

УДК 533.6.011.51

© 2001 г. С.П. Баутин

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА

Показано, что в течениях невязкого теплопроводного газа могут присутствовать слабые разрывы трех типов: на звуковых характеристиках, на контактных поверхностях и на фронте тепловой волны. Установлено, что в течениях вязкого нетеплопроводного газа возможны слабые разрывы, но только одного типа – контактные слабые разрывы.

Как известно, система уравнений газовой динамики (для невязкой нетеплопроводной сжимаемой сплошной среды) имеет гиперболический тип и поэтому, в частности, возможны течения газа со слабыми разрывами на звуковых или контактных характеристиках [1, 2]. Это свойство позволяет решать сложные и важные задачи (см., например, [3]). Полная система уравнений Навье–Стокса [4], описывающая течения вязкого теплопроводного газа, имеет смешанный тип и тоже возможны течения со слабыми разрывами либо на фронте тепловой волны [5], либо на контактной поверхности [6]. Исследование течений как невязкого теплопроводного газа [7, 8], так и вязкого нетеплопроводного газа [9] представляет интерес в связи с проблемой получения больших плотностей энергии [10].

Для описания течений термодинамически совершенного газа, уравнения состояния которого

$$p = R\rho T, e = c_{\text{в}}T; R, c_{\text{в}} = \text{const} > 0 \quad (1)$$

(p – давление, ρ – плотность, T – температура, e – внутренняя энергия), в качестве независимых термодинамических переменных могут быть взяты ρ и T . Тогда через них выражаются все остальные термодинамические параметры с привлечением основного термодинамического тождества $TdS = de + pd(1/\rho)$, где S – энтропия. В частности, квадрат скорости звука $c^2 = (\partial p / \partial \rho)|_{S=\text{const}} = R\gamma T$, где $\gamma = 1 + R/c_{\text{в}} > 1$ – показатель адиабаты газа. Для течений газа с уравнениями состояния (1) далее в форме, приведенной ранее [11], рассматривается полная система уравнений Навье–Стокса.

Вначале разбирается случай невязкого теплопроводного газа: коэффициенты динамической и объемной вязкости μ и μ' положены равными нулю. Тогда система уравнений, описывающая течение, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T}{\rho} \nabla \rho + \nabla T \right) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} (\kappa \Delta T + \nabla \kappa \cdot \nabla T) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь t – время, $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор скорости газа, $\kappa = \kappa(\rho, T)$ – коэффициент теплопроводности.

В рассматриваемой системе при помощи положительных постоянных L_* , ρ_* и T_* стандартным образом введены безразмерные переменные, причем за масштаб скорости взята скорость звука: $u_* = c_* = \sqrt{R\gamma T_*}$ и, следовательно, безразмерная скорость звука $c = \sqrt{T}$.

Далее определяется, когда поверхность S в пространстве переменных t, x_j ($j = 1, 2, 3$) будет характеристической поверхностью системы (2). С этой целью предполагается, что поверхность S задана в виде

$$x_1 = \psi(t, x_2, x_3)$$

а у функции $\psi(t, x_2, x_3)$ предполагается существование конечных производных первого порядка.

Делается замена переменных

$$\tau = t, \quad \theta = \varphi(t, x_1, x_2, x_3), \quad \xi_i = x_i, \quad i = 2, 3$$

$$\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 - \psi(t, x_2, x_3)$$

Якобиан такого преобразования равен единице. При этой замене поверхность S : $\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$, становится новой координатной плоскостью $\theta = 0$. При учете формул преобразования производных

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad i = 2, 3$$

систему (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + (D\varphi) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 u_i \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} + \rho \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right) = 0 \\ & \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + (D\varphi) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 u_i \frac{\partial u_1}{\partial \xi_i} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \\ & \frac{\partial u_l}{\partial \tau} + (D\varphi) \frac{\partial u_l}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 u_i \frac{\partial u_l}{\partial \xi_i} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_l} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \xi_l} \right) = 0, \quad l = 2, 3 \\ & \frac{\partial T}{\partial \tau} + (D\varphi) \frac{\partial T}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 u_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + (\gamma - 1) T \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right) = \\ & = \frac{1}{\rho} \left\{ \kappa \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \sum_{i=2}^3 \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial \xi_i} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_i^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial \kappa}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \kappa}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + \sum_{i=2}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$D\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\psi_\tau(\tau, \xi_1, \xi_2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\psi_{\xi_i}(\tau, \xi_1, \xi_2), \quad i = 2, 3$$

