

УДК 531.36

© 2001 г. А.П. Блинов

ОБ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ ДВИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В развитие полученных ранее результатов [1, 2] способ перестройки функции Ляпунова со знакоотрицательной производной в функцию Ляпунова с определенно-отрицательной производной [1] применяется к натуральным механическим системам с диссипацией при отсутствии гироскопических сил. Дана оценка времени переходного процесса.

1. О перестройке функции Ляпунова для оценки времени переходного процесса. Для системы дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad x \in R^n, \quad f_i(x) \in C^1(G), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

с асимптотически устойчивым положением равновесия $x = 0 \in G \subset R^n$, для которой известна определенно-положительная в области G функция Ляпунова $V_0(x)$ с неположительной производной по времени в силу (1.1), обращающейся в нуль на многообразии $M \subset G$, была построена [1] новая функция

$$V(x) = V_0(x) + V_*(x)$$

где

$$V_*(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \Phi_k(x), \quad \Phi_k = - \int_0^{x_k} f_k^0(x_{m+1}, \dots, x_n) dx_k$$

$$f_k^0(x_{m+1}, \dots, x_n) = f_k(x_1^0(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_n)$$

$x_{m+1}, \dots, x_n$ – независимые переменные, через которые остальные переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ на M выражаются однозначным и дифференцируемым образом: $x_j = x_j^0(x_{m+1}, \dots, x_n)$; $x_j^0(0) = 0$ ($j = 1, \dots, m$), λ_k – некоторые неотрицательные числа.

Из рассмотрения производной от V_* по времени в силу системы (1.1)

$$\dot{V}_* = - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i f_i^0 + \sum_{k=m+1}^n f_k \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \sum_{i,k=m+1}^n \lambda_k f_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

были выделены [1] два случая выбора λ_i , в которых решается задача перестройки функции Ляпунова.

Остановимся на случае, когда

$$f_{m+1}(x) = f_{m+2}(x) = \dots f_n(x) = 0 \quad \text{на } M \quad (1.3)$$

Этот случай реализуется в механических системах с диссипацией энергии при отсутствии гироскопических сил. В самом деле, уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$$

где

$$L = T - U, \quad R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \mu_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad T = T_2 + T_0, \quad T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

(L – функция Лагранжа, R – функция Релея, μ_k – коэффициенты диссипации, T_0 , a_{ij} , U – функции обобщенных координат $q_1, \dots, q_n$), после введения переменных Гамильтона

$$p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k \quad (1.4)$$

преобразуются к виду

$$\dot{p}_k = \partial L / \partial q_k - \partial R / \partial \dot{q}_k \quad (1.5)$$

Учитывая, что

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H$$

где $H = T + U$ – функция Гамильтона, уравнениям (1.5) можно придать другую форму

$$\dot{p}_k = -\partial H / \partial q_k - \partial R / \partial \dot{q}_k \quad \text{или} \quad \dot{p}_k = \sum_{i,j} A_{ij}^k p_i p_j + \sum_i A_i^k p_i + A_k \quad (1.6)$$

где A_{ij}^k , A_i^k , A_k – функции обобщенных координат, причем A_i^k – линейные формы относительно μ_{kj} . Эти уравнения вместе с уравнениями

$$\dot{q}_k = \sum_i B_i^k p_i; \quad B_i^k = B_i^k(q) \quad (1.7)$$

полученными из выражений (1.4) образуют замкнутую систему уравнений.

Пусть состояние равновесия

$$q_1 = \dots = q_n = 0, \quad p_1 = \dots = p_n = 0$$

асимптотически устойчиво, G – область притяжения и $V_0 = T + U$ – функция Ляпунова. Тогда выражение (1.2) для $\dot{V}_*$ будет иметь вид рассматриваемого здесь случая, если представить, что x – вектор с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, и учесть, что многообразие M описывается системой уравнений $p_1 = \dots = p_n = 0$. При этом

$$f_{n+1}(x) = f_{n+2}(x) = \dots = f_{2n}(x) = 0 \quad \text{на } M$$

Чтобы величина $\dot{V}_*$ была отрицательной на $M \setminus \{0\}$, достаточно положить $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$ при любых положительных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Вернемся к более общему случаю (1.3) системы (1.1). Пусть G_{12} – замыкание части области G , заключенной между поверхностями $V_0 = c_1$ и $V_0 = c_2$, $c_1 > c_2 > 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$.

