

УДК 539.375:534.1

© 2001 г. И.В. Андронов

**ДИФРАКЦИЯ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ НА КОРОТКОМ СПАЕ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН**

Рассматривается задача об изгибных колебаниях двух полубесконечных упругих пластин, соединенных вдоль короткого по сравнению с длиной падающей волны отрезка границы (спая). Задача сведена к решению интегральных уравнений на отрезке. Использование формулы Грина приводит к интегральному уравнению с гладким ядром, решение которого – функция с особенностями порядка $-\frac{3}{2}$ у концов отрезка. Произведена регуляризация этого интегрального уравнения. Найдена асимптотика дальнего поля по безразмерной длине спая.

Приближенные модели для описания колебаний тонкой упругой пластины обычно выводятся для тонкого бесконечно протяженного слоя, а затем распространяются на пластины конечных размеров. Вообще говоря, это приводит к неверному описанию краевых эффектов. Так, в окрестности концов тонких трещин, включений и подкреплений модель Кирхгофа дает бесконечные значения напряжений и перерезывающих сил [1, 2]. Тем не менее считается, что неверное описание физических процессов вблизи трещины или подкрепления не оказывает существенного влияния на дальнее поле смещений. Более того, множитель при сингулярности напряжения в окрестности конца трещины или тонкого подкрепления, получивший название коэффициента интенсивности напряжений [1], позволяет судить о возможном разрушении пластины, росте трещины. Все сказанное выше позволяет в первом приближении изучать дифракцию на сочленении двух полубесконечных пластин в рамках модели Кирхгофа. Рассматриваемая в данной работе краевая задача является "дополнительной" к изученной ранее задаче о дифракции на короткой по сравнению с длиной волны трещине [3].

Практически все явно решаемые задачи дифракции и распространения волн в пластинах (см., например, [4, 5]) к настоящему времени уже рассмотрены. Исследуемая здесь краевая задача может быть в старшем порядке сформулирована как явно решаемая. Действительно, для решения дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего изгибные колебания пластины в рамках теории Кирхгофа, определены (согласно теоремам вложения [6]) значения функции в отдельной точке. Таким образом, короткий спай в первом приближении может считаться точечным, что позволяет построить решение задачи в квадратурах.

Построение поправок к такому решению требует рассмотрения протяженного спая. При помощи метода функции Грина задача может быть сведена к интегральным уравнениям на отрезке, в которых неизвестными являются перерезывающая сила и изгибающий момент на спаяе. Как известно [2], в окрестности края трещины перерезывающая сила имеет неинтегрируемую особенность, т.е. решение интегрального уравнения лежит в классе неинтегрируемых функций. Была разработана [1] техника аналитического и численного анализа интегральных уравнений такого вида. Несколько иной подход¹ используется в данной работе.

Применение метода перевала к интегральному представлению решения приводит к формулам для диаграммы расходящейся от спая изгибной волны, а вычеты в полюсах подынтегрального выражения дают краевые волны [7], распространяющиеся вдоль кромок пластин.

¹ Андронов И.В. Рассеяние изгибных волн на тонких неоднородностях в упругой пластине. М., 1990. 19 с. – Деп. в ВИНТИ, № 66-В90.

При построении асимптотики диаграммы направленности и амплитуд кромочных волн приходится проводить громоздкие преобразования. В связи с этим необходим независимый контроль окончательных асимптотических формул, для чего ниже используются принцип взаимности и оптическая теорема [8]. Приведены значения диаграммы, рассчитанные по асимптотической формуле. Отмечено, что поправки существенны уже при длине спая порядка 10^{-5} длин волн.

1. Постановка задачи дифракции. Рассматривается система из двух полубесконечных пластин $\Pi_{\pm} = \{-\infty < x < +\infty, \pm y > 0\}$ со свободными кромками $\{y = \pm 0\}$, сочлененных вдоль отрезка $\Lambda = \{|x| \leq a, y = 0\}$. Колебания возбуждаются плоской изгибной волной

$$\xi^i = \exp(ik_0(x \cos \vartheta_0 - y \sin \vartheta_0))$$

в одной из пластин. Полное поле в системе состоит из падающей волны ξ^i , волны ξ^r , отраженной от свободного края пластины, и дифракционного поля ξ^s . Полное поле является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} (\Delta^2 - k_0^4)\xi &= 0, \quad y \neq 0 \\ F\xi &= 0, \quad M\xi = 0, \quad |x| > a, y = 0 \\ [\xi] &= 0, \quad [\xi_y] = 0, \quad [F\xi] = 0, \quad [M\xi] = 0, \quad |x| < a \\ F\xi &\equiv \xi_{yyy} + (2 - \sigma)\xi_{xxy}, \quad M\xi \equiv \xi_{yy} + \sigma\xi_{xx} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь k_0 – волновое число изгибных волн, и введены операторы перерезывающей силы F и изгибающего момента M на линии $y = \text{const}$, σ – коэффициент Пуассона, $[f]$ – скачок функции f на линии $y = 0$.

