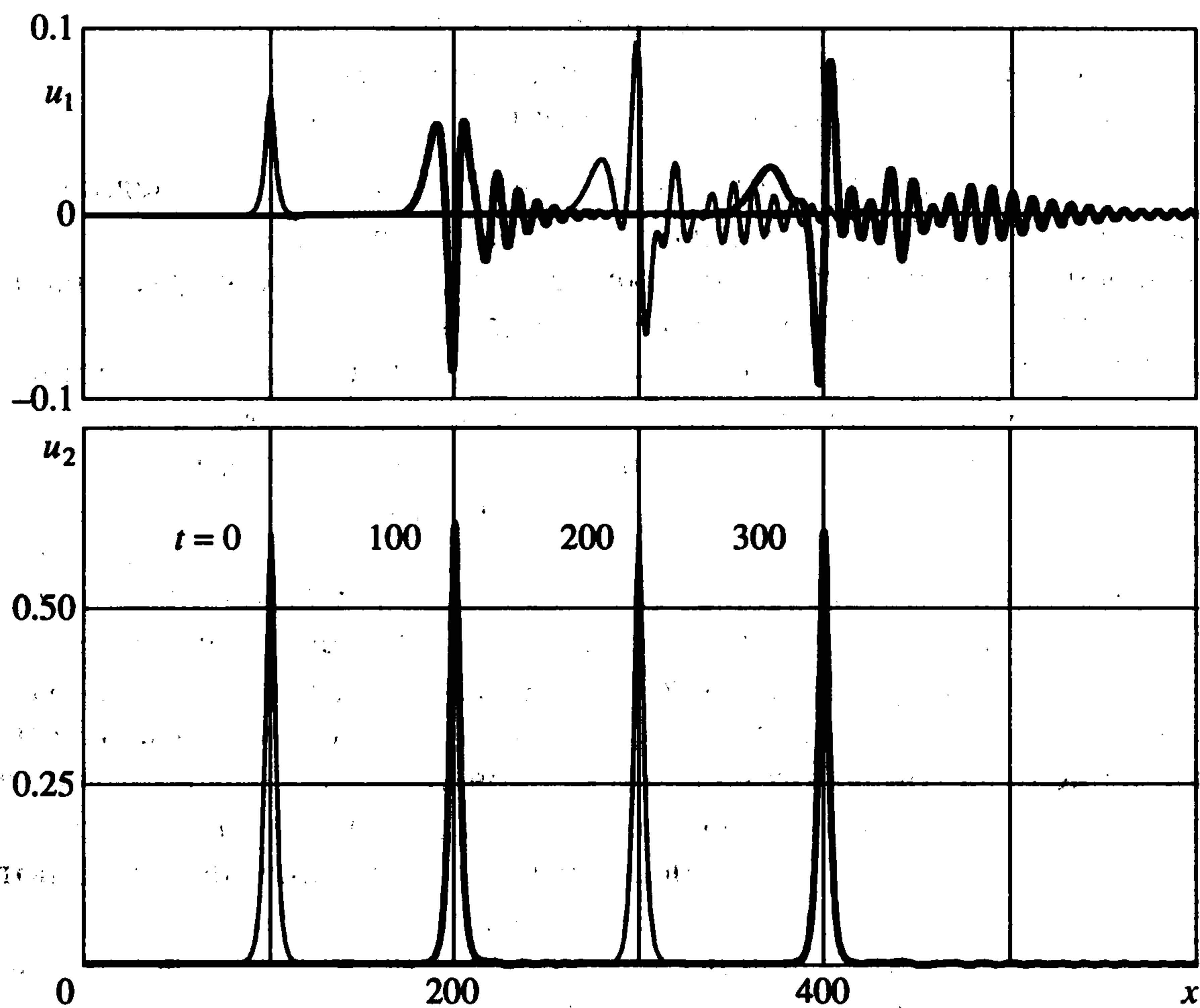
развивающийся процесс, поэтому на участке  $V^2 < \mu_2/2$ , где имеет место взрывная неустойчивость, проведение таких экспериментов не имеет смысла.