В силу непрерывности функций V_0 , $\dot{V}_0$, V_* , $\dot{V}_*$ в области G_{12} найдется достаточно малое число λ , при котором сумма $V_0 + V_*$ будет положительной в G_{12} . При этом может оказаться, что и сумма $[-(\dot{V}_0 + \dot{V}_*)]$ будет также положительной в G_{12} . Определив $\min(-\dot{V}_0 - \dot{V}_*) = \nu$ в G_{12} , можно дать (см., например, [3]) оценку сверху времени движения системы в G_{12} , т.е. дать оценку времени переходного процесса. Если же сумма $[-(\dot{V}_0 + \dot{V}_*)]$ при выбранном λ будет положительной не во всей области G_{12} , то должна существовать некоторая окрестность многообразия M , в которой эта сумма положительна. Тогда при дальнейшем уменьшении λ эта окрестность будет расширяться и при некотором значении $\lambda = \lambda_*$ накроет всю область G_{12} , т.е. оценка времени переходного процесса всегда возможна.

Варьируя величины $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и разбивая область G_{12} на подобласти заданием чисел $c_3, c_4, \dots, c_k$ ($c_2 < c_3 < c_4 < \dots < c_k < c_1$), оценку времени переходного процесса можно улучшить.

Наряду с указанной может быть полезной огрубленная оценка, основанная на неравенстве (всюду далее операции $\min$ и $\max$ проводятся по области G_{12} ; суммирование ведется от $k = 1$ до $k = m$)

$$\min(V_0 + V_*) = \min(V_0 - \lambda \sum \Phi_k) \geq c_2 - \lambda \max|\sum \Phi_k| > 0$$

и на замене проверки положительности $(-\dot{V}_0 - \dot{V}_*)$ в области G_{12} при выбранном значении

$$\lambda = \lambda_*, \quad \lambda_* = c_2 / \max|\sum \Phi_k|$$

проверкой положительности $(-\dot{V}_*)$ в ε -окрестности множества M (точнее в множестве $M_\varepsilon = \{x \in G_{12} | d(x, M) \leq \varepsilon\}$, где ε – малое положительное число, $d(x, M)$ – расстояние между точками $x \in G_{12}$ и многообразием M) и проверкой положительности $(-\dot{V}_0 - \dot{V}_* - \alpha)$ в $G_{12} \setminus M_\varepsilon$, где $\alpha = \min(-\dot{V}_*)$ на M_ε .

Для достаточно малого фиксированного значения ε при $\lambda \rightarrow 0$ следует $\alpha \rightarrow 0$ и возрастание $\min(-\dot{V}_0 - \dot{V}_* - \alpha)$ в $G_{12} \setminus M_\varepsilon$ к значению $\beta > 0$, $\beta = \min(-\dot{V}_0)$. Поэтому найдется $\lambda = \lambda_{*0} \leq \lambda_*$, при котором $\alpha = \alpha_0 > 0$ и величина $\min(-\dot{V}_0 - \dot{V}_* - \alpha_0)$ станет неотрицательной. Величину же α_0 можно принять за нижнюю границу значений $(-\dot{V}_0 - \dot{V}_*)$ в области G_{12} и использовать для оценки времени переходного процесса.

2. Пример: движение системы двух последовательно связанных маятников в сопротивляющейся среде. В предположении, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения каждого маятника, были получены [4] выражения для сил сопротивления среды движению двух последовательно связанных маятников

$$R_1 = \mu[(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_2]$$

$$R_2 = \mu[m_2l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1]$$

где μ – положительная постоянная, m_k , l_k , φ_k – масса, длина и угол отклонения маятников от вертикали ($k = 1, 2$).

Уравнения движения системы, ее кинетическая и потенциальная энергия имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\mu y_1 - \omega k_1 + \psi_1, \quad \dot{\varphi}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 &= -\mu y_2 - A\omega k_2 + \psi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = y_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

$$U = (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos \varphi_1) + m_2gl_2(1 - \cos \varphi_2)$$

где

$$\omega = \frac{1}{B[A - b \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)]}, \quad A = \frac{(m_1 + m_2)l_1}{m_2l_2}, \quad B = m_2l_2, \quad b = \frac{l_1}{l_2}$$

$$k_1 = (m_1 + m_2)g \sin \varphi_1, \quad k_2 = m_2g \sin \varphi_2$$

$$\psi_1 = \omega \cos(\varphi_2 - \varphi_1)k_2 + B\omega \sin(\varphi_2 - \varphi_1)[b \cos(\varphi_2 - \varphi_1)y_1^2 + y_2^2]$$

$$\psi_2 = b\omega \cos(\varphi_2 - \varphi_1)k_1 - Bb \sin(\varphi_2 - \varphi_1)[Ay_1^2 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)y_2^2]$$

g – ускорение силы тяжести.