Рассеянное поле удовлетворяет принципу излучения, который может быть конкретизирован в виде предписанной асимптотики дальнего поля. Рассеянное поле ξ^s образует на больших расстояниях от спая Λ расходящуюся волну с асимптотикой

$$\xi^s \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} \exp\left(ik_0 r - i\frac{\pi}{4}\right) \Psi(\vartheta), \quad r \rightarrow +\infty, \quad 0 < \varepsilon \leq |\vartheta| \leq \pi - \varepsilon \quad (1.2)$$

и четыре кромочные волны [7, 8], подчиняющиеся асимптотикам

$$\begin{aligned} \xi_{x \rightarrow \pm\infty}^s &\sim (A_{\pm}^e + \text{sign}(y)A_{\pm}^o) \exp(\pm i\kappa x) \left\{ \exp(-\sqrt{\kappa^2 - k_0^2} |y|) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - \sigma)\kappa^2 - k_0^2}{(1 - \sigma)\kappa^2 + k_0^2} \exp(-\sqrt{\kappa^2 + k_0^2} |y|) \right\}, \quad |y| \leq y^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь кромочные волны представлены в виде суммы симметричных волн с амплитудами $A_{\pm}^e$ и антисимметричных волн с амплитудами $A_{\pm}^o$. Волновое число κ кромочных волн определяется формулой [7, 8]

$$\kappa = k_0((1 - \sigma)(3\sigma - 1 + 2\sqrt{1 - 2\sigma + 2\sigma^2}))^{-1/4}$$

Диаграмма $\Psi(\vartheta)$ и амплитуды кромочных волн $A_{\pm}$ в асимптотиках предполагаются конечными. Отметим, что диаграмма $\Psi(\vartheta)$ оказывается мероморфной функцией на комплексной плоскости ϑ .

Ниже величину $k_0 a$ будем полагать малой.

2. Геометрическая часть поля. Рассмотрим задачу для несочлененных пластин. Тогда условия (1.1) выполнены на всей оси и пластины совершают колебания независимо. Поле ξ^r состоит из отраженной плоской волны и неоднородной волны

$$\xi^r = R(\vartheta_0) \exp(ik_0(x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0)) + T(\vartheta_0) \exp(ik_0 x \cos \vartheta_0 - y \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta_0})$$

Коэффициенты отражения $R(\vartheta_0)$ и трансформации $T(\vartheta_0)$ определяются из граничных условий (1.1). Решая систему из двух уравнений, находим

$$R(\vartheta_0) = -\frac{\overline{L(\vartheta_0)}}{L(\vartheta_0)}, \quad T(\vartheta_0) = -\frac{2i \sin \vartheta_0 A_+(\vartheta_0) A_-(\vartheta_0)}{L(\vartheta_0)}$$

$$L(\vartheta_0) = i \sin \vartheta_0 A_+^2(\vartheta_0) + \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta_0} A_-^2(\vartheta_0), \quad A_{\pm}(\vartheta_0) = (1 \pm \sigma) \cos^2 \vartheta_0 \pm 1$$

Определим геометрическую часть поля следующим образом:

$$\xi^g = \begin{cases} \xi^i + \xi^r, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

и вычислим скачки ξ^g на отрезке Λ . Очевидно, что разрывы имеют только смещения и углы наклона, а моменты и силы непрерывны вследствие условий (1.1), выполненных для $\xi^i + \xi^r$, в том числе и на Λ . Имеем

$$[\xi^g] = -\frac{4i \sin \vartheta_0}{L(\vartheta_0)} A_+(\vartheta_0) \exp(ik_0 x \cos \vartheta_0)$$

$$[\xi_y^g] = -\frac{4ik_0 \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta_0} \sin \vartheta_0}{L(\vartheta_0)} A_-(\vartheta_0) \exp(ik_0 x \cos \vartheta_0)$$

3. Переход к интегральным уравнениям. Скачки геометрической части поля компенсируются поправкой ξ^s – рассеянным полем. Рассмотрим формулу Грина [9] для рассеянного поля ξ^s и функции Грина $G(x, y, x_0, y_0)$ для полубесконечной пластины Π_+ со свободным краем. Такая функция Грина может быть построена методом разделения переменных, она исследована ранее [10]. Асимптотики (1.2) и (1.3) приводят к исчезновению интегралов по дуге большого радиуса, и для поля ξ^s в пластине Π_+ получается интегральное представление

$$\xi^s(x_0, y_0) = \int_{-a}^a (G(x, 0, x_0, y_0) F \xi^s(x, 0) - G_y(x, 0, x_0, y_0) M \xi^s(x, 0)) dx, \quad y_0 > 0$$

Аналогично получается представление для поля в пластине Π_- . Запишем обе формулы вместе

$$\xi^s(x_0, y_0) = \text{sign}(y_0) \int_{-a}^a G(x, 0, x_0, |y_0|) p(x) dx + \int_{-a}^a G_y(x, 0, x_0, |y_0|) q(x) dx \quad (3.1)$$

Функции $p(x)$ и $q(x)$ имеют смысл (с точностью до множителя) силы и момента полного поля на спале Λ .

Представление (3.1) получено формально. Вблизи концов тонких неоднородностей поле имеет особенности и перерезывающая сила может быть неинтегрируема [1]. Было исследовано [2] поле смещений в окрестности конца полубесконечной трещины и показано, что перерезывающая сила имеет особенность порядка $-3/2$. Таким образом, функция $p(x)$ в интегральном представлении (3.1) имеет особенности вида $(x \pm a)^{-3/2}$, а ядро интегрального уравнения для $p(x)$ – гладкая функция. Были разработаны [1] методы регуляризации интегральных представлений и интегральных уравнений такого рода, а также схемы их численного решения.