Расчеты показали следующее. При скорости распространения волны  $V$ , близкой к  $\mu_2^{1/2}$ , возмущение практически не воздействует на УВ (выделяется медленная компонента, которая постепенно отрывается от быстрой). При понижении скорости и соответственно увеличении амплитуды УВ появляется периодическая ортогональная компонента  $u_1$  (случай расчетов, когда резонансная длина волны сопоставима с характерной длиной УВ), см. фиг. 2,  $\epsilon = 0,1$ ,  $V = 1$ ,  $g = 0,2$ . Ниже при описании процесса подразумевается его пространственная трехмерность и имеется в виду то, что для компоненты  $u_2$  видна в основном солитонная составляющая, для  $u_1$  – периодическая. Справа (см. фиг. 2) от УВ имеется излучение, не находящееся в резонансе с ней, фазовая скорость волн больше скорости УВ. Трехмерная картина вне области УВ имеет некоторые общие черты с ранее исследованными случаями квазистационарного распада УВ при наличии пересечения прямой  $\omega = Uk$  с дисперсионной ветвью при  $k \neq 0$  [10, 11]. Кроме того, внутри области УВ (определяемой, например, по уровню 1% от ее амплитуды) решение для  $u_1$  оказывается явно нестационарным. В этой области вид графика периодической ортогональной компоненты ( $u_1$ ) сходен с УВ огибающей, 1 : 1-солитоном. Причем эта УВ огибающей циклически располагается в фазе и в противофазе к максимуму  $u_2$ . Одновременно с этими колебаниями возникают колебания максимальных значений амплитуды огибающей излучаемой периодической составляющей. Средние установившиеся значения периодической составляющей ( $u_1$ ) при  $\epsilon \rightarrow 0$  линейно зависят от  $\epsilon$  в течение продолжительного времени. Соответственно амплитуда колебаний солитонной составляющей (колебаний величины  $\max u_2(t)$ , максимум берется по пространственной координате  $x$ ) стремится к нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