Возьмем в качестве функции Ляпунова функцию [4]

$$V_0 = ABby_1^2 + By_2^2 + 2Bby_1y_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2b \int_0^{\varphi_1} k_1(x)dx + 2b \int_0^{\varphi_2} k_2(x)dx \quad (2.2)$$

Ее производная по времени в силу системы (2.1)

$$\dot{V}_0 = -2\mu B\{b[A - b \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)]y_1^2 + [by_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + y_2]^2\} < 0$$

для $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$. Таким образом, многообразие M представляется системой уравнений

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0$$

и

$$f_1^0 = \omega[-k_1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)k_2], \quad f_2^0 = \omega[-Ak_2 + b \cos(\varphi_2 - \varphi_1)k_1]$$

$$f_3^0 \equiv 0, \quad f_4^0 \equiv 0, \quad \Phi_1 = -f_1^0 y_1, \quad \Phi_2 = -f_2^0 y_2$$

$$\dot{V}_* = -\lambda(f_1f_1^0 + f_2f_2^0 + f_3f_1^0 + f_4f_2^0)$$

Согласно (1.8)

$$\lambda_* = c_2 / \max |f_1^0 y_1 + f_2^0 y_2|$$

где

$$|f_1^0 y_1 + f_2^0 y_2| < \frac{g}{l_1 m_1} [(m_1 + m_2)(1 + b) + m_2(1 + A)] \max(|y_1|, |y_2|)$$

$$\max(|y_1|, |y_2|) \leq l$$

l – большая полуось эллипса $Aby_1^2 - y_2^2 - 2by_1y_2 = c_1$.

Проверим положительность $(-\dot{V}_*)$ в M_ϵ , считая ϵ достаточно малым числом. Из выражения для $\dot{V}_*$ видно, что знак $\dot{V}_*$ в M_ϵ может зависеть только от выбора ϵ . При $\epsilon \rightarrow 0$ имеем $y_1 \rightarrow 0$, $y_2 \rightarrow 0$. При достаточно малом значении $\epsilon = \epsilon_*$ будет $(-\dot{V}_*) \geq \alpha > 0$ в M_ϵ , и можно определить α_0 .

3. Движение частицы в центральном поле сил при учете сопротивления среды. Рассмотрим частицу единичной массы, движущуюся в среде с трением, зависящим от скорости v в плоскости Oxy с центром притяжения в точке O . Пусть $T = v^2/2$ – кинетическая энергия, $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Уравнения движения частицы имеют вид (штрих означает производную по t)

$$\dot{p}_1 = -\frac{x}{r}U' - \frac{p_1}{p}Q, \quad \dot{p}_2 = -\frac{y}{r}U' - \frac{p_2}{p}Q, \quad \dot{x} = p_1, \quad \dot{y} = p_2 \quad (3.1)$$

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Здесь $Q = Q(p)$ – сила трения, $U = U(r) > 0$ – потенциальная энергия, $U' > 0$ при $r > 0$.

Начало координат фазового пространства является глобальным аттрактором [3]. Положим $V_0 = T(v) + U(r)$. В соответствии со сказанным в разд. 1 вычислим

$$\dot{V}_0 = -Q(p)p \quad (\dot{V}_0 \leq 0)$$

$$f_1^0 = -\frac{x}{r}U', \quad f_2^0 = -\frac{y}{r}U', \quad f_3^0 = 0, \quad f_4^0 = 0$$

$$\Phi_1 = \frac{x}{r}U'p_1, \quad \Phi_2 = \frac{y}{r}U'p_2$$

$$V_* = \frac{\lambda}{r}U'(xp_1 + yp_2)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_* = & -\lambda(U')^2 + \lambda \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{y_2}{r}U' + x^2U'' \right) p_1^2 + 2p_1p_2 \frac{xy}{r^2} \left(U'' - \frac{1}{r}U' \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{x^2}{r}U' + y^2U'' \right) p_2^2 - \frac{Q}{pr} (xp_1 + yp_2)U' \right] \end{aligned}$$

В частности, при

$$U(r) = gr^k, \quad k \geq 2, \quad g > 0; \quad Q = \mu p, \quad \mu > 0$$

получим

$$V = V_0 + V_* = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + gr^k + \lambda kgr^{k-2}(xp_1 + yp_2)$$

$$\dot{V} = -\mu(p_1^2 + p_2^2) - \lambda k^2(k-1)^2 r^{2k-4} +$$

$$+ \lambda gkr^{k-4}[(y^2 + x^2(k-1))p_1^2 + 2(k-2)xy p_1 p_2 +$$

$$+ (x^2 + y^2(k-1))p_2^2 - \mu r^2(xp_1 + yp_2)]$$

$$\lambda_* = c_2 / \max |gkr^{k-2}(xp_1 + yp_2)|$$

Учитывая, что

$$gr^k \leq c_1; \quad |xp_1 + yp_2| \leq r \max |p_1 + p_2|$$

$$p_1^2 + p_2^2 \leq 2c_1; \quad |p_1 + p_2| \leq \sqrt{2(p_1^2 + p_2^2)} \leq 2\sqrt{c_1}$$