Рассмотрим подробнее причины возникновения неинтегрируемого веса $p(x)$ в интегральном представлении (3.1). Будем искать нечетную по y часть поля методом преобразования Фурье. Вследствие условий излучения имеем

$$\xi^o(x_0, y_0) = \text{sign}(y_0) \int e^{i\lambda x_0} (\alpha^-(\lambda) e^{-b_-(\lambda)|y_0|} + \alpha^+(\lambda) e^{-b_+(\lambda)|y_0|}) \frac{d\lambda}{l(\lambda)} \quad (3.2)$$

$$l(\lambda) = a_+^2(\lambda)b_-(\lambda) - a_-^2(\lambda)b_+(\lambda), \quad a_{\pm}(\lambda) = (1 - \sigma)\lambda^2 \pm k_0^2, \quad b_{\pm} = \sqrt{\lambda^2 \pm k_0^2}$$

Множитель $1/l(\lambda)$ введен для удобства.

Граничные условия (1.1) накладывают определенные ограничения на функции $\alpha^{\pm}(\lambda)$. Ввиду нечетности поля ξ^o и его непрерывности на Λ условие равенства нулю момента $M\xi^o$ выполняется на всей оси и может быть легко обращено. В результате функции $\alpha^{\pm}(\lambda)$ могут быть выражены через одну неизвестную функцию $\alpha(\lambda)$

$$\alpha^-(\lambda) = a_+(\lambda)\alpha(\lambda), \quad \alpha^+(\lambda) = -a_-(\lambda)\alpha(\lambda)$$

Из краевого условия для силы вытекает уравнение

$$\int e^{i\lambda x} \alpha(\lambda) d\lambda = 0, \quad |x| > a \quad (3.3)$$

Непрерывность поля ξ на Λ дает парное уравнение

$$2k_0^2 \int e^{i\lambda x} \frac{\alpha(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda = -\frac{1}{2}[\xi^g](x), \quad |x| < a \quad (3.4)$$

Парные уравнения (3.3), (3.4) однозначно определяют функцию $\alpha(\lambda)$ в классе функций с не более чем линейным ростом на бесконечности, т.е. $\alpha(\lambda) = O(\lambda)$.

Если формально обратить уравнение (3.3), для функции $\alpha(\lambda)$ возникает представление

$$\alpha(\lambda) = \int_{-a}^a e^{-i\lambda x} p(x) dx$$

Функция $p(x)$ – та же, что и в интегральном представлении (3.1). Поскольку функция $\alpha(\lambda)$ растет на бесконечности, ее преобразование Фурье $p(x)$ содержит неинтегрируемые особенности. Поменяв в представлении (3.2) порядок интегрирования и вычислив интеграл по λ , формально получим представление (3.1).

Для устранения неинтегрируемых особенностей $p(x)$ представим функцию $\alpha(\lambda)$ в виде

$$\alpha(\lambda) = \lambda^2 \hat{\alpha}(\lambda) + \alpha_0 \rho_0(\lambda) + \alpha_1 \rho_1(\lambda) \quad (3.5)$$

Функция $\hat{\alpha}(\lambda)$ убывает на бесконечности не медленнее, чем $O(\lambda^{-1})$, а оставшиеся два слагаемых компенсируют двукратный нуль при $\lambda = 0$ первого слагаемого. В качестве функций $\rho_0(\lambda)$ и $\rho_1(\lambda)$ могут быть выбраны любые функции, которые не противоречат асимптотике $\alpha(\lambda)$ на бесконечности, и такие, что векторы $(\rho_0(0), \rho'_0(0))$ и $(\rho_1(0), \rho'_1(0))$ линейно независимы. Кроме того, потребуем, чтобы носители преобразований Фурье функций $\rho_0(\lambda)$ и $\rho_1(\lambda)$ принадлежали интервалу $|x| < a$.

При учете представления (3.5) и перечисленных выше свойств функции $\rho_0(\lambda)$ и $\rho_1(\lambda)$ уравнение (3.3) обращается и дает

$$\alpha(\lambda) = \lambda^2 \int_{-a}^a e^{-i\lambda x} \hat{p}(x) dx + \alpha_0 \rho_0(\lambda) + \alpha_1 \rho_1(\lambda) \quad (3.6)$$

Теперь вследствие асимптотики $\hat{\alpha}(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ функция $\hat{p}(x)$ обращается на концах интервала интегрирования в нуль, т.е. для нее справедливо представление

$$\hat{p}(x) = \sqrt{a^2 - x^2} P(x) \quad (3.7)$$

где $P(x)$ – ограниченная функция.

Подставляя выражение (3.6) в уравнение (3.4) и меняя порядок интегрирования, получим интегроалгебраическое уравнение для определения функции $\hat{p}(x)$ и постоянных α_0 и α_1

$$\int_{-a}^a \hat{p}(x) G_{xx}(x, 0, x_0, 0) dx - k_0^2 \int e^{i\lambda x_0} \frac{\alpha_0 \rho_0(\lambda) + \alpha_1 \rho_1(\lambda)}{l(\lambda)} \lambda^2 d\lambda = \frac{1}{4} [\xi^s](x_0) \quad (3.8)$$

где

$$G_{xx}(x, 0, x_0, 0) = k_0^2 \int e^{i\lambda(x-x_0)} \frac{(i\lambda)^2}{l(\lambda)} d\lambda$$

