

УДК 533.6

© 2001 г. А.Ф. Мустаев, С.В. Хабиров

ВИНТОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

В рамках программы ПОДМОДЕЛИ исследуется инвариантная подмодель идеальной газовой динамики, построенная на двумерной подалгебре, состоящей из оператора галилеева переноса и суммы операторов переноса и вращения. Обнаружено оригинальное групповое свойство подмодели: допускаемая алгебра шире фактора нормализатора рассматриваемой подалгебры. Проводится групповая классификация подмодели. Дается физическая интерпретация инвариантного решения. Рассмотрен ряд точных решений: автомодельные решения, решения с линейной функцией тока. Выводятся условия аналитичности решения на оси симметрии движения.

1. Уравнения подмодели. Уравнения газовой динамики рассматриваются в цилиндрических координатах t, x, r, θ ; U – проекции скорости на ось x , V – радиальная проекция скорости, W – окружная проекция скорости. Инвариантное решение строится по двумерной подалгебре L_2 , заданной базисом операторов $t\partial_x + \partial_u$ (оператор галилеева переноса), $\partial_x + \partial_\theta$ (сумма операторов переноса и вращения). Подалгебра взята из оптимальной системы подалгебр 11-мерной алгебры Ли L_{11} , допускаемой уравнениями газовой динамики с произвольным уравнением состояния (см. [1, табл. 6, N 2.10]). Вычисление инвариантов подалгебры дает представление инвариантного решения

$$U = t^{-1}(x - \theta) + v(t, r), \quad V = u(t, r), \quad W = w(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad p = p(t, r) \quad (1.1)$$

Подстановка такого представления решения (1.1) в уравнения газовой динамики дает уравнения подмодели

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}w^2 \\ v_t + uv_r &= t^{-1}(r^{-1}w - v) \\ w_t + uw_r &= -r^{-1}uw \\ \rho_t + u\rho_r + \rho u_r &= -\rho(t^{-1} + r^{-1}u) \\ p_t + up_r + Au_r &= -A(t^{-1} + r^{-1}u); \quad A = \rho c^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $c^2 = \partial f / \partial \rho$ – квадрат скорости звука, $p = f(\rho, S)$ – уравнение состояния; u, v, w – инвариантные скорости, ρ – плотность, p – давление.

Из системы (1.2) следует уравнение для энтропии S

$$S_t + uS_r = 0 \quad (1.3)$$

Второе уравнение системы (1.2) отщепляется от системы. Его можно решать как линейное уравнение отдельно после нахождения решения оставшихся уравнений.

Из третьего уравнения системы (1.2) и уравнения (1.3) следует интеграл закрутки

$$rw = \chi(S) \quad (1.4)$$

где χ – произвольная функция.

Таким образом, уравнения подмодели можно записать как систему из трех уравнений: уравнение для энтропии (1.3) и еще два уравнения

$$u_t + uu_r + \rho^{-1}(f_p \rho_r + f_S S_r) = r^{-3} \chi^2(S), \quad (\rho tr)_t + (u \rho tr)_r = 0 \quad (1.5)$$

Второе уравнение (1.5) обращается в тождество после введения функции тока ψ : $\rho tr = \omega(\psi) \psi_r$, $u \rho tr = -\omega(\psi) \psi_t$, где ω – производная ненулевая функция. Из уравнения (1.3) следует интеграл энтропии

$$S = S(\psi) \quad (1.6)$$

Остается первое уравнение (1.5), которое после подстановки интегралов становится квазилинейным гиперболическим уравнением второго порядка для функции тока

$$\psi_r^2 \psi_{tt} - 2\psi_t \psi_r \psi_{tr} + (\psi_t^2 - c^2 \psi_r^2) \psi_{rr} = \psi_r^3 (f_S S' \omega^{-1} tr - c^2 r^{-1} - \chi^2 r^{-3}) + \psi_r^4 c^2 \omega' \omega^{-1} \quad (1.7)$$

2. Групповая классификация. Система (1.2) содержит произвольную функцию $A(\rho, p)$. Вопрос о расширении допускаемой алгебры для специальных функций A является основным в групповом анализе [2]. Преобразования эквивалентности таковы:

$$r' = a_1 r, \quad u' = a_1 u, \quad w' = a_1 w, \quad \rho' = a_2 \rho, \quad p' = a_2 a_1^2 (p + a_3), \quad A' = a_2 a_1^2 A$$

Преобразование инвариантных переменных не выписываются.