В системе (3) вводятся обозначения

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = T^1, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{\partial T^1}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = T^i, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial \xi_i} = \frac{\partial T^1}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_i^2} = \frac{\partial T^i}{\partial \xi_i}, \quad i = 2, 3$$

и к ней присоединяются еще три уравнения для трех дополнительно введенных неизвестных функций $T^j (j = 1, 2, 3)$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = T^1, \quad \frac{\partial T^i}{\partial \theta} = \frac{\partial T^1}{\partial \xi_i}, \quad i = 2, 3$$

В результате получается квазилинейная система уравнений (ввиду громоздкости она здесь не приводится), в которую входят производные только первого порядка от вектора неизвестных функций U с восемью компонентами: $\rho, u_j, T, T^j (j = 1, 2, 3)$. Определитель матрицы A_0 , стоящей перед вектором $\partial U / \partial \theta$ (ввиду громоздкости она тоже здесь не приводится), не только достаточно просто считается, но и раскладывается на сомножители

$$\det A_0 = \frac{1}{\rho} \Phi \kappa (D\Phi)^2 \left[(D\Phi)^2 - \frac{1}{\gamma} T\Phi \right], \quad \Phi = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)^2$$

Таким образом, наличие характеристик в течениях теплопроводного невязкого газа возможно только при равенстве нулю одного из трех сомножителей, т.е. должно выполняться одно из следующих равенств:

$$\kappa = 0, \quad D\Phi = 0, \quad (D\Phi)^2 - \frac{1}{\gamma} T\Phi = 0$$

Если течение газа удовлетворяет условиям

$$\kappa(\rho, T)|_{T=0} = 0, \quad \kappa(\rho, T)|_{T>0} > 0$$

то такое течение можно трактовать как тепловую волну, распространяющуюся по холодному фону.

Равенство нулю второго сомножителя задает контактную поверхность S° .

Равенство нулю третьего сомножителя определяет два дифференциальных уравнения, различающихся только в одном знаке и поэтому записывающихся единообразно

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{T\Phi} = 0$$

Таким образом, в случае теплопроводного невязкого газа при нестационарных течениях любой размерности всегда есть две характеристики, обозначаемые далее $S_\chi^\pm$ и тоже называемые звуковыми. При этом скорость распространения (относительно рассматриваемого течения) таких характеристик в теплопроводном газе равна

$$c_\chi = \sqrt{T} / \sqrt{\gamma} = c / \sqrt{\gamma} \quad (4)$$

и не зависит от коэффициента теплопроводности. Здесь c – скорость распространения звуковых характеристик нетеплопроводного невязкого газа. Следовательно, скорость звука в теплопроводном газе строго меньше скорости звука в нетеплопроводном газе.

Представляется, что именно этим объясняется наблюдаемый в расчетах [12] факт "отставания" фронта волны сжатия в теплопроводном газе от фронта аналогичной волны сжатия в нетеплопроводном газе.

Замечание. Естественно, что приведенные выше рассмотрения возможны и в случае других уравнений состояния вида $p = p(\rho, T)$. Тогда скорость распространения

звуковых характеристик в течениях теплопроводного газа будет задаваться соотношением $c_x(\rho, T) = \sqrt{\partial p(\rho, T) / \partial \rho}$. В газовой динамике иногда рассматривается (см., например, [13]) случай изотермических течений, когда считается, что из-за бесконечной теплопроводности температура газа мгновенно выравнивается по всему рассматриваемому объему и поэтому в таких течениях $T = \text{const}$. В этом случае уравнение энергии отбрасывается, а оставшиеся уравнения (неразрывности и сохранения импульса) образуют гиперболическую систему, у которой скорость распространения звуковых характеристик ("изотермическая скорость звука") есть $(\sqrt{\partial p(\rho, T) / \partial \rho})|_{T=\text{const}}$. В данной работе в отличие от изотермического случая рассматривается общая ситуация с $T \neq \text{const}$, уравнение энергии не отбрасывается, а коэффициент теплопроводности полагается конечным и строго положительным. Естественно, что "изотермическая скорость звука" совпадает со скоростью звука $c_x(\rho, T)$ в течениях с конечным значением коэффициента теплопроводности, если в $c_x(\rho, T)$ положить $T = \text{const}$. В предположении большой, но конечной теплопроводности для линеаризованной системы (3) было построено [14] частное решение в виде бегущей волны и с помощью асимптотического анализа дисперсионного соотношения показано, что в случае малых частот такая волна бежит с "адиабатической скоростью звука" $(\sqrt{\partial p(\rho, S) / \partial \rho})|_{S=\text{const}}$, а в случае больших частот – с "изотермической скоростью звука" $(\sqrt{\partial p(\rho, T) / \partial \rho})|_{T=\text{const}}$. В отличие от этого результата выше установлено, что при любых конечных положительных значениях коэффициента теплопроводности система (3) (не линеаризованная) имеет звуковые характеристики, распространяющиеся со скоростью $c_x(\rho, T)$ вне зависимости от вида выбранного решения системы (3). Заметим также, что система, полученная линеаризацией системы (3) на решении, которое описывает однородный покой с постоянными параметрами $\rho = \rho_{00}$, $T = T_{00}$, также имеет звуковые характеристики, скорость распространения которых, естественно, постоянна и равна $c_x(\rho, T)|_{\rho=\rho_{00}, T=T_{00}}$.