Для четной части рассеянного поля ξ^e можно сохранить представление (3.1), поскольку неизвестная $q(x)$ интегрируема. Учитывая выражение для функции Грина, заключаем, что это представление принимает вид

$$\xi^e(x_0, y_0) = \int (a_-(\lambda) b_+(\lambda) e^{-b_-(\lambda)|y_0|} - a_+(\lambda) b_-(\lambda) e^{-b_+(\lambda)|y_0|}) \int_{-a}^a e^{i\lambda(x-x_0)} q(x) dx \frac{d\lambda}{l(\lambda)} \quad (3.9)$$

Подставляя выражение (3.9) в краевое условие $[\xi_y] = 0$, получим интегральное уравнение относительно $q(x)$

$$\int_{-a}^a q(x) G_{yy_0}(x, 0, x_0, 0) dx = \frac{1}{4} [\xi_y^g](x_0) \quad (3.10)$$

$$G_{yy_0}(x, 0, x_0, 0) = k_0^2 \int e^{i\lambda(x-x_0)} \frac{\sqrt{\lambda^4 - k_0^4}}{l(\lambda)} d\lambda$$

4. Исследование ядер интегральных уравнений. Разрешимость уравнений определяется особенностями ядер. Для определения асимптотики функций $G(x, 0, x_0, 0)$, $G_{xx}(x, 0, x_0, 0)$ и $G_{yy_0}(x, 0, x_0, 0)$ при $|x - x_0| \rightarrow 0$ исследуем поведение подынтегральных выражений при больших λ . Можно убедиться в справедливости асимптотики

$$l(\lambda) = k_0^2 \chi |\lambda|^3 + \dots, \quad \chi = (1 - \sigma)(3 + \sigma)$$

Таким образом, функция Грина $G(x, 0, x_0, 0)$ конечна при $x = x_0$, а ее вторые производные $G_{xx}(x, 0, x_0, 0)$ и $G_{yy_0}(x, 0, x_0, 0)$ имеют логарифмические особенности.

Для доказательства теорем существования и единственности решений интегральных уравнений с логарифмическим ядром необходимо вычислить индекс интегрального оператора [11]. Исследуя преобразования Фурье ядер G_{xx} и G_{yy_0} , устанавливаем их секториальность: если избавиться от иррациональностей в знаменателе, то можно заметить, что мнимая часть преобразований Фурье не меняет знака, а следовательно, ядра обладают свойством секториальности и индекс равен нулю.

Используя теоремы существования и единственности решений [12], заключаем, что интегральное уравнение (3.10) имеет единственное решение, представимое в виде

$$q(x) = \frac{Q(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad Q(x) \in C \quad (4.1)$$

Интегральное уравнение (3.8) при любых заданных α_0 и α_1 разрешимо единственным образом в классе (4.1). Однако решение $\hat{p}(x)$ должно обращаться в нуль на концах интервала интегрирования, что достигается выбором постоянных α_0 и α_1 .

Продолжим исследование ядер интегральных уравнений. Для получения асимптотики диаграммы направленности рассеянного поля в двух старших порядках по асимптотически малому параметру $k_0 a$ нужно знать асимптотику ядер вплоть до квадратичных по $x - x_0$ членов.

Вследствие четности функции $G(x, 0, x_0, 0)$ по $x - x_0$ имеем

$$G(x, 0, x_0, 0) = k_0^{-2} I + \hat{G}(x - x_0)$$

$$\hat{G}''(x - x_0) = G_{xx}(x, 0, x_0, 0) = - \int \frac{e^{ik_0 \tau |x - x_0|} \tau^2}{\mathcal{L}(\tau)} d\tau, \quad \hat{G}(0) = \hat{G}'(0) = 0 \quad (4.2)$$

Здесь

$$I = \int \frac{d\tau}{\mathcal{L}(\tau)}, \quad \mathcal{L}(\tau) = k_0^{-5} l(k_0 \tau) = A_+^2(\tau) \sqrt{\tau^2 - 1} - \mathcal{A}_-^2(\tau) \sqrt{\tau^2 + 1}$$

$$\mathcal{A}_{\pm}(\tau) = k_0^{-2} a_{\pm}(k_0 \tau) = (1 - \sigma) \tau^2 \pm 1$$

Для вычисления асимптотики при $s \rightarrow 0$ интеграла в выражении (4.2) воспользуемся интегральным представлением функции Макдональда

$$2K_0(s) = \int \frac{e^{i\tau s} d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 1}}, \quad 2K_0(is) = \int \frac{e^{i\tau s} d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}}$$

и введем обозначения

$$J_{km} = \int \frac{H_m(\tau) \tau^k}{\mathcal{L}(\tau)} d\tau, \quad k = 0, 2; \quad m = 0, 1$$

$$H_m(\tau) = (1 - \sigma^{2-m}) \tau^2 \left(\frac{\tau^2}{\sqrt{\tau^4 - 1}} - 1 \right) - \frac{1 - m\sigma(1 + \sigma/2)}{\sqrt{\lambda^4 - 1}}, \quad m = 0, 1$$

Находим

$$G_{xx}(x, 0, x_0, 0) = -\frac{1}{\chi} (K_0(k_0 |x - x_0|) + K_0(ik_0 |x - x_0|)) + \frac{1}{\chi} \int e^{ik_0 \tau |x - x_0|} H_0(\tau) \frac{d\tau}{\mathcal{L}(\tau)} \quad (4.3)$$