Ядро допускаемых алгебр задается операторами

$$Z = t \partial_t + r \partial_r - u \partial_u, \quad Z_\lambda = t^{-1} \lambda(S) \partial_u$$

где $\lambda(S)$ – произвольная функция. Фактор нормализатора подалгебры L_2 в алгебре L_{11} одномерен и задается оператором $Z_1 = t^{-1} \partial_u$. Появление бесконечного абелева идеала Z_λ у ядра объясняется тем, что линейное уравнение для u отщепляется от системы (1.2). Появление оператора растяжения Z – редкое исключение для инвариантных подмоделей, для которых, как правило, допускается лишь фактор нормализатора.

Результат групповой классификации системы (1.2) приводится в таблице, где N – номер расширения из [1], табл. 1. Ядро входит во все алгебры Ли. Последняя строка соответствует расширению для новой функции A , которой нет в [1], табл. 1. Введены следующие обозначения операторов, встречающихся в таблице:

$$Y_{\varphi(p)}^* = \rho \varphi'(p) \partial_\rho + \varphi(p) \partial_p, \quad Y_1 = r \partial_r + u \partial_u + w \partial_w - 2\rho \partial_\rho$$

$$Y_2 = t^2 \partial_t + tr \partial_r + (r - tu) \partial_u - tv \partial_v - tw \partial_w - 3tr \partial_\rho - 5tp \partial_p$$

$$Y_3 = \partial_t - t^{-1} (u \partial_u + \rho \partial_\rho + p \partial_p)$$

Групповая классификация системы (1.3), (1.5) должна проводиться по двум произвольным элементам f, χ . Она отлична от приведенной в таблице и довольно обширна, чтобы ее можно было привести в журнальной статье. Автором был дан исчерпывающий список расширений¹.

Групповая классификация уравнения (1.7) с тремя произвольными элементами f, χ, ω не проводилась.

3. Характеристики и уравнения сильных разрывов. Уравнения подмодели (1.5), (1.3) можно записать в симметрическом гиперболическом виде

$$\rho u_t + \rho uu_r + p_r = \rho \chi^2(S) r^{-3}, \quad b p_t + b u p_r + u_r = -t^{-1} - u r^{-1} \quad (3.1)$$

($b = \rho^{-1} c^{-2}$, $\rho = g(p, S)$ – уравнение состояния, $c^{-2} = g_p$).

¹ Мустаев А.Ф. Подмодели винтовых галилеево-инвариантных течений в газовой динамике: Препринт № 137. Уфа: Ин-т механики УНЦ РАН, 1999. 27 с.

N	A	Расширяющие операторы
2	$pf(pp^{-\gamma})$	$(\gamma - 1)Y_1 + 2\gamma Y_p^*$
4	$f(p)$	Y_1
5	$pf(p)$	$Y_1 + 2Y_p^*$
6	γp	Y_p^*, Y_1
7	$5/3p$	Y_p^*, Y_2
8	$f(\rho e^{-p})$	$Y_1 - 2Y_1^*$
9	$f(p)$	Y_1^*
10	γp^γ	$Y_1^*, (\gamma - 1)Y_1 + 2\gamma Y_p^*$
11	ρ	Y_p^*, Y_1^*
12	1	Y_1, Y_1^*
13	0	$Y_1, Y_{\Phi(p)}^*$
—	p	Y_p^*, Y_1, Y_3