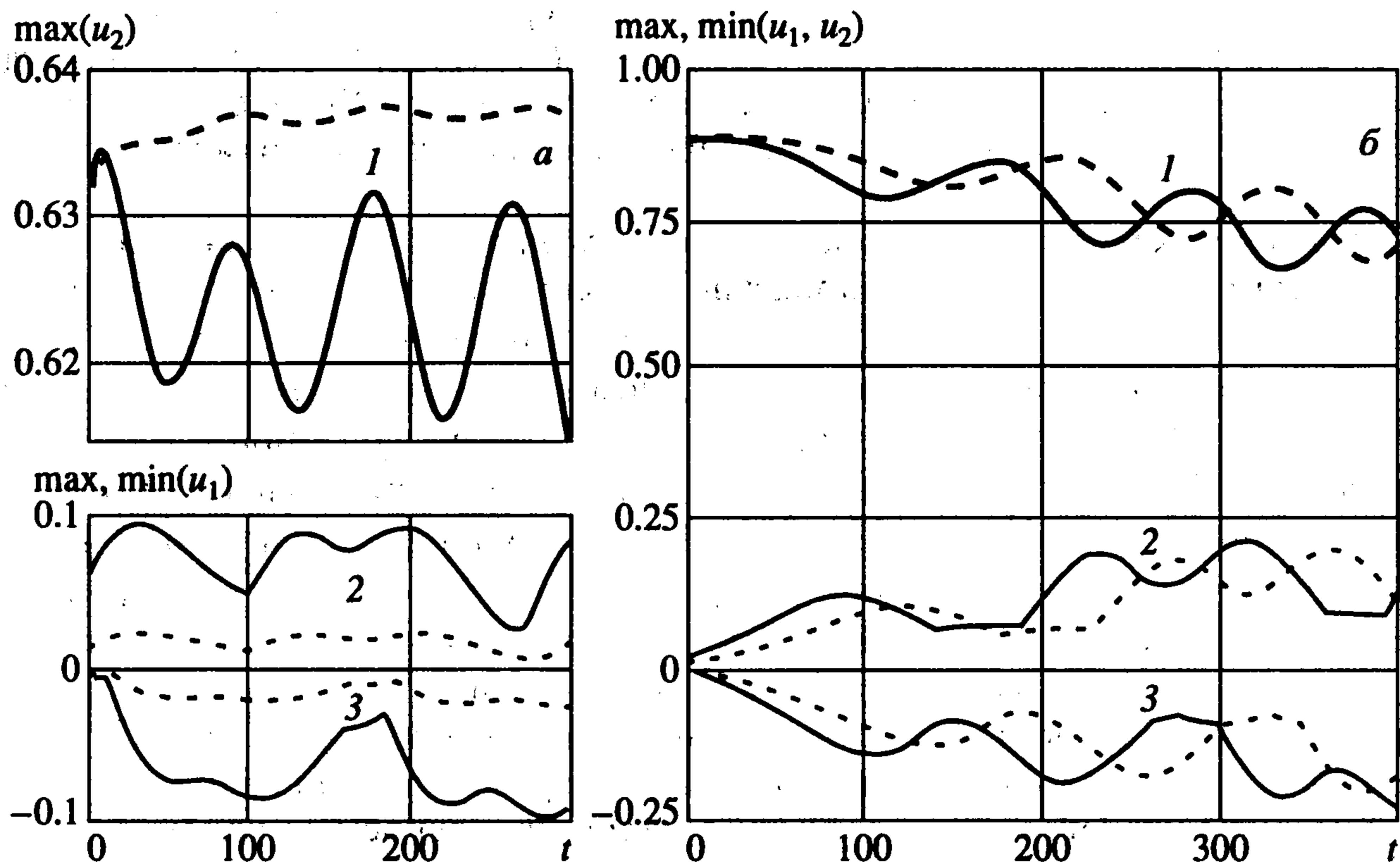
При рассмотрении больших интервалов времени средняя амплитуда солитонной составляющей медленно уменьшается из-за наличия излучения, а средняя амплитуда ортогональной периодической составляющей в области внутри УВ медленно нарастает, это происходит тем медленнее, чем меньше было начальное возмущение (слабая неустойчивость).

Для сравнения качественных свойств процесса при различных значениях скорости  $V$  и амплитуды УВ на фиг. 3 показана зависимость от времени максимальных и минимальных значений  $u_1$  и  $u_2$  для начальных данных типа быстрой УВ с ортогональным возмущением при достаточно большом значении  $V = 1$  (а) и при меньшем значении  $V = 0,9$  (б),  $V^2 > \mu_2/2$  в обоих случаях: 1 –  $\max(u_2)$  (амплитуда солитонной составляющей), 2 –  $\max(u_1)$ , 3 –  $\min(u_1)$  (величины, характеризующие колеблющуюся амплитуду периодической составляющей). На фиг. 3, а сплошной линией показаны графики при  $\epsilon = 0,1$ , штриховой – при  $\epsilon = 0,025$ , на фиг. 3, б сплошная и штриховая линии соответствуют  $\epsilon = 0,025$  и  $0,0125$ . Наличие изломов у кривых 2 и 3 связано с тем, что в решениях имеется более одного локального максимума или минимума, в то время как на графиках представлены абсолютные максимальные и минимальные значения, в разные моменты времени они соответствуют разным локальным экстремумам.

При меньшем значении  $V$  сколь угодно малое начальное возмущение в течение достаточно короткого периода времени приводит к появлению ортогональной периодической составляющей конечной амплитуды и снижению амплитуды УВ на конечную величину (сильная неустойчивость). При этом увеличивается длина волны УВ и ее скорость, а значит, резонансная длина волны периодической составляющей, наоборот, уменьшается. Затем, как и в случае большего значения  $V$ , развивается колебательный процесс, приводящий к постепенному дальнейшему снижению средней амплитуды УВ. Такое поведение всегда имеет место, если  $V < \mu_1^{1/2}$  (в отсутствие резонанса), но впервые проявляется оно и при больших значениях  $V$ , когда длина волны УВ становится примерно равной длине волны ортогональной компоненты.