Значения интеграла в формуле (4.3) и его производных вплоть до третьего порядка при $x = x_0$ могут быть вычислены прямой подстановкой. Учитывая асимптотику функции Макдональда и интегрируя, получаем асимптотику (γ – постоянная Эйлера)

$$G(x, 0, x_0, 0) = \frac{I}{k_0^2} + \frac{1}{\chi} (x - x_0)^2 \ln |x - x_0| + \frac{1}{\chi} \left(\ln \frac{k_0}{2} + \gamma + i \frac{\pi}{4} + \frac{J_{00}}{2} - \frac{3}{2} \right) (x - x_0)^2 -$$

$$- \frac{k_0^2}{24\chi} \left(J_{20} + i \frac{\pi}{4} \right) (x - x_0)^4 + O((x - x_0)^6 \ln |x - x_0|).$$

Аналогичным образом получим асимптотику ядра интегрального уравнения (3.10)

$$G_{yy_0}(x, 0, x_0, 0) = -\frac{2}{\chi} \ln |x - x_0| - \frac{2}{\chi} \left(\ln \frac{k_0}{2} + \gamma + i \frac{\pi}{4} - J_{01} \right) +$$

$$+ \frac{k_0^2}{\chi} \left(J_{21} + i \frac{\pi}{8} \right) (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^4 \ln |x - x_0|) \quad (4.4)$$

5. Асимптотика решений интегральных уравнений. Анализ сингулярностей ядер интегроалгебраического уравнения (3.8) и интегрального уравнения (3.10) позволяет заключить, что решения $\hat{p}(x)$, α_0 , α_1 и $q(x)$ существуют и единственны в соответствующих классах.

Для вычисления асимптотики решения уравнения (3.8) удобно выбрать функции $\rho_0(\lambda)$ и $\rho_1(\lambda)$ в виде

$$\rho_0(\lambda) = \int_{-a}^a \frac{e^{-i\lambda s} ds}{\sqrt{a^2 - s^2}}, \quad \rho_1(\lambda) = \int_{-a}^a \frac{e^{-i\lambda s} s ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} \quad (5.1)$$

Функцию $\hat{p}(x)$ представим в виде (3.7) и разложим функцию $P(x)$ в ряд Тейлора. Для того чтобы получить асимптотику дальнего поля с точностью до членов $O((k_0 a)^2)$, достаточно сохранить лишь два старших члена:

$$\hat{p}(x) \approx (P(0) + P'(0)x)\sqrt{a^2 - x^2} \quad (5.2)$$

Подставим выражения (5.1) и (5.2) в уравнение (3.8) и заменим ядра асимптотиками. После замены переменных $x = as$ и $x_0 = as_0$ и вычисления интегралов получим алгебраическое уравнение относительно $P(0)$, $P'(0)$, α_0 и α_1 . Левая часть этого уравнения – полином третьей степени с коэффициентами при четных степенях, зависящими от $P(0)$ и α_0 , и с коэффициентами при нечетных степенях, зависящими от $P'(0)$ и α_1 . Правую часть также можно разложить в ряд по степеням s_0 . После приравнивания коэффициентов при степенях s_0 получим систему линейных уравнений. Эта система распадается на две системы из двух уравнений каждая: первая позволяет определить величины $P(0)$ и α_0 , а из второй определяются неизвестные $P'(0)$ и α_1 . Находим

$$\alpha_0 a^2 = -\frac{(k_0 a)^2}{4\pi I} [\xi^g](0) - \frac{(k_0 a)^4}{16\pi I} [\xi^g](0)(B-1)\cos^2 \vartheta_0 - \\ - \chi \frac{(k_0 a)^4}{16\pi I^2} = [\xi^g](0)(B^2 - 2B + 2)$$

$$P(0)a^2 = -\frac{(k_0 a)^2}{8\pi I} [\xi^g](0)B - \frac{(k_0 a)^2}{8\pi} \chi [\xi^g](0)\cos^2 \vartheta_0.$$

$$\alpha_1 a^3 = \frac{i}{2\pi} \frac{\chi}{B} k_0 a [\xi^q] \cos \vartheta_0 \left\{ 1 + \frac{7}{32} (k_0 a)^2 \frac{J_{20} + i\pi/4}{B} \right\} - \\ - \frac{i}{8\pi} \frac{\chi}{B} (k_0 a)^3 [\xi^q] \cos^3 \vartheta_0$$

$$P'(0)a^3 = -\frac{i}{4\pi} \frac{\chi}{B} k_0 a [\xi^g] \cos \vartheta_0$$

Здесь

$$B = 2 \ln \frac{k_0 a}{4} + 2\gamma + J_{00} + i\frac{\pi}{2}$$

Обратимся к интегральному уравнению (3.10). Представим решение в виде (4.1) и разложим функцию $Q(as)$ в ряд Тейлора. Ограничимся тремя членами

$$Q(as) = Q_0 + Q_1 as + Q_2 a^2 s^2 + \dots \quad (5.3)$$

Подставим выражения (5.3) и (4.4) в уравнение (3.10) и вычислив интегралы, получим, как и ранее, систему уравнений относительно коэффициентов Q_j ($j = 0, 1, 2$). Уравнение для Q_1 отщепляется.