Система имеет три характеристики. Характеристическая форма системы (3.1), (1.3) имеет вид [3]

$$C_0 : \frac{dr}{dt} = u, \quad D_0 S = S_t + u S_r = 0$$

$$C_{\pm} : \frac{dr}{dt} = u \pm c, \quad \rho c D_{\pm} u \pm D_{\pm} p = c \rho \chi^2 r^{-3} \mp \rho c^2 (t^{-1} + u r^{-1})$$

$$(D_{\pm} = \partial_t + (u \pm c) \partial_r)$$

Инвариантный сильный разрыв $r = r_0(t)$ удовлетворяет следующим уравнениям [3]:
контактный разрыв

$$u_i = r'_0, \quad i = 1, 2; \quad [p] = p_2 - p_1 = 0$$

ударная волна

$$[v] = [w] = 0$$

$$(u_2 - r'_0)^2 = \rho_2 \rho_1^{-1} [p] [\rho]^{-1}, \quad (u_1 - r'_0)^2 = \rho_1 \rho_2^{-1} [p] [\rho]^{-1}$$

$$\varepsilon(\rho_2, p_2) - \varepsilon(\rho_1, p_1) + \frac{1}{2}(\rho_2^{-1} - \rho_1^{-1})(p_2 - p_1) = 0$$

Индексы $i = 1, 2$ определяют значения величин с разных сторон разрыва, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$ — уравнение состояния, связывающее внутреннюю энергию, плотность и давление.

4. Физическая интерпретация инвариантного решения. Каждому непрерывному решению системы (1.2) в области Ω , принадлежащей четверти плоскости $t \geq t_0, r \geq 0$, соответствует физическое решение по формулам (1.1). Каждой точке $(t_1, r_1) \in \Omega$ соответствует в физическом пространстве $R^3(x, r, \theta)$ цилиндр $r = r_1$. Инвариантные функции принимают фиксированные значения в этой точке. Из формул (1.1) следует, что V, W, ρ, p постоянны на цилиндре, а функция U постоянна лишь на винтовых линиях $x = \theta + C, C = \text{const}$ и не может быть непрерывной на всем цилиндре (действительно, если постоянную C изменить на $C + 2\pi$, то получится та же самая

винтовая линия, а функция U примет приращение $2\pi t_1^{-1}$). Итак, физическое решение, заданное на цилиндрах, имеет сильный разрыв функции U , который не может быть инвариантным. Так как на этом разрыве p, ρ непрерывны, то это либо контактный разрыв, либо стенка.

Пусть поверхность разрыва задается уравнением $F(t, x, r, \theta) = 0$ с нормалью $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ и скоростью движения $D_n = -F_n / |\nabla F|$. Условия на контактном разрыве таковы: $u_{ni} = D_n$, $[p] = 0$, индекс $i = 1, 2$ обозначает сторону разрыва. Отсюда следуют уравнения для поверхности

$$F_x = 0, \quad F_t + uF_r + r^{-1}wF_\theta = 0$$

решение которых записывается в виде

$$F \equiv \theta - \left(\int J^{-1} w(t, r) \right) \Big|_{C=I(t, r)} - \varphi(I(t, r)) = 0 \quad (4.1)$$

где $I(t, r) = C$ – интеграл уравнения $dr/dt = u$; $r = J(t, C)$ – обратная функция к функции I , φ – произвольная функция.

Мировые линии частиц по обе стороны контактного разрыва лежат на движущейся поверхности (4.1). Действительно, мировая линия частицы с одной стороны разрыва удовлетворяет уравнениям, следующим из формул (1.1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - \theta}{t} + v(t, r), \quad \frac{dr}{dt} = u(t, r), \quad r \frac{d\theta}{dt} = w(t, r) \quad (4.2)$$

с начальными условиями

$$x|_{t=t_1} = x_0, \quad r|_{t=t_1} = r_0, \quad \theta|_{t=t_1} = \theta_0 \quad (4.3)$$

Мировая линия частицы с другой стороны разрыва удовлетворяет уравнениям, аналогичным (4.2), где вместо θ в первом уравнении должно стоять $\theta + 2\pi$. Начальные условия для θ в (4.3) можно взять в виде $\theta|_{t=t_1} = \theta_0 - 2\pi$. Замена $x - 2\pi = \bar{x}$ приводит к первой мировой линии. Итак, вторая мировая линия получается из первой либо сдвигом по x на -2π , либо поворотом вокруг оси x на угол 2π . Отсюда следуют, что обе мировые линии лежат на поверхности (4.1).

