

УДК 531.36:534.1

© 2001 г. Л.Д. Акуленко

**СХЕМЫ УСРЕДНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ
В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Методом усреднения исследуются нелинейные колебания, описываемые стандартной по Н.Н. Боголюбову системой. Рассматривается часто встречающаяся в прикладных задачах ситуация, когда система первого приближения не позволяет судить о ее существенной эволюции и качественном поведении (усредненное значение правой части системы тождественно равно нулю). Излагается и обосновывается схема усреднения для описания эволюции на значительно больших интервалах времени по отрицательным степеням малого параметра (квадратичном, кубическом и т.д.). Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность предлагаемых схем усреднения высших степеней.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многомерную нелинейную колебательную систему в стандартной по Н.Н. Боголюбову форме [1–4]

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1 \quad (1.1)$$

Здесь x – n -вектор, $x \in D \subset R^n$, D – некоторое связное множество (обычно замкнутая [1–3] или открытая [4] область); X – достаточно гладкая функция вещественной переменной x , свойства гладкости которой уточняются ниже. Относительно аргумента t (t – время или вращающаяся фаза) предполагается непрерывность и 2π -периодичность.

Для исследования задачи Коши (1.1) проводятся стандартные построения метода усреднения [1–4]. Выписывается, как обычно, усредненная система первого приближения

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi), \quad \xi(0) = x^0, \quad X_0(\varepsilon) \equiv \langle X(t, \xi) \rangle \quad (1.2)$$

$$\xi = \xi_0(\varepsilon t, x^0) \in D, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon, \quad L = \text{const}$$

Угловыми скобками в (1.2) и далее обозначаются средние на периоде 2π по явно входящему аргументу t . Затем в зависимости от характера решения первого приближения ξ (1.2) и локальных свойств системы (1.1) в окрестности этого решения используются результаты основных теорем Н.Н. Боголюбова о близости решений (ε -близости в случае периодичности по t) на асимптотически большом интервале времени $0 \leq t \leq L/\varepsilon$ (1-я теорема, метод усреднения [1–6]) или на неограниченном интервале $|t| < \infty$ (2-я теорема, метод локальных интегральных многообразий [1–3]).

Если $X_0(\xi) \neq 0$, то решение $\xi = \xi_0$ (1.2), вообще говоря, дает достаточно полное представление об эволюции оскулирующих переменных x и всего колебательного процесса в целом. Последующие приближения приведут лишь к малому на $O(\varepsilon)$ уточнению решения на интервале $0 \leq t \leq L/\varepsilon$, что не имеет принципиального значения для исследования качественного поведения системы как в теоретическом, так и прикладном аспектах.

Рассмотрим ситуацию, когда учет высших приближений представляется принципиально важным. В прикладных задачах часто имеет место тождество $X_0(\xi) \equiv 0$; тогда $\xi_0 \equiv x^0$ и на интервале $t \sim 1/\varepsilon$ переменная x совершает малые вибрации с амплитудой $O(\varepsilon)$ относительно $x = x^0$, и при этом возможна эволюция со скоростью $O(\varepsilon^2)$. Предлагается другой подход, связанный с построением схем усреднения высших степеней по ε и с существенным увеличением интервала измерения аргумента t . Для этого воспользуемся стандартным преобразованием переменной $x \rightarrow \xi$, применяемым при обосновании метода усреднения или замене переменных [1–6]

$$x = \xi + \varepsilon u(t, \xi), \quad u \equiv \int_0^t X(s, \xi) ds, \quad X_0(\xi) \equiv 0 \quad (1.3)$$

Дифференцированием выражений (1.3) с учетом тождества для u получаем соотношение вида

$$\dot{\xi} = \varepsilon^2 \Xi(t, \xi, \varepsilon), \quad \xi(0) = x^0 \quad (\partial u / \partial t \equiv X(t, \xi)) \quad (1.4)$$

$$\Xi \equiv (I + \varepsilon u'_\xi)^{-1} \varepsilon^{-1} [X(t, \xi + \varepsilon u) - X(t, \xi)], \quad \xi \in D$$