Находим асимптотики коэффициентов

$$Q_0 = -\frac{\chi}{4\pi A} [\xi_y^g](0) + (k_0 a)^2 \frac{\chi}{4\pi} [\xi_y^g](0) \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4A} \right) \cos^2 \vartheta_0 - \frac{C}{A} \right)$$

$$Q_1 a = i k_0 a \frac{\chi}{4\pi} [\xi_y^g](0) \cos \vartheta_0$$

$$Q_2 a^2 = (k_0 a)^2 \frac{\chi}{2\pi} [\xi_y^g](0) \left(\frac{C}{A} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta_0 \right)$$

Здесь

$$A = \ln \left(\frac{k_0 a}{4} \right) + \gamma - 2J_{01} + i \frac{\pi}{2}, \quad C = J_{21} + i \frac{\pi}{8}$$

6. Дальнее поле. Вычисляя интегралы по λ в (3.2) и (3.9) по методу перевала [13], получим выражения для диаграммы $\Psi(\vartheta)$ расходящейся волны (1.2). Имеем

$$\begin{aligned} \Psi(\vartheta) = & \frac{k_0 \sin \vartheta}{l(k_0 \cos \vartheta)} \left\{ a_+(k_0 \cos \vartheta) \alpha(k_0 \cos \vartheta) \operatorname{sign}(y) + \right. \\ & \left. + k_0 a_- (k_0 \cos \vartheta) \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta} \int_{-a}^a q(x) e^{-ik_0 x \cos \vartheta} dx \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

При деформации контура интегрирования выделяются вычеты в нулях знаменателя $l(\lambda)$, что дает кромочные волны

$$A_{\pm}^o = 2\pi i \frac{a_+(\kappa) \alpha(\pm \kappa)}{l'(\pm \kappa)}, \quad A_{\pm}^e = 2\pi i \frac{a_-(\kappa) \sqrt{\kappa^2 + k_0^2}}{l'(\pm \kappa)} \int_{-a}^a e^{\pm i \kappa x} q(x) dx \quad (6.2)$$

Формулы (6.1) и (6.2) дают точные выражения для диаграммы и амплитуд кромочных волн, если входящие в них функции $\alpha(\lambda)$ и $q(x)$ вычислены точно.

Отметим, что выражения (6.1) и (6.2) связаны соотношением

$$A_{\pm} = -2\pi i \operatorname{Res}_{\vartheta = \arccos(\pm \kappa / k_0)} \Psi(\vartheta) \quad (6.3)$$

аналогичным полученному ранее [14] для задачи дифракции акустической волны на тонкой пластине.

Пользуясь найденными в предыдущем разделе асимптотиками решений интегральных уравнений (3.8), (3.10), получим старшие члены разложения $\Psi(\vartheta)$ по малому параметру $k_0 a$

$$\begin{aligned} \Psi(\vartheta, \vartheta_0) = & i \frac{\sin \vartheta}{L(\vartheta)} \frac{\sin \vartheta_0}{L(\vartheta_0)} \left\{ \operatorname{sign}(y) A_+(\vartheta) A_+(\vartheta_0) \left[\frac{1}{I} - \frac{\chi}{B} \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \right. \right. \\ & + (k_0 a)^2 \left(\frac{B^2 - 2B + 2}{4I^2 \chi} + \frac{B - 1}{4I} (\cos^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta_0) + \frac{\chi}{4} \cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta_0 + \right. \\ & + \left. \frac{\chi}{4B} \left(-\frac{7}{8} \frac{J_{20} + i\pi/4}{B} + \cos^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta_0 \right) \cos \vartheta \cos \vartheta_0 \right] + \dots \Bigg\} + \\ & + \chi A_-(\vartheta) A_-(\vartheta_0) \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta} \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta_0} \left[\frac{1}{A} + \right. \\ & + \left. (k_0 a)^2 \left(\frac{1}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \frac{1}{2A} (\cos^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta_0) \right) + \dots \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

По формулам (6.2) могут быть написаны асимптотики краевых волн. Однако эти асимптотики могут быть получены и из (6.4) при помощи соотношения (6.3).

7. Вычисление интегралов. Асимптотика диаграммы дальнего поля (6.4) содержит интегралы I , J_{00} и J_{01} , в знаменатели подынтегральных выражений которых входит множитель $\mathcal{L}(\tau)$. Эти интегралы могут быть сведены к суммам вычетов в полюсах, определяемых корнями функции $\mathcal{L}(\tau)$, лежащими на римановой поверхности корня $\sqrt{\tau^4 - 1}$. Фиксируем ветви квадратных корней, проведя разрезы на комплексной плоскости τ вдоль лучей

$$L_1 = [1, 1 + i\infty), \quad L_2 = [i, -\infty + i), \quad L_3 = [-1, -1 - i\infty), \quad L_4 = [-i, +\infty - i)$$

Рассмотрим корни знаменателя $\mathcal{L}(\tau)$. Они располагаются на четырехлистной римановой поверхности попарно. На физическом листе лежат четыре корня

$$\tau = \tau_0 = \kappa/k_0, \quad \tau = -\tau_0, \quad \tau = \tau_1, \quad \tau = -\tau_1$$

где

$$\tau_1 = \left((1 - \sigma)(1 - 3\sigma + 2\sqrt{1 - 2\sigma + 2\sigma^2}) \right)^{-1/4} e^{i\pi/4}$$

На остальных листах римановой поверхности корни лежат в точках $\tau = \pm i\tau_0$ и $\tau = \pm i\tau_1$.