При анализе течений теплопроводного газа в окрестности характеристик $C_x^\pm$ далее во избежание громоздкости рассматривается случай одномерных плоско-симметричных течений: $\partial/\partial x_2 = \partial/\partial x_3 = u_2 = u_3 = 0$, вводятся переобозначения $x_1 = x$, $u_1 = u$ и делается замена переменных

$$\tau = t, \theta = x - \psi(t)$$

Для упрощения записи далее сохраняется обозначение переменной t . Система (3) в этом случае записывается в виде

$$\rho_t + (u - \psi')\rho_\theta + \rho u_\theta = 0$$

$$u_t + (u - \psi')u_\theta + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T}{\rho} \rho_\theta + T_\theta \right) = 0 \quad (5)$$

$$T_t + (u - \psi')T_\theta + (\gamma - 1)Tu_\theta = \frac{1}{\rho} (\kappa T_{\theta\theta} + \kappa_\rho \rho_\theta T_\theta + \kappa_T T_\theta^2)$$

Для того чтобы ось $\theta = 0$ являлась одной из характеристик $C_x^\pm$, необходимо, чтобы функция $x = \psi(t)$ удовлетворяла одному из двух дифференциальных уравнений

$$\psi' = u \pm \sqrt{T/\gamma}$$

Для производных, выводящих с характеристики $C_x^\pm$, вводятся обозначения

$$f_k(t) = \partial^k f(t, \theta) / \partial \theta^k |_{\theta=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad f = \rho, u, T$$

Пусть с помощью функции $\psi(t)$ задана одна из характеристик $C_x^\pm : x = \psi(t)$, а также заданы значения всех искомых функций и (в силу вида системы (5)) тепловой поток $T_x|_{C_x^\pm} = T_\theta|_{\theta=0}$ на этой характеристике

$$\rho|_{\theta=0} = \rho_0(t) > 0, \quad u|_{\theta=0} = u_0(t) \quad (6)$$

$$T|_{\theta=0} = T_0(t) > 0, \quad T_\theta|_{\theta=0} = T_1(t)$$

Тогда

$$u_0 - \psi' = \mp \sqrt{T_0/\gamma} \neq 0 \quad (7)$$

Если в системе (5) положить $\theta = 0$ и учесть соотношения (6), (7), то получится следующее. Первое уравнение эквивалентно соотношению

$$\rho_1 = \pm(\rho_0 u_1 + \rho'_0) / \sqrt{T_0/\gamma} \quad (8)$$

Линейная комбинация первых двух уравнений (первое уравнение умножается на $\pm \sqrt{T_0/\gamma}/\rho_0$ и складывается со вторым) приводит к соотношению

$$T_1 = \mp \sqrt{\gamma T_0} \rho'_0 / \rho_0 - \gamma u'_0 \quad (9)$$

Равенство (9) есть дополнительная связь, накладываемая на условия (6), и является необходимым условием разрешимости задачи с данными на характеристике [3, 15]; в рассматриваемом случае – на характеристике $C_x^\pm$. Из третьего уравнения системы (5) при $\theta = 0$ однозначно определяется вторая производная температуры по θ , а именно

$$T_2 = \frac{\rho_0}{\kappa_0} \left[T'_0 \mp \sqrt{\frac{T_0}{\gamma}} T_1 + (\gamma - 1) T_0 u_1 \right] - \frac{1}{\kappa_0} (\kappa_{\rho 0} \rho_1 T_1 + \kappa_{T 0} T_1^2)$$

В этой и последующих формулах нижний нулевой индекс у коэффициента теплопроводности и его частных производных по ρ и T означает, что эти функции рассматриваются при $\rho = \rho_0(t)$, $T = T_0(t)$.