Правая часть системы (1.4), т.е. функция Ξ , при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ будет гладкой по ξ , $\xi \in D$, и 2π -периодической по t ; для Ξ справедливо приближенное представление

$$\Xi = \Xi_{(0)}(t, \xi) + \varepsilon \Xi_1(t, \xi) + \varepsilon^2 \dots \equiv \Xi_{(0)} + \varepsilon \Delta \Xi \quad (1.5)$$

$$\Xi_{(0)} = X'_\xi u, \quad \Xi_1 = \frac{1}{2} (X''_{\xi^2} u, u) - u'_\xi X'_\xi u$$

Для задачи Коши (1.4), (1.5) рассматривается промежуток аргумента $0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$, на котором переменная ξ может существенно измениться – на величину порядка единицы. На такую же величину при этом изменится исходная переменная x . Требуется построить схему более высокого порядка по степеням ε и обосновать оценку близости. Отметим, что основная цель излагаемого асимптотического подхода, как и классического метода Крылова – Боголюбова [1], заключается в том, чтобы избежать секулярных членов при приближенном построении решения на рассматриваемом промежутке изменения аргумента $0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$. Актуальность разработки такого подхода в вычислительном аспекте также представляется значительной, так как численное интегрирование задач Коши (1.1), (1.4) при $t \sim 1/\varepsilon^2$ еще более проблематично, чем при $t \sim 1/\varepsilon$.

2. Усреднение на удлиненном промежутке. Применим к задаче Коши (1.4), (1.5) стандартную схему замены переменных $\xi \rightarrow \eta$ типа (1.3)

$$\xi = \eta + \varepsilon^2 v(t, \eta, \varepsilon) = \eta + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \varepsilon^4 \dots$$

$$v \equiv \int_0^t (\Xi(s, \eta, \varepsilon) - \langle \Xi \rangle) ds, \quad \eta \in D \quad (2.1)$$

$$\dot{\eta} = \varepsilon^2 \Xi_0(\eta) + \varepsilon^2 \Xi_{10}(\eta) + \varepsilon^4 H(t, \eta, \varepsilon), \quad \eta(0) = x^0$$

$$\Xi_0 = \langle \Xi_{(0)}(t, \eta) \rangle, \quad \Xi_{10} = \langle \Xi_1(t, \eta) \rangle, \dots, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$$

Здесь H – известная 2π -периодическая функция t , достаточно гладкая и равномерно ограниченная по η , $\eta \in D$, при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$; ее определение аналогично (1.4) для Ξ . Пусть $\Xi_0 \equiv 0$; тогда естественно ввести промежуток аргумента

$0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$, на котором переменная η , а вместе с нею и переменные ξ , x изменятся на существенную величину порядка единицы. Отбросим в правой части системы (2.1) члены $O(\varepsilon^3)$ и выше. Получим автономную систему "первого приближения", решение которой считается построенным (аналитически или численно)

$$\dot{\eta}_0 = \varepsilon^2 \Xi_0(\eta_0), \quad \eta_0(0) = x^0, \quad \eta_0 = \eta_0(\varepsilon^2 t, x^0) \quad (2.2)$$

$$0 \leq \varepsilon^2 t \leq L, \quad \Xi_0 = \langle X'_h u \rangle$$

Функция Ξ_0 в (2.1), (2.2) определяется согласно (1.5); значения $X(t, \xi)$, $u(t, \xi)$ берутся при $\xi = \eta = \eta_0$. Оценка равномерной близости решений задач (2.1) и (2.2) проводится с помощью интегральных неравенств (леммы Гронуолла [1–4]). Действительно, стандартная процедура построения оценок метода усреднения приводит к равномерной оценке

$$\max_t |\eta - \eta_0| \leq C_\eta \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^2; \quad C_\eta, L - \text{const} \quad (2.3)$$

$$C_\eta = M L \exp(\lambda L), \quad M = \max_{t, \eta} |\Xi_{10} + \varepsilon H|, \quad \eta \in D, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

Здесь λ – постоянная Липшица по η функции $\Xi_0(\eta)$.