5. Автомодельное решение подмодели. Подмодель (1.2) допускает растяжение $Z = t\partial_t + r\partial_r - v\partial_v$, которое не входит в фактор нормализатора. Поэтому автомодельное решение подмодели, построенное по Z , не может быть получено как инвариантное решение относительно какой-либо подалгебры из оптимальной системы для газодинамических уравнений [1, табл. 6]. Рассмотрим его детальнее. Отщепленное уравнение для v пока не рассматриваем. Инварианты Z дают представление автомодельного решения

$$u = u(s), \quad w = w(s), \quad \rho = \rho(s), \quad p = p(s); \quad S = S(s); \quad s = rt^{-1} \quad (5.1)$$

Подстановка выражений (5.1) в (1.2) и (1.3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} S' = 0 &\Rightarrow S(p, \rho) = S_0 - \text{интеграл энтропии} (p = f(\rho, S_0)) \\ (u - s)u' + f_\rho \rho^{-1} \rho' &= s^{-1} w^2 \\ (u - s)w' &= -s^{-1} u w \\ (u - s)\rho' + \rho u' + \rho(1 + s^{-1} u) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Последние два уравнения дают интеграл

$$\rho(u - s) = Cs^2 w^3, \quad C = \text{const} \quad (5.3)$$

Если подставить $u = s + Cs^2w^3\rho^{-1}$ в систему (5.2), то получаются два уравнения для определения w и ρ

$$\frac{sw'}{w} + \frac{\rho}{Csw^3} + 1 = 0$$

$$(\rho^2 f_\rho - C^2 s^4 w^6) s \rho' = w^2 \rho (\rho^2 + 2C \rho s^3 w + C^2 s^4 w^4) \quad (5.4)$$

Можно задать функцию $w(s)$. Тогда из первого уравнения определится функция $\rho(s)$ и второе уравнение задает параметрически функцию $f_\rho(\rho)$. Таким образом, для произвольного вращения можно подобрать уравнение состояния, так чтобы решение задавалось конечными формулами. Так можно определить точные решения.

Например, при $w = w_0 s^k$, $k \neq -1$ из соотношений (5.3) и (5.4) определяются величины

$$\rho = (C_1^{-1} s)^{3k+1}, \quad C_1^{-1-3k} = -(k+1)Cw_0^3, \quad u = \frac{k}{k+1}s$$

$$f(\rho) = C_1^{2k} w_0^2 (5k+1)^{-1} \rho^{1+2k/(3k+1)} + \frac{kC_1^2}{3(k+1)^3} \rho^{1+2/(3k+1)} + C_2$$

$$C_2 = \text{const}$$

6. Решения с линейной функцией тока. Так же как в случае одномерных движений политропного газа ([4], с. 312), разыскиваем функцию тока уравнения (1.7) в виде линейной однородной функции переменной r

$$\psi = \frac{r}{a(t)}, \quad f = B(S)\rho^\gamma \quad (6.1)$$

Подстановка выражений (6.1) в уравнение (1.7) дает соотношение

$$t^{\gamma-1} a^{2\gamma-1} a'' + \psi^{-\gamma} \omega^{\gamma-1} [B_\psi + \gamma B(\omega^{-1} \omega' - \psi^{-1})] = \chi^2 \psi^{-4} t^{\gamma-1} a^{2\gamma-4}$$