Если первые два уравнения системы (5) продифференцировать по θ , положить $\theta = 0$ и учесть вид f_0 , то та же их линейная комбинация даст транспортное уравнение для $u_1(t)$

$$u'_1 + u_1^2 + A(t)u_1 + B(t) = 0 \quad (10)$$

Функции $A(t)$, $B(t)$ выражаются через $f_0(t)$ и ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Уравнение (10) является общим уравнением Риккати, которое при произвольных $A(t)$ и $B(t)$ в квадратурах не интегрируется. Из-за нелинейности уравнения (10) некоторые его частные решения обращаются в бесконечность при конечных значениях t . В газовой динамике это свойство решений транспортных уравнений называется градиентной катастрофой (см., например, [16]).

Если на характеристике $C_x^\pm$ заданы постоянные значения искомых функций

$$\rho_0(t) = \rho_{00} = \text{const} > 0, \quad u_0(t) = 0, \quad T_0(t) = T_{00} = \text{const} > 0 \quad (11)$$

то, во-первых, на $C_x^\pm$ однозначно определяются значения

$$T_1(t) = 0, \quad T_2(t) = \alpha u_1(t), \quad \alpha = (\gamma - 1)\rho_{00}T_{00}/\kappa_0 > 0 \quad (12)$$

а, во-вторых, в уравнении (10)

$$A(t) = \beta, \quad \beta = \alpha/(2\gamma) > 0; \quad B(t) = 0$$

В этом случае уравнение (10) имеет частное решение вида

$$u_1(t) = \frac{\beta u_{10}}{(u_{10} + \beta)e^{\beta t} - u_{10}}, \quad u_1(t)|_{t=0} = u_{10} \quad (13)$$

И если, например, $u_{10} < 0$, $u_{10} + \beta < 0$, то градиентная катастрофа наступает в момент

$$t_* = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{u_{10}}{u_{10} + \beta} \right) > 0$$

В соотношении (8) коэффициент перед u_1 , а в уравнении (10) коэффициент перед производной отличны от нуля. Это позволяет, во-первых, записать транспортное уравнение также и для ρ_1 , а во-вторых, установить существование течений в окрестности характеристик $C_\kappa^\pm$.

Теорема 1. Пусть для системы (5) на одной из характеристик $C_\kappa^\pm$ заданы начальные данные (6), удовлетворяющие условиям (7) и (9), а также задано либо условие

$$\rho(t, \theta)|_{t=0} = \rho^0(\theta), \quad \rho^0(\theta)|_{\theta=0} = \rho_0(t)|_{t=0} \quad (14)$$

либо условие

$$u(t, \theta)|_{t=0} = u^0(\theta), \quad u^0(\theta)|_{\theta=0} = u_0(t)|_{t=0} \quad (15)$$

Тогда при условии аналитичности всех входных данных в некоторой окрестности точки $(t = 0, \theta = 0)$ задача (5), (6), (14) и задача (5), (6), (15) имеют единственные аналитические решения.

Поставленные в этой теореме задачи заключаются в получении в момент $t = 0$ наперед заданных распределений либо плотности $\rho = \rho^0$, либо скорости газа $u = u^0$, непрерывно примыкающих к фоновому течению через слабый разрыв $C_\kappa^\pm$. Доказательство теоремы 1 состоит в сведении поставленных задач к характеристической задаче Коши стандартного вида [3, 15], в основных моментах повторяет доказательство аналогичных фактов для системы уравнений газовой динамики [17] и здесь не приводится.

Из соотношения (7) также следует, что при $T > 0$ характеристика $C_\kappa^\pm$ и траектория движения частицы (которую можно будет взять за траекторию движения непроницаемого поршня) не касаются друг друга. Следовательно, можно поставить задачу о плавном движении непроницаемого поршня.

Теорема 2. Пусть для системы (5) на одной из характеристик $C_\kappa^\pm$ заданы начальные данные (6), удовлетворяющие условиям (7) и (9), а также задано условие

$$u(t, \theta)|_{\theta=x_p(t)-\psi(t)} = x'_p(t), \quad x_p(0) = \psi(0), \quad u_0(0) = x'_p(0) \quad (16)$$

Тогда при условии аналитичности всех входных данных в некоторой окрестности точки $(t = 0, \theta = 0)$ существует единственное аналитическое решение задачи (5), (6), (16).