Рассмотрим сначала интеграл I , который входит в старший член асимптотики. Прodeформируем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость и натянем его на разрезы L_1 и L_2 . При этом выделятся вычеты в полюсах τ_0 и τ_1 . В интегралах по петлям C_1 и C_2 , охватывающим лучи L_1 и L_2 , перейдем к интегрированию по правым берегам. В интеграле по L_2 произведем замену переменной $\tau = it$, которая преобразует луч L_2 в L_1 , и объединим интегралы. Можно установить, что интегралы по разрезам сократятся. Таким образом,

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{d\mathcal{L}(\tau_0)/d\tau} + \frac{1}{d\mathcal{L}(\tau_1)/d\tau} \right)$$

Отметим, что интеграл I – величина чисто мнимая.

Теперь сделаем аналогичные преобразования с остальными интегралами. При этом вклады интегралов по разрезам для J_{20} сокращаются как и для I , а для J_{00} и J_{01} удваиваются. Для J_{20} имеем

$$J_{20} = 2\pi i \left(\frac{H_0(\tau_0)\tau_0^2}{d\mathcal{L}(\tau_0)/d\tau} + \frac{H_0(\tau_1)\tau_1^2}{d\mathcal{L}(\tau_1)/d\tau} \right)$$

В интегралах J_{00} и J_{01} интегралы по лучу L_1 сводятся к суммам вычетов при помощи процедуры, разработанной ранее [5]. Для этого введем функцию

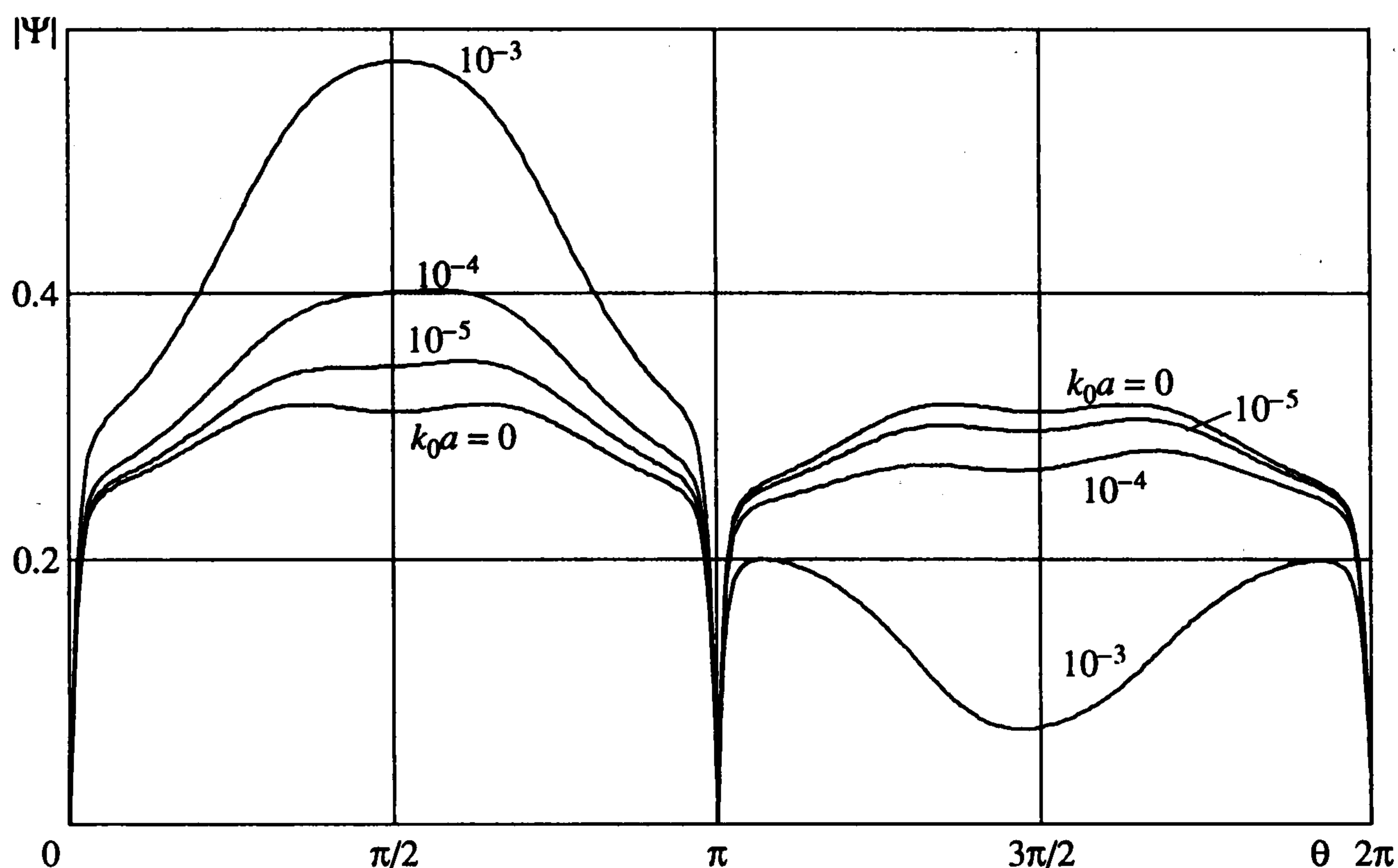
$$f(\tau) = \ln(\tau - \sqrt{\tau^2 - 1})$$

Можно убедиться, что $f(-\tau) = i\pi - f(\tau)$, что позволяет выполнить следующие преобразования интегралов:

$$\int_1^{1+i\infty} F(\tau^2) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} F(\tau^2) (f(\tau) - f(-\tau)) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \cup C_3} F(\tau^2) f(\tau) d\tau$$