получим

$$\lambda_* \geq c_2 / (2g^{1/k} kc_1^{-1/k+3/2}) \quad (3.2)$$

Определим множество M_ε , т.е. найдем ε , при котором

$$-\lambda_*^{-1} \dot{V}_* \geq 0, \quad \text{если } |p_1| < \varepsilon, \quad |p_2| < \varepsilon$$

Так как

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + gr^k \geq c_2$$

то

$$r \geq ((c_2 - \varepsilon^2)/g)^{1/k}, \quad (\varepsilon^2 < c_2)$$

и

$$-\lambda_*^{-1} \dot{V}_* \geq k^2(k-1)^2 g^{4/k-2} (c_2 - \varepsilon^2)^{2-4/k} -$$

$$-2kg^{2/k} c_1^{1-2/k} \left(k-1 + (k-2) \frac{c_1}{g} \right) \varepsilon^2 - \sqrt{2} \mu g^{1/k} kc_1^{1-1/k} \varepsilon \geq 0 \quad (3.3)$$

Пусть ε_1 – ближайшее к нулю положительное решение уравнения, соответствующее последнему неравенству. Тогда

$$-\dot{V}_* \geq \lambda_* \alpha(\varepsilon) > 0$$

где $\alpha(\varepsilon)$ означает левую часть неравенства (3.3) при $\varepsilon = \Theta_1 \varepsilon_1$, $0 < \Theta_1 < 1$, а λ_* – правую часть неравенства (3.2).

Перейдем к оценке λ , при котором $\dot{V}_0 + \dot{V}_* < 0$ в области $G_{12} \setminus M_\varepsilon$. В указанной области ($\varepsilon < |p_1| < \sqrt{c_1}$; $\varepsilon < |p_2| < \sqrt{c_1}$)

$$\dot{V}_* = 2\lambda kg^{1/k} c_1^{2-2/k} [2(k-1)g^{1/k} + \mu c_1^{-1/2+1/k}]$$

$$\dot{V}_0 < -\mu(p_1^2 + p_2^2) \leq -2\mu\varepsilon^2$$

Чтобы сумма левых частей последних неравенств была отрицательной, достаточно выполнение неравенства

$$\lambda \leq \lambda_{**} = \mu\varepsilon^2 / \{kg^{1/k} c_1^{2-2k} [2(k-1)g^{1/k} + \mu c_1^{1/k-1/2}]\}$$

Полагая

$$\lambda_1 = \Theta_2 \lambda_{**} \leq \lambda_*, \quad 0 < \Theta_2 < 1$$

получим

$$\dot{V} \leq -\min(2\mu\varepsilon^2(1-\Theta_2), \lambda_1 \alpha)$$

Замечание. Если для данной динамической системы известны две функции Ляпунова, различающиеся тем, что их производные обращаются в нуль на различных многообразиях, то, комбинируя эти функции, можно получить новую – с определенно-отрицательной производной. Например, для уравнения

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0, \quad \varphi(x) > 0, \quad xf(x) > 0, \quad x \neq 0$$

замена Льенара [4]

$$y = \dot{x} + \Phi(x), \quad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(x) dx$$

приводит к системе

$$\dot{x} = y - \Phi(x); \quad \dot{y} = -f(x)$$

с функцией Ляпунова и ее производной

$$V_1 = y^2 + 2F(x), \quad F(x) = \int_0^x f(x)dx$$

$$\dot{V}_1 = -2f(x)\Phi(x)$$

которая обращается в нуль при $x = 0$. Но можно рассмотреть и эквивалентную систему

$$\dot{x} = z, \quad \dot{z} = -\varphi(x)z - f(x)$$

с функцией Ляпунова

$$V_2 = z^2 + 2F(x)$$

и ее производной

$$\dot{V}_2 = -2\varphi(x)z^2$$

После приведения к переменным $x, y(z = y - \Phi(x))$ получим

$$V = V_1 + V_2 = y^2 + 4F(x) + (y - \Phi(x))^2$$

$$\dot{V} = -2f(x)\Phi(x) - 2\varphi(x)(y - \Phi(x))^2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов А.П. К вопросу о построении функции Ляпунова // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 724–729.
2. Блинов А.П. Об оценке времени движения некоторых динамических систем // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 888–892.
3. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. N. Y., etc.: Springer, 1977. = Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.2000