Разделение переменных t, ψ приводит к определению функций

$$\chi = C_1 \psi^2, \quad \omega = \psi B^{-1/\gamma} \left[C_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \int \psi B^{-1/\gamma} d\psi + C_3 \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (6.2)$$

Для функции $a(t)$ получается дифференциальное уравнение

$$a'' = C_1^2 a^{-3} - C_2 t^{1-\gamma} a^{1-2\gamma}, \quad C_1, C_2, C_3 = \text{const} \quad (6.3)$$

Если $C_2 = 0$, то решение уравнения (6.3) таково:

$$a = a_0 (1 + a_0^{-4} C_1^2 (t - t_0)^2)^{1/2}, \quad a_0, t_0 = \text{const}$$

Величина $a(t)$ возрастает по гиперболическому закону, асимптотически приближаясь к прямой $a_0 a = C_1(t - t_0)$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что функция $a(t)$ задает закон движения частицы $r = \psi_0 a(t)$ по линии тока $\psi = \psi_0$.

Положительные решения уравнения (6.3) при $C_2 \neq 0$ для больших значений t могут иметь колебательный характер для некоторых значений постоянных C_1 и C_2 .

Рассмотрим, например, интегрируемый случай $\gamma = 3/2$. Замена $a = t^{1/2} b(t)$ приводит к решению, выражающемуся через эллиптический интеграл

$$\ln \left| \frac{t}{t_0} \right| = 2 \int_{b_0}^b \frac{bdb}{\sqrt{b^4 + C_4 b^2 + 8C_2 b - 4C_1^2}}, \quad b_0, t_0, C_1, C_2, C_4 = \text{const} \quad (6.4)$$

На фазовой плоскости (b, c) , $c = b_s$, $s = \ln t$ уравнение (6.3)

$$\frac{dc}{db} = \frac{b^4 - 4C_2 b + 4C_1^2}{4cb^3}$$

имеет только две действительные особые точки $(b_1, 0)$, $(b_2, 0)$, причем

$$b_{1,2} = \frac{1}{2}D[1 \pm (-1 - 8C_2D^{-3})^{1/2}], \quad D^6 = 16(C_2^2 + C_1^2D^2)$$

Постоянные C_1 , C_2 можно выбрать такими, чтобы $b_1 > b_2 > 0$. Тогда первая особая точка – центр, а вторая – седло. Итак, в окрестности точки $(b_1, 0)$ решение (6.4) имеет колебательный характер.

7. Винтовое движение газа. Рассматривается некоторое инвариантное решение подмодели (1.3), (1.5) по классификации автора (см. работу, цитируемую в сноске). В случае политропного газа $p = Sp^\gamma$ система уравнений (1.3), (1.5) допускает растяжение $(1 - \gamma)(2t\partial_t + r\partial_r - u\partial_u) + 2r\partial_p$. Представление инвариантного решения таково:

$$u = t^{-1/2}u_1(s), \quad \rho = t^{1/(1-\gamma)}\rho_1(s), \quad S = S(s), \quad s = rt^{-1/2}$$

Инвариантные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(u_1 - \frac{1}{2}s\right)s' &= 0 \\ \left(s\left(u_1 - \frac{1}{2}s\right)\rho_1\right)' + \frac{2\gamma-3}{\gamma-1}s\rho_1 &= 0 \\ u_1u_1' - \frac{1}{2}(su_1)' + \gamma S\rho_1^{\gamma-2}\rho_1' + \rho_1^{\gamma-1}S' &= \chi^2(S)s^{-3} \end{aligned} \quad (7.1)$$

При $\gamma = 3/2$ система (7.1) интегрируется. Имеются два типа решений: неизэнтропический случай

$$u_1 = \frac{1}{2}s, \quad \rho_1 = \frac{1}{9}S^{-2/3} \left[\int_{s_0}^s S(s)^{-2/3} \left(\frac{1}{4}s + s^{-3}\chi^2(S(s)) \right) ds \right]^2$$

$S = S(s)$ – произвольная функция, s_0 – постоянная; изэнтропический случай

$$\begin{aligned} S &= S_0, \quad u_1 = \frac{1}{2}s + C_1(s\rho_1)^{-1}, \\ s^2\rho_1(C_0\rho_1 - 6S_0\rho_1^{3/2} - C_1) &= C_1^2 + \frac{1}{2}M_0\rho_1^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $S_0 > 0$, $M_0 > 0$, C_0 , C_1 – постоянные.