Фиг. 2



Фиг. 3

Фактически в случае, показанном на фиг. 3, б, идут те же процессы, что описаны выше (рост амплитуды периодической составляющей и понижение амплитуды УВ; см. фиг. 3, а), но только настолько быстро, что зависимость от амплитуды начального возмущения вскоре теряется.

Проводился также контрольный расчет на проверку устойчивости медленной УВ при  $V^2 > \mu_1/2$  относительно воздействия ортогонального возмущения аналогичного

типа. Результаты расчета находятся в полном согласовании с теоретическими результатами [3, 4] об устойчивости УВ в этом случае.

**3. Обсуждение результатов.** Из результатов [3, 4] следует:

- в анизотропном материале УВ медленного семейства (1.5) устойчивы для скоростей  $V$  в интервале  $I_{st} = \{V \in I, \mu_1/2 < V^2\}$ ;
- при отсутствии анизотропии УВ семейства (1.6) устойчивы в интервале скоростей  $I_{st} = \{V \in I, \mu/2 < V^2\}$ .

В отличие от длинных УВ на поверхности тяжелой жидкости в гидромеханике, когда УВ устроены таким образом, что рост амплитуды происходит вместе с ростом скорости, в случае упругой среды имеем уменьшение амплитуды при возрастании скорости УВ. Это обуславливает различное поведение сохраняющейся в результате трансляционной инвариантности величины  $Q$  в указанной модели гидродинамики и теории упругости – в модели гидродинамики она является возрастающей функцией скорости, в моделях же теории упругости она или убывает (см., например, [12]), или имеет различное поведение на различных интервалах скорости (как в случае, рассматриваемом в настоящей работе). Монотонность функции  $Q(V)$  обеспечивает эквивалентность глобальной и локальной устойчивости солитонных семейств поверхностных волн в гидромеханике, в том смысле, что если устойчивы элементы семейства из малого интервала скоростей, то устойчиво и все семейство. В случае упругой среды, рассматриваемой в данной работе, дело обстоит иначе: устойчивость УВ на указанных интервалах скорости (диапазоне устойчивости) не означает устойчивости на дополнительных к ним интервалах. Более того, как показано в настоящей работе, УВ медленного семейства в анизотропном случае при  $V^2 < \mu_1/2$ , быстрого семейства при  $V^2 < \mu_2/2$  и УВ в отсутствии анизотропии при  $V^2 < \mu/2$  будут неустойчивы, причем неустойчивость имеет взрывной характер: УВ коллапсируют за конечное время, их амплитуда стремится к бесконечности, а носитель уменьшается. Взрывная неустойчивость связана со следующим обстоятельством. Линеаризованные вокруг солитонного решения уравнения (1.1) без старших производных меняют свой тип с гиперболического на эллиптический на некоторых интервалах оси  $x$ , начиная с некоторого значения скорости. Поясним изложенное выше на примере УВ медленного семейства в анизотропном случае, учитывая возмущения лишь для компоненты деформаций  $u_1$ . Рассмотрим уравнение (1.1) для  $u_1$ , линеаризованное вокруг УВ, опустив старшую производную четвертого порядка:

$$u_{1tt} = \left( \mu_1 - 3 \frac{\kappa}{\rho_0} u_1^{c2} \right) u_{1xx} - 3 \frac{\kappa}{\rho_0} (u_1^{c2})_{xx} u_1 - 6 \frac{\kappa}{\rho_0} (u_1^{c2})_x u_{1x} \quad (3.1)$$