Условие (16) есть условие непротекания на поршне, который в момент времени $t = 0$ из точки $x = \psi(0)$ начинает плавное движение в газе по закону $x = x_p(t)$: скорость поршня в момент $t = 0$ равна скорости газа на поршне. Доказательство этой теоремы здесь также не приводится, поскольку в основном повторяет доказательство соответствующей теоремы в случае системы уравнений газовой динамики [18].

Теоремы 1, 2 допускают обобщения на случай трехмерных нестационарных течений.

Из единственности решения задачи о плавном движении поршня следует, что условия, поставленные в теореме 2, однозначно определяют все течение газа от поршня

до характеристики $C_x^\pm$; в том числе, на самом поршне однозначно определяются значение температуры и тепловой поток. И совсем не обязательно, чтобы эти величины совпадали с какими-либо априорно желаемыми, например постоянная температура или нулевой тепловой поток на поршне. Это обстоятельство иллюстрируется следующим рассмотрением.

Пусть задан однородный покоящийся теплопроводный газ с параметрами (11) и звуковая характеристика в нем – для определенности C_x^+ , распространяющаяся слева направо: $x = \sqrt{T_{00}/\gamma} t + \psi(0)$ и возникшая при плавном движении ($x_p'(0) = 0$, $x_p''(0) > 0$) в газ непроницаемого поршня. Такой поршень создает волну сжатия: $u_x|_{C_x^+} < 0$, $\rho_x|_{C_x^+} < 0$. Но тогда из соотношения (12) следует, что $T_2 < 0$ и при малых t во всей области волны сжатия, включая поршень, температура газа будет меньше температуры однородного фона, по которому распространяется характеристика C_x^+ . Значит, одновременно со сжатием газа будет осуществляться и сток тепла из газа через поршень. Если же сжимающий поршень теплоизолирован или через него в газ осуществляется приток тепла, то с необходимостью будет иметь место неравенство: $T_x|_{C_x^+} > 0$. Но на такой характеристике C_x^+ в силу соотношения (9) уже не будут выполняться условия (11) – фоновое течение перестанет быть однородным покоем. Этот же вывод следует и из общих физических соображений: распространение тепла обгонит двигающуюся с конечной скоростью (4) характеристику $C_x^\pm$, изменит параметры газа перед ней и, следовательно, повлияет на ее скорость распространения. Вместе с тем, расчеты волны сжатия в теплопроводном газе показывают [12], что фронт слабого разрыва тем не менее сохранится, как это и следует из наличия C_x^+ -характеристик в течениях теплопроводного газа.

Приведенные формулы и рассуждения являются конкретным математическим подтверждением общего вывода о том, что решения системы (2), учитывают оба механизма передачи возмущений: и с помощью упругого взаимодействия, и с помощью явления теплопроводности, каждому из которых присуща своя (соответственно конечная и бесконечная) скорость передачи возмущений.

Далее для системы (2) рассматривается контактная поверхность C° , определяемая уравнением

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$$

Как показано выше, в течениях теплопроводного невязкого газа контактная поверхность есть характеристика кратности два. С понижением размерности течений – суммы размерности пространства независимых переменных и числа искомых функций – кратность этой характеристики уменьшается: при $\partial/\partial x_3 = u_3 = 0$ ее кратность равна единице; при $\partial/\partial x_2 = \partial/\partial x_3 = u_2 = u_3 = 0$ контактная поверхность в течениях невязкого теплопроводного газа характеристикой не будет. Как известно, в случае системы уравнений газовой динамики контактная поверхность – характеристика кратности три, с уменьшением размерности задачи ее кратность уменьшается и она перестает быть характеристикой в случае нестационарных потенциальных изэнтропических течений [1]. Если понижать только размерность пространства независимых переменных, но не уменьшать число искомых функций (например, при $\partial/\partial x_3 = 0$, но $u_3 \neq 0$), то кратность контактной характеристики не изменится.

Рассмотрение течения газа в окрестности контактной характеристики во избежание излишней громоздкости проводится в случае $\partial/\partial x_3 = u_3 = 0$. При этом используются обозначения $u_1 = u$, $u_2 = v$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, система (3) несколько упрощается и переписывается в соответствующем виде. Как и выше, вводятся обозначения f_k для значений производных порядка k по θ при $\theta = 0$.