Неизэнтропический случай приводит к следующему физическому решению (1.1):

$$U = t^{-1}(x - \theta + h(s)) + r^2\chi(S(s))\ln t$$

$$V = \frac{1}{2}rt^{-1}, \quad W = r^{-1}\chi(S(s))$$

$$\rho = \frac{1}{9}t^{-2}S^{-2/3} \left[\int_{s_0}^s S(s_1)^{-2/3} \left(\frac{1}{4}s_1 + s_1^{-3}\chi^2(S(s_1)) \right) ds_1 \right]^2$$

$$S = S(s), \quad p = Sp^{3/2}$$

где $h(s)$, $S(s)$, $\chi(S)$ – произвольные функции.

Пусть $\chi(S(s)) = ks^2$, k – постоянная. Тогда физические скорости выражаются по формулам

$$U = t^{-1}(x - \theta + k \ln t + h(s)), \quad V = \frac{1}{2}rt^{-1}, \quad W = krt^{-1}$$

Мировая линия частицы, проходящая через точку (x_0, r_0, θ_0) в момент $t_1 = 1$, определяется из (4.2), (4.3)

$$x = x_0 t + (t-1)(h_0 - \theta_0), \quad r = r_0 t^{1/2}, \quad \theta = k \ln t + \theta_0, \quad h_0 = h(r_0)$$

Проекция мировой линии на пространство $R^3(x, r, \theta)$ есть траектория, лежащая на параболоиде

$$x = (x_0 + h_0 - \theta_0)(r/r_0)^2 + \theta_0 - h_0$$

Проекция траектории на плоскость $x = \text{const}$ есть спираль

$$r = r_0 \exp \frac{\theta - \theta_0}{2k}$$

Фиксируем x_0, θ_0 и меняем r_0 . Вершина параболоида лежит на оси x в точке $\theta_0 - h(r_0)$. При уменьшении r_0 параболоид сужается к оси x . Траектории, проходящие через полупрямую $x_0 = \text{const}$, $\theta_0 = \text{const}$, $0 \leq r_0 < \infty$, образуют винтовую сужающуюся поверхность. Эта поверхность может быть контактным разрывом или стенкой и ограничивает непрерывное физическое движение газа.

Изэнтропический случай описывает истечение из объемного расширяющегося закрученного источника.

Действительно, функция $\rho_1(s) > 0$ определена неявной формулой (7.2) для $s > s_0 > 0$ при $M_0 > 0$, $C_1 \neq 0$. При $C_1 > 0$ и достаточно большом значении постоянной $C_0 > 0$ выражение

$$C_0 \rho_1 - 6S_0 \rho_1^{3/2} - C_1 = g(\rho_1)$$

имеет два нуля при $\rho_1 = \rho_{11}, \rho_{12}$, $0 < \rho_{11} < \rho_{12}$; из соотношения (7.2) следует, что $\rho_1(s)$ – двузначная ограниченная монотонная функция, принимающая значения между ρ_{11} и ρ_{12} . Если $C_1 < 0$, то функция $g(\rho_1)$ имеет один ноль при $\rho_1 = \rho_{12} > 0$; из соотношений (7.2) следует, что $\rho_1(s)$ – двузначная монотонная функция, принимающая значения между нулем и ρ_{12} . Итак, для каждого значения постоянных (кроме $C_1 > 0$, $C_0 < 0$) существует два истечения из цилиндрического закрученного источника, расширяющегося по закону $r = s_0 t^{1/2}$. В области течения имеется винтовой контактный разрыв или стенка.