Тип рассматриваемого уравнения (3.1) определяется знаком коэффициента при  $u_{1xx}$ . Из (3.1) и (1.5) имеем, что это уравнение гиперболично везде по  $x$  для  $V \in I_h$

$$I_h = \left\{ V \in I, V^2 > \frac{5}{6} \mu_1 \right\} \quad (3.2)$$

и эллиплично внутри некоторого интервала оси  $x$  вне  $I_h$ . Из (3.2) следует, что  $I_h \subset I_{st}$ . На "ранних стадиях эллиптичности", когда  $V$  еще принадлежит  $I_{st}$ , интервал оси  $x$ , где уравнение (3.1) эллиплично, достаточно мал, и неустойчивость, возникающая из-за некорректности задачи Коши для (3.1) подавляется дисперсионным членом с четвертой пространственной производной. Если  $V \in I$  покидает диапазон устойчивости  $I_{st}$ ,  $x$ -интервал эллиптичности (3.1) оказывается достаточно большим, чтобы влиять на эволюцию данных Коши, имеющих форму УВ. В результате имеем неограниченный рост амплитуды УВ.

Оператор  $\mathcal{H}$  для быстрого семейства УВ в анизотропном случае имеет дополнительное неустойчивое направление, отвечающее возмущениям нулевой компоненты  $u_1^c$  быстрого семейства УВ, эти возмущения для  $V^2 > \mu_2/2$  будут нарушать устойчи-

вость УВ быстрого семейства. Оценим процесс распадной неустойчивости, имеющей место в данном случае, с точки зрения теории волн. Пусть длина волны УВ много больше длины волны резонансного ортогонального возмущения. Можно предположить, что при исследовании в рамках геометрической оптики солитонная составляющая играет роль протяженного возмущения, уменьшающего фазовую скорость коротких ортогональных волн. В связи с чем, УВ играет роль волновода, захватывающего часть энергии начального возмущения, и имеется некоторая утечка энергии периодической волны в связи с тем, что волноводное решение является асимптотически приближенным, а не точным. Существует какой-то нелинейный механизм пополнения энергии периодической компоненты за счет передачи энергии от солитонной компоненты. Он и приводит к колебательному процессу, поддерживающему в течение длительного времени среднюю амплитуду периодической компоненты, близкой к постоянной величине. Очевидно, качественные эффекты переносимы и на случай конечного соотношения длин волн, при этом амплитуда излучаемой волны при уменьшении отношения длины волны УВ и длины волны резонансного излучения должна увеличиваться, что фактически и имеет место. Однако если длина волны периодической составляющей становится близка к характерной длине волны УВ, то можно предположить, что захват энергии станет невозможен, что и подтверждается расчетами.

Авторы благодарят А.Г. Куликовского за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01150).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Вариационные свойства осредненных уравнений периодических сред // Тр. МИАН. 1990. Т. 192. С. 5–19.
2. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 1. С. 7–10.
3. Ильичев А.Т. Устойчивость солитонов в нелинейных композитных средах // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 3. С. 720–729.
4. Il'ichev A. Stability of solitary waves in nonlinear composite media // Physica D. 2001. V. 150. № 3–4. P. 264–277.
5. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
6. Гвоздовская Н.И., Куликовский А.Г. Квазипоперечные ударные волны в упругих средах с внутренней структурой // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2. С. 174–180.
7. Сибгатуллин Н.Р. О нелинейных поперечных колебаниях при резонансе в упругом слое и слое идеально проводящей жидкости // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 79–87.
8. Grillakis M., Shatah J., Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I // J. Funct. Anal. 1987. V. 74. № 1. P. 160–197.
9. Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных скачков в обратимых системах // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 52–62.
10. Bakholdin I., Il'ichev A. Radiation and modulational instability described by the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Contemporary Mathematics. Providence: Amer. Math. Soc., 1996. V. 200. P. 1–15.
11. Бахолдин И.Б., Жарков А.А., Ильичев А.Т. Распад солитонов в изотермической бесстолкновительной квазинейтральной плазме с изотермическим давлением // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 1. С. 125–141.
12. Beliaev A., Il'ichev A. Conditional stability of solitary waves propagating in elastic rods // Physica D. 1996. V. 90. № 1–2. P. 107–118.

Москва  
e-mail: bakh@orc.ru, ilichev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию  
19.XII.2000