Пусть с помощью функции $\psi(t, y)$ задана характеристика C° : $x = \psi(t, y)$, а также заданы значения всех искомых функций и тепловой поток $T_x|_{C^\circ} = T_\theta|_{\theta=0}$ на этой характеристике

$$\begin{aligned} \rho|_{\theta=0} &= \rho_0(\tau, \xi) > 0, \quad u|_{\theta=0} = u_0(\tau, \xi), \quad v|_{\theta=0} = v_0(\tau, \xi) \\ T|_{\theta=0} &= T_0(\tau, \xi) > 0, \quad T_\theta|_{\theta=0} = T_1(\tau, \xi) \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда, во-первых, сама C° -характеристика задается уравнением

$$u_0 - \psi_\tau - \psi_\xi v_0 = 0$$

Во-вторых, первое уравнение системы (5) при $\theta = 0$ дает связь

$$u_1 = \psi_\xi v_1 + C(\tau, \xi), \quad C(\tau, \xi) = -\frac{\rho_{0\tau} + v_0 \rho_{0\xi}}{\rho_0} + v_{0\xi}$$

В-третьих, линейная комбинация второго и третьего уравнений при $\theta = 0$ приводит к необходимому условию разрешимости задачи Коши с данными на характеристике C°

$$\psi_\xi u_{0\tau} + v_{0\tau} + v_0(\psi_\xi u_{0\xi} + v_{0\xi}) + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_0 \rho_{0\xi}}{\rho_0} + T_{0\xi} \right) = 0$$

Это условие является дополнительной связью, накладываемой на начальные данные (17), в которую (в отличие от условия (9) для $C_x^\pm$) не входит тепловой поток на C° .

Транспортное уравнение – уравнение для выводящей с поверхности C° производной $v_1(\tau, \xi)$ – получается из соответствующей линейной комбинации второго и третьего уравнений, предварительно продифференцированных по θ и рассмотренных при $\theta = 0$:

$$v_{1\tau} + v_0(\tau, \xi)v_{1\xi} + D(\tau, \xi)v_1 + E(\tau, \xi) = 0$$

где

$$D(\tau, \xi) = C(\tau, \xi) + \frac{\psi_\xi \psi_{\xi\xi} v_0 + \psi_\xi u_{0\xi} + v_{0\xi}}{1 + \psi_\xi^2}$$

а функция $E(\tau, \xi)$ ввиду громоздкости здесь не приведена. Поскольку полученное транспортное уравнение является линейным уравнением с частными производными первого порядка, то особенности решений этого уравнения известны [19].

И наконец, последняя возможность для наличия слабого разрыва в течениях невязкого теплопроводного газа: непрерывная состыковка холодного фона (в котором $T = \kappa = 0$) с тепловой волной (у которой $T > 0$ и $\kappa > 0$). Для простоты изложения данная ситуация рассматривается в случае плоско-симметричных течений, удовлетворяющих системе (5).

Теорема 3. Пусть коэффициент теплопроводности $\kappa(\rho, T)$ удовлетворяет условиям

$$\kappa(\rho, T)|_{T=0} = 0, \quad \kappa_\rho(\rho, T)|_{T=0} = 0, \quad \kappa_T(\rho, T)|_{T=0} > 0 \quad (18)$$

и имеется решение системы (5)

$$\rho = \rho_{00} = \text{const} > 0, \quad u \equiv 0, \quad T \equiv 0 \quad (19)$$

называемое далее холодным однородным фоном. Если заданная функция $x = \psi(t)$ такова, что

$$\psi'(0) \neq 0 \quad (20)$$

то при аналитичности всех входных данных поставленная задача в некоторой окрестности точки $t = 0$, $x = \psi(0)$ помимо решения (19) имеет еще одно аналитическое решение, непрерывно примыкающее к нему на линии $\theta = 0$, т.е. при $x = \psi(t)$.

Это второе решение строится в виде бесконечного ряда

$$f(t, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \frac{\theta^k}{k!}, \quad f = \rho, u, T \quad (21)$$

где величины ρ_0 , u_0 и T_0 взяты равными соответствующим значениям для холодного однородного фона, т.е.

$$\rho_0 = \rho_{00}, u_0 = 0, T_0 = 0$$

В системе (5) полагается $\theta = 0$, учитываются вид нулевых коэффициентов и условие (20). В результате получаются три соотношения

$$\rho_1 = \frac{\rho_{00} u_1}{\psi'}, \quad u_1 = \frac{T_1}{\gamma \psi'}, \quad -\psi' T_1 = \frac{\kappa_{T0}}{\rho_{00}} T_1^2$$

Последнее равенство возможно в двух случаях: $T_1 = 0$ или

$$T_1 = -\psi' \rho_{00} / \kappa_{T0} \quad (22)$$

Случай $T_1 = 0$ приводит к решению (19) и поэтому далее для T_1 рассматривается отличное от нуля значение (22). По нему однозначно определяются u_1 и ρ_1 , также отличные от нуля.