8. Аналитическое решение без особенностей на оси. Для аналитического уравнения состояния $\rho = g(p, S)$ можно рассмотреть аналитические решения в окрестности оси $r = 0$. Физические условия того, что решение (1.1) не имеет особенностей, таковы:

$$u(t, 0) = w(t, 0) = 0$$

Решение системы (1.2) разыскивается в виде рядов по степеням r . Сравнение степеней в уравнениях (1.2) дает следующее представление решения:

$$\begin{aligned} u &= r \sum u_k r^k, \quad w = r \sum w_k r^k, \quad \rho = \sum \rho_k r^k \\ p &= P + r^2 \sum p_k r^k, \quad S = C_0 + r \sum S_k r^k \end{aligned} \quad (8.1)$$

где $u_k, w_k, \rho_k, p_k, S_k, P$ – функции переменной t , C_0 – постоянная, суммирование производится по целым неотрицательным k .

При $r = 0$ из системы (1.2) и уравнения состояния определяются величины с нулевым индексом

$$\rho_0 = g(P, C_0), \quad \text{или} \quad P = f(\rho_0, C_0)$$

$$u_0 = -\frac{1}{2}(t^{-1} + \rho_0^{-1}\rho'_0), \quad w_0 = C_1 t \rho_0, \quad (8.2)$$

$$S_0 = C_2 (t \rho_0)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{1}{2} \rho_0 (w_0^2 - u_0'^2 - u_0^2)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, $P(t)$ – произвольная функция.

Подстановка представления решения вида (8.1) в систему (1.2) и в уравнение состояния, сравнение коэффициентов при r^k дают уравнения для определения величин с индексом k

$$\begin{aligned} \rho_0 u'_k + (k+2)u_0 \rho_0 u_k - 2\rho_0 w_0 w_k + (u_0' + u_0'^2 - w_0^2) \rho_k + (k+2)p_k &= g_{1k} \\ w'_k + 2w_0 u_k + (k+2)u_0 w_k &= g_{2k} \\ \rho'_k + (k+2)\rho_0 u_k + ((k+2)u_0 + t^{-1})\rho_k &= g_{3k} \\ S'_k + S_0 u_k + u_0 S_k &= g_{4k} \\ \rho_k &= g_{5k} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Величины g_{ik} выражаются через величины с индексами, меньшими k . Из последнего уравнения (8.3) определяется ρ_k , а из третьего и первого уравнений (8.3) определяются u_k и p_k соответственно. Остальные два уравнения – линейные неоднородные уравнения для определения w_k и S_k , решение которых имеет вид

$$w_k = (t \rho_0)^{1+k/2} (F_k(t) + C_{2k+1}), \quad S_k = (t \rho_0)^{1/2} (G_k(t) + C_{2k+2})$$

где C_{2k+1}, C_{2k+2} – постоянные; $F_k(t), G_k(t)$ – некоторые функции.

Итак, решение (8.1) определяется с точностью до произвольной функции $P(t)$ и бесконечного числа постоянных $C_0, C_1, C_2 \dots$

Сходимость рядов (8.1) можно доказать методом мажорант в малом. Тогда константный произвол может быть задан двумя произвольными функциями $\sigma(s), v(r)$:

$$w = r \bar{w}(t, r) + r \mu(t) \sigma(r \mu(t)), \quad S = C_0 + \bar{S}(t, r) + r \mu(t) v(r) \quad (8.4)$$

где $\bar{w}, \bar{S}, \mu$ – некоторые фиксированные функции. Следовательно, асимптотическое поведение функции w, S при $r \rightarrow 0$, согласованное с (8.4), может быть задано функциями σ, v в качестве краевых условий. Кроме того, можно задать поведение давления $P(t)$ на оси $r = 0$. Энтропия определяется с точностью до постоянного слагаемого, поэтому постоянная C_0 несущественна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00523).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
3. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.

Уфа

Поступила в редакцию
31.VIII.2000