Предполагается [1–3], что $\eta_0 \in D$ вместе с некоторой малой окрестностью на рассматриваемом, согласно (2.3), промежутке изменения t . Из (2.3) непосредственно следует с учетом (2.1), (1.3), что решение η_0 (2.2) ε -близко решениям ξ , x задач (1.4), (1.1) соответственно

$$\max_t |\xi - \eta_0| \leq C_\xi \varepsilon, \quad \max_t |x - \eta_0| \leq C_x \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^2 \quad (2.4)$$

$$(C_{\xi, x} - \text{const})$$

Таким образом, при $X_0 \equiv 0$, $\Xi_0 \neq 0$ решение первого приближения η_0 (2.2) определяет на интервале $t \sim 1/\varepsilon^2$ эволюцию системы (1.1) с малой погрешностью $O(\varepsilon)$ (см. (2.4)). Процедура уточнения решения η задачи (2.1) по степеням ε может быть реализована аналогично, как и в методе усреднения [1–6]. Требуемая степень точности ограничивается гладкостью функции Ξ , т.е. исходной правой части X (1.1). В частности, если функция $\Xi_{(0)}$ удовлетворяет условию Липшица по ξ , $\xi \in D$, с равномерно ограниченной постоянной λ , а функция $\Delta \Xi$ равномерно ограничена в области $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\eta \in D$, $t \geq 0$, то для решения первого приближения η_0 (2.2) имеют место оценки ε -близости (2.3), (2.4). Функция $\Xi_{(0)}$ будет таковой, если исходная функция X непрерывно дифференцируема по x , $x \in D$, а производные удовлетворяют условию Липшица. Естественно, схема более высокого порядка по степеням ε , чем стандартная схема усреднения, требует большей гладкости. По существу она связана с построением второго приближения (см. разд. 3).

Если функция $\Xi_{(1)} = \Xi_{(0)} + \varepsilon \Xi_1$ (1.5) удовлетворяет условию Липшица по ε , т.е. вторые производные функции X удовлетворяют этому условию по x , $x \in D$, то, согласно замене (2.1), выписывается система уравнений "второго приближения", приводящая к погрешности $O(\varepsilon^2)$ на рассматриваемом удлиненном промежутке изменения аргумента. Уточненная задача Коши имеет вид

$$\dot{\eta}_{(1)} = \varepsilon^2 \Xi(\eta_{(1)}) + \varepsilon^3 \Xi_{10}(\eta_{(1)}), \quad \eta_{(1)}(0) = x^0 \quad (2.5)$$

$$\eta_{(1)} = \eta_0(\varepsilon^2 t, x^0) + \varepsilon \eta_1(\varepsilon^2 t, x^0) + \varepsilon^2 \dots, \quad 0 \leq \varepsilon^2 t \leq L$$

Функция η_1 в (2.5) находится с помощью численных или аналитических методов на основе порождающего решения η_0 (2.2) и системы в вариациях [2]. При этом удобно

ввести медленный аргумент $\tau = \varepsilon^2 t$, $0 \leq \tau \leq L$. Без потери точности по степеням ε в функцию Ξ_{10} можно подставить $\eta_0(\tau, x^0)$. Используя найденное решение $\eta_{(1)}(\tau, x^0, \varepsilon)$ (2.5), получим оценки

$$\max_t |\eta - \eta_{(1)}| \leq C_\eta \varepsilon^2, \quad \max_t |\xi - \eta_{(1)}| \leq C_\xi \varepsilon^2 \quad (2.6)$$

$$\max_t |x - [\eta_{(1)} + \varepsilon u(t, \eta_0)]| \leq C_x \varepsilon^2, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$$

Построение более точных решений $\eta_{(k)}(t, x^0, \varepsilon)$, $k \geq 3$, отличающихся от η на $O(\varepsilon^k)$ для $0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$, требует большей гладкости функции X и весьма громоздких разложений с учетом выражения для $H(t, \eta, \varepsilon)$ (2.1) (см. ниже). Оно обычно малосодержательно: добавки не вносят существенного вклада в эволюцию системы на промежутке $0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. При выполнении условия $X_0(x) \equiv 0$ (1.2) и сформулированных условий гладкости по x и периодичности по t функции $X(t, x)$ решение $x(t, x^0, \varepsilon)$ системы (1.1) описывается на интервале $0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$ функцией $\eta_0(\varepsilon^2 t, x^0)$ (2.2) с погрешностью $O(\varepsilon)$, согласно (2.4), и функцией $\eta_{(1)} + \varepsilon u(t, \eta_0)$ (2.5) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ согласно (2.6). При $\Xi_0 \neq 0$ в общем случае переменная x изменяется на величину δx порядка единицы по отношению к малому параметру ε : $|\delta x| = |x - x^0| \sim O(1)$, $t \sim 1/\varepsilon^2$.