Далее каждое уравнение системы (5) дифференцируется k раз по θ , полагается $\theta = 0$ и учитываются значения f_1 . В результате получаются соотношения

$$-\psi' \rho_{k+1} + \rho_{00} u_{k+1} = F_k, \quad -\psi' u_{k+1} + \frac{1}{\gamma} T_{k+1} = G_k$$

$$\left[-(k+2) \frac{\psi'}{\kappa_{T0}} T_1 + \psi' \rho_{00} \right] T_{k+1} = H_k$$

где F_k, G_k, H_k зависят от f_l, f'_l ($l = 0, 1, \dots, k$). При учете равенства (22) выражение в последних квадратных скобках равно $-(k+1) \psi' \rho_{00}$. Поэтому из приведенных соотношений величины f_{k+1} определяются однозначно и ряд (21) формально строится. Для доказательства его сходимости строится мажорантная задача, имеющая аналитическое решение. Это построение совпадает с построением аналогичной мажорантной задачи в случае течений вязкого теплопроводного газа [5] и здесь не приводится.

Найденное аналитическое решение (21) есть тепловая волна (ТВ), распространяющаяся по холодному однородному фону (19) и непрерывно с ним состыкованная на фронте ТВ, траектория движения которого задается функцией

$$x = \psi(t) \quad (23)$$

Из соотношения (22) следует, что знак T_1 противоположен знаку ψ' . Если $\psi' > 0$, то фронт ТВ движется вправо по холодному фону. Поскольку тогда $T_1 < 0$, то сама ТВ (в которой $T > 0$) расположена слева, а холодный фон – справа от фронта (23). Если $\psi' < 0$, то фронт ТВ распространяется влево по холодному фону, $T_1 > 0$ и ТВ с $T > 0$ расположена справа, а холодный фон слева от линии (23). Из формул для u_1 и ρ_1 следует, что ТВ есть волна сжатия: за ее фронтом растет не только температура, но также плотность и модуль скорости газа.

Теорема 3 допускает естественное обобщение на случай пространственной ТВ, распространяющейся по любому холодному течению – решению системы (2) с $T \equiv 0$. ТВ существует также и в случае $\kappa = \kappa_0 \sqrt{T}$, $\kappa_0 = \text{const} > 0$.

В заключение кратко рассматривается случай вязкого нетеплопроводного газа. Для этого в полной системе уравнений Навье–Стокса [11] полагается равным нулю

коэффициент теплопроводности $\kappa = 0$ и для простоты изложения коэффициенты вязкости предполагаются постоянными, причем первый $\mu = \mu_0 = \text{const} > 0$, а второй $\mu' = 0$. Также для упрощения выкладок рассматриваются плоско-симметричные течения и некоторая линия (23) берется за новую координатную ось $\theta = 0$. В результате получается система уравнений

$$\begin{aligned} \rho_t + (u - \psi')\rho_\theta + \rho u_\theta &= 0 \\ u_t + (u - \psi')u_\theta + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T}{\rho} \rho_\theta + T_\theta \right) &= \mu_0 \frac{1}{\rho} u_{\theta\theta} \\ T_t + (u - \psi')T_\theta + (\gamma - 1)Tu_\theta &= \gamma(\gamma - 1)\mu_0 \frac{1}{\rho} u_\theta^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Если линия (23) – контактная, т.е. траектория движения некоторой частицы газа $\psi'(t) = u(t, \psi(t))$, то непосредственно из вида системы (24) следует, что ось $\theta = 0$ – характеристика кратности два. При этом определитель матрицы перед вектором выводящих с оси $\theta = 0$ производных равен $-\mu_0(u - \psi')^2/\rho$.

Начальные данные на линии $\theta = 0$ для системы (24) имеют вид

$$\begin{aligned} \rho|_{\theta=0} &= \rho_0(t) > 0, \quad u|_{\theta=0} = u_0(t) \\ u_\theta|_{\theta=0} &= u_1(t), \quad T|_{\theta=0} = T_0(t) > 0 \end{aligned} \quad (25)$$

причем

$$u_0(t) = \psi'(t)$$

Если в системе (24) положить $\theta = 0$ и учесть начальные условия (25), то получатся три уравнения

$$\begin{aligned} \rho'_0 + \rho_0 u_1 &= 0 \\ u'_0 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_0}{\rho_0} \rho_1 + T_1 \right) &= \mu_0 \frac{1}{\rho_0} u_2 \\ T'_0 + (\gamma - 1)T_0 u_1 &= \gamma(\gamma - 1)\mu_0 \frac{1}{\rho_0} u_1^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Первое и третье уравнения являются двумя необходимыми условиями разрешимости поставленной задачи – двумя дополнительными связями, накладываемыми на начальные условия, поскольку рассматриваемая характеристика имеет кратность два [3, 15]. Из второго уравнения однозначно определяется u_2 через начальные условия (25) и линейную комбинацию от ρ_1, T_1 .