Теперь интегралы по объединению петель C_1 и C_3 могут быть вычислены как суммы вычетов. Окончательно имеем

$$J_{0m} = 2\pi i \left(\frac{H_0(\tau_0)}{d\mathcal{L}(\tau_0)/d\tau} + \frac{H_0(\tau_1)}{d\mathcal{L}(\tau_1)/d\tau} \right) + \\ + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^7 \frac{((1 - \sigma^{2-m})\tau_j^4 - 1 + m\sigma(1 + \sigma/2))\mathcal{A}_-^2(\tau_j) - (1 - \sigma^{2-m})\tau_j^2(\tau_j^2 - 1)\mathcal{A}_+^2(\tau_j)}{(1 - \sigma)((1 - \sigma)^2(3 + \sigma)\tau_j^4 - 1 + 3\sigma)\tau_j^3\sqrt{\tau_j^2 - 1}} f(\tau_j)$$



8. Оптическая теорема и численные результаты. Полученные асимптотические формулы удовлетворяют принципу взаимности, т.е. выражение для диаграммы не меняется при замене ϑ на ϑ_0 и ϑ_0 на ϑ . Кроме того, полученные формулы могут быть проконтролированы при помощи оптической теоремы. Ранее [8] была принята иная нормировка кромочных волн и допущена ошибка при вычислении потока энергии, переносимой кромочной волной.

Приведем формулировку оптической теоремы применительно к геометрии рассматриваемой здесь системы. Эффективное сечение рассеяния, вычисленное как доля энергии, отобранной от геометрической части поля, выражается формулой

$$\Sigma = -\frac{4\pi}{k_0} \operatorname{Re}(\overline{R(\vartheta_0)} \Psi(\vartheta_0, \vartheta_0)) \quad (8.1)$$

С другой стороны, эффективное сечение рассеяния может быть вычислено как энергия, рассеянная на спаяе и уносимая расходящейся по пластине цилиндрической волной и четырьмя кромочными волнами, т.е.

$$\Sigma = \frac{2\pi}{k_0} \int_0^{2\pi} |\Psi(\vartheta, \vartheta)_0|^2 d\vartheta + Q(|A_+^e + A_+^o|^2 + |A_+^e - A_+^o|^2 + |A_-^e + A_-^o|^2 + |A_-^e - A_-^o|^2) \quad (8.2)$$

где

$$Q = \frac{\kappa}{k_0 a_+^2(\kappa)} \left(\frac{a_+^2(\kappa)}{2b_-(\kappa)} - \frac{a_-^2(\kappa)}{2b_+(\kappa)} + 2(1 - \sigma)k_0^2(a_+(\kappa)b_-(\kappa) - a_-(\kappa)b_+(\kappa)) \right)$$

На фигуре представлены диаграммы цилиндрических волн, рассчитанные по формуле (6.4) при угле падения 30° . Принято $\sigma = 0.3$. Точность вычислений контролировалась при помощи оптической теоремы (8.1), (8.2). Для представленных диаграмм баланс энергии нарушается не более чем на 10^{-6} , что связано с погрешностями вычислений. Наиболее велики эти погрешности при $\sigma \approx 0$, так как при этом κ практически совпадает с k_0 .

Для точечной модели спая (т.е. при $a = 0$) рассеянное поле симметрично по x антисимметрично по y . Уже при $k_0 a = 10^{-5}$ поправка к точечной модели спая оказывается заметной. При этом диаграмма теряет симметрию как по x , так и по y .

Проведенный численный анализ показал, что если в формуле (6.4) удержать лишь старший член и поправки, имеющие логарифмический порядок малости по $k_0 a$, то оптическая теорема выполняется точно. Если же члены $O((k_0 a)^2)$ также учитываются, то оптическая теорема выполняется приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. Андронов И.В., Белинский Б.П. О потоках энергии в окрестности конца трещины в изгибно-колеблющейся пластине // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 184–187.
3. Андронов И.В. Рассеяние изгибной волны на конечной прямолинейной трещине в упругой пластине // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 312–321.
4. Коновалюк И.П., Красильников В.Н. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины // Проблемы дифракции и распространения волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. Вып. 4. С. 149–165.
5. Коузов Д.П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037–1043.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматгиз. 1958. 655 с.
7. Коненков Ю.К. Об изгибной волне "релеевского" типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 124–128.
8. Белинский Б.П. Оптическая теорема для рассеяния волн в упругой пластине // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 104. С. 20–23.
9. Белинский Б.П., Коузов Д.П. О формулах типа формулы Грина для изгибно-колеблющейся пластины // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 5. С. 710–718.
10. Gunda R., Vijayakar S.M., Singh R., Farstad J.E. Harmonic Green's functions of a semi-infinite plate with clamped or free edges // J. Acoust. Soc. America. 1998. V. 103. № 2. P. 888–899.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. Андронов И.В. Интегродифференциальные уравнения свертки на конечном промежутке с ядром, имеющим логарифмическую особенность // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1992. Т. 203. Математические вопросы теории распространения волн. Вып. 22. С. 5–11.
13. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
14. Andronov I.V., Belinskiy B.P., Dauer J.P. The connection between the scattering diagram and the amplitudes of the surface waves for acoustic scattering by a baffled flexible plate // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 195. № 4. P. 667–673.