Доказательство теоремы 1 фактически приведено в предшествующих построениях и имеет конструктивный характер. Отметим, что функция X и величина x^0 могут зависеть от малого параметра ε гладким образом. Это предполагает проведение разложений по степеням ε [1–3] (см. примеры в разд. 4.2, 4.3). В частности, при $X = X(t, x, \varepsilon)$, $x(0) = x^0(\varepsilon)$, следует положить в (1.2)–(1.4)

$$X_0(\xi) \equiv \langle X(t, \xi, 0) \rangle, \quad \xi(0, \varepsilon) = x^0(0), \quad u \equiv \int_0^t X(s, \xi, 0) ds \quad (2.7)$$

Последующие выражения (1.4), (1.5) и другие потребуют учета функций $X'_\varepsilon, X''_{\varepsilon^2}, \dots$

и уточнения значения $\xi(0, \varepsilon)$, т.е. учет $x^{0'}(0), x^{0''}(0), \dots$. Конечно, если функции X, x^0 негладким образом (например, непрерывно) зависят от ε , то такие разложения невозможны и зависимость учитывается полностью.

3. Процедуры метода усреднения высших степеней. Наряду с тождеством первого порядка $X_0(\xi) \equiv 0$ может иметь место также тождество второго порядка $\Xi_0(\eta) \equiv 0$, т.е.

$$\Xi_0(\eta) = \langle X'_x(t, \eta) \int_0^t X(s, \eta) ds \rangle \equiv 0 \quad (3.1)$$

Тогда переменная η в первом приближении не изменяется на интервале $t \sim 1/\varepsilon^2$; согласно (2.2), получим $\eta_0 = x^0$; в результате $|\eta - x^0| = O(\varepsilon)$ (см. (2.3)). Переменные x и η также изменяются на величину $O(\varepsilon)$ при $t \sim 1/\varepsilon^2$. По аналогии с вышеизложенным устанавливаем, что эволюция медленной переменной η определяется величиной $O(\varepsilon^3)$ (см. (2.1), (1.5))

$$\dot{\eta} = \varepsilon^3 \Xi_{10}(\eta) + \varepsilon^4 H(t, \eta, \varepsilon), \quad \eta(0) = x^0 \quad (3.2)$$

$$\Xi_{10}(\eta) = \frac{1}{2} \langle (X''_{x^2}(t, \eta) u(t, \eta), u(t, \eta)) \rangle - \langle u'_\xi(t, \eta) X'_x(t, \eta) u(t, \eta) \rangle$$

К системе (3.2) при условии достаточной гладкости правой части по η применима процедура метода разделения движений, которая приводит к системе "первого приближения" и оценкам

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_0 &= \varepsilon^3 \Xi_{10}(\zeta_0), \quad \zeta_0(0) = x^0, \quad \zeta_0 = \zeta_0(\varepsilon^3 t, x^0) \\ |\eta - \zeta_0| &\leq C_\eta \varepsilon, \quad |\xi - \zeta_0| \leq C_\xi \varepsilon, \quad |x - \zeta_0| \leq C_x \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, при $X_0 = \Xi_0 \equiv 0$ существенное изменение переменной x происходит на интервале $t \sim 1/\varepsilon^3$ при условии $\Xi_{10} \neq 0$. Первое приближение (с погрешностью $O(\varepsilon)$) определяется функцией ζ_0 (3.3). Более точное вычисление требует, как обычно, привлечения стандартной схемы метода усреднения на основе явных выражений для функций $\Xi_{10}(\eta)$ и $H(t, \eta, \varepsilon)$. Аналогично может быть построена система уравнений эволюции медленных переменных любой степени по ε . Отметим, что изложенная процедура последовательных замен применялась в [5].

Схемы высших степеней можно реализовать по-другому, исходя из стандартной процедуры метода усреднения – замены переменных для исходной системы (1.1), описанной ранее [1–3]