Если первое и третье уравнения системы (24) продифференцированы по θ и в них положено $\theta = 0$, то при учете соотношений (25), (26) получается линейная система транспортных уравнений

$$\begin{aligned} \rho'_1 + a_{11}(t)\rho_1 + a_{12}(t)T_1 &= b_1(t) \\ T'_1 + a_{21}(t)\rho_1 + a_{22}(t)T_1 &= b_2(t) \end{aligned}$$

Функции $a_{ij}(t), b_i(t)$ ($i, j = 1, 2$) определяются начальными данными и ввиду громоздкости их вид здесь не приводится. Как известно, особенности решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут иметь место только при значениях t , при которых имеются особенности коэффициентов и правых частей системы.

Если на контактной линии (23) плотность постоянна, т.е.

$$\rho_0(t) = \rho_{00} = \text{const} > 0$$

то с необходимостью получается, что

$$u_1(t) = 0, T_0(t) = T_{00} = \text{const} > 0$$

Тогда в системе транспортных уравнений все коэффициенты становятся постоянными:

$$a_{11} = \frac{\rho_{00} T_{00}}{\gamma \mu_0}, \quad a_{12} = \frac{\rho_{00}^2}{\gamma \mu_0}$$
$$a_{21} = \frac{(\gamma - 1) T_{00}^2}{\gamma \mu_0}, \quad a_{22} = \frac{(\gamma - 1) \rho_{00} T_{00}}{\gamma \mu_0}$$

В случае однородности системы транспортных уравнений (например, при $u_0 = \text{const}$) функции $\rho_1(t)$, $T_1(t)$ являются соответствующими линейными комбинациями постоянных и экспоненты с показателем $-Bt$, где $B = \rho_{00} T_{00} / \mu_0$.

Таким образом, как и в течениях вязкого теплопроводного газа [6], процесс стабилизации потока (процесс выравнивания малых возмущений) возле контактной характеристики в вязком нетеплопроводном газе определяется экспонентой $\exp(-Bt)$, где положительная постоянная B обратно пропорциональна μ_0 .

При увеличении размерности задачи контактная поверхность S° остается характеристикой, ее кратность остается равной двум и других характеристических поверхностей в течениях вязкого нетеплопроводного газа нет.

Автор благодарит А.Н. Крайко за обсуждения и полезные рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
2. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
3. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997. 160 с.
4. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1983. 304 с.
5. Баутин С.П. Представление решений системы уравнений Навье–Стокса с помощью характеристических рядов // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1987. Вып. 83. С. 11–31.
6. Баутин С.П. Представление решений системы Навье–Стокса в окрестности контактной характеристики // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 574–584.
7. Забабахин Е.И., Симоненко В.А. Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 334–336.
8. Неуважаев В.Е. Неадиабатические движения в идеальном газе (автомодельные решения) // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1973. Т. 122. С. 24–51.
9. Ильин А.М., Неудачин Д.И. О влиянии малой диссипации на решения гиперболической системы, имеющие слабый разрыв // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 5. С. 583–585.
10. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 173 с.
11. Баутин С.П. Аналитическое построение течений вязкого газа при помощи последовательности линеаризованных систем Навье–Стокса // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 579–589.
12. Анучин М.Г. Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 4. С. 25–32.
13. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.

14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 11. С. 2052–2063.
16. Крайко А.Н. О возникновении ударных волн при неравновесных течениях // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 794–803.
17. Баутин С.П. О задаче получения наперед заданных распределений параметров газа // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 938–946.
18. Баутин С.П. Сведение некоторых задач газовой динамики к характеристической задаче Коши стандартного вида // Аналитические и численные методы исследования задач механики сплошной среды. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 4–22.
19. Courant R. Partial Differential Equations. N.Y.; L.: Inter-Science, 1962. = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

Екатеринбург
e-mail: sbautin@math.usart.ru

Поступила в редакцию
13.IX.2000