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon U(t, \xi, \varepsilon) = \xi + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots + \varepsilon^k U_k + \varepsilon^{k+1} \dots \\ U_i &= U_i(t, \xi), \quad U_i(0, \xi) = 0 \\ \dot{\xi} &= \varepsilon \Theta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon \Theta_1 + \varepsilon^2 \Theta_2 + \varepsilon^3 \Theta_3 + \dots + \varepsilon^k \Theta_k + \varepsilon^{k+1} \dots \\ \xi(0) &= x^0, \quad \Theta_i = \Theta_i(\xi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Коэффициенты U_i асимптотического разложения (3.4) и соответствующие выражения Θ_i вычисляются в требуемом количестве через производные функции X в точке $x = \xi$, посредством квадратур и алгебраических операций. Если ограничиваться разложением k -го порядка, то переменная ξ будет описываться уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon \Theta_{(k)}(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} \Theta_{k+1}^*(t, \xi, \varepsilon), \quad \xi(0) = x^0 \\ \Theta_{(k)} &= \Theta_1 + \varepsilon \Theta_2 + \dots + \varepsilon^{k-1} \Theta_k \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть $\Theta_1(\xi) \neq 0$; тогда систему первого приближения, определяющую эволюцию вектора x , задают соотношения (3.4), (3.5) при $k = 1$

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon U_1(t, \xi), \quad \dot{\xi} = \varepsilon \Theta_1(\xi) + \varepsilon^2 \Theta_2^*(t, \xi, \varepsilon), \quad \xi(0) = x^0 \\ U_1 &= \int_0^t [X(s, \xi) - \Theta_1(\xi)] ds, \quad \Theta_1 = \langle X(t, \xi) \rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отбрасывая $\varepsilon^2 \Theta_2^*$ и решая задачу Коши, получим решение первого приближения $\xi_1(\varepsilon t, x)$. Разложение типа (3.4), (3.5) приведут к уточнению искомого решения x на величину $O(\varepsilon)$ при $t \sim 1/\varepsilon$.

Пусть теперь $\Theta_1(\xi) \equiv 0$, $\Theta_2(\xi) \neq 0$; тогда в качестве системы первого приближения естественно взять выражения (3.4), (3.5) при $k = 2$ (см. разд. 2)

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon U_1(t, \xi) + \varepsilon^2 U_2(t, \xi), \quad U_1 = \int_0^t X(s, \xi) ds \\ \dot{\xi} &= \varepsilon^2 \Theta_2(\xi) + \varepsilon^3 \Theta_3^*(t, \xi, \varepsilon), \quad \xi(0) = x^0 \\ \Theta_2 &= \langle X'_x(t, \xi) U_1(t, \xi) \rangle, \quad U_2 = \int_0^t [X'_x(s, \xi) U_1(s, \xi) - \Theta_2] ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

В качестве решения первого приближения системы (3.7) принимаем функцию ξ_1 , определяемую соотношениями (см. (2.2))

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \varepsilon^2 \Theta_2(\xi_1), \quad \xi_1(0) = x^0, \quad \xi_1 = \xi_1(\varepsilon^2 t, x^0), \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^2 \\ |\xi - \xi_1| &\leq C_\xi \varepsilon, \quad |x - \xi_1| \leq C_x \varepsilon \end{aligned} \quad (3.8)$$

Учет более высоких степеней ε в соотношениях (3.4), (3.5) приведет к малым $O(\varepsilon)$ поправкам искомого решения x (см. (3.2), (3.3)).

Аналогично выписывается система первого приближения произвольной k -й степени по ε

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon U_1 + \dots + \varepsilon^k U_k, \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \dots = \Theta_{k-1} \equiv 0, \quad \Theta_k \neq 0 \\ \dot{\xi}_1 &= \varepsilon^k \Theta_k(\xi_1), \quad \xi_1(0) = x^0, \quad \xi_1 = \xi_1(\varepsilon^k t, x^0) \\ |\xi - \xi_1| &\leq C_\xi \varepsilon, \quad |x - \xi_1| \leq C_x \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^k \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уточнение искомого решения x требует построения и интегрирования усредненной системы для ξ более высокого, чем k -е, приближения. Как отмечалось, такие расчеты проводятся элементарно на основе метода возмущений. При этом удобно ввести медленный аргумент $\tau_k = \varepsilon^k t$, $0 \leq \tau_k \leq L$.

Теорема 2. Пусть при применении метода усреднения в k -м приближении по ε выполняются тождества $\Theta_1 = \Theta_2 = \dots = \Theta_{k-1} \equiv 0$, но $\Theta_k(\xi) \neq 0$, $k \geq 1$ – любое. Тогда качественная эволюция системы (1.1) осуществляется на интервале $0 \leq t \leq L/\varepsilon^k$ и описывается функцией $\xi_1(\tau_k, x^0)$ (3.9) с погрешностью $O(\varepsilon)$.

Доказательство близости x и ξ_1 при $0 \leq t \leq L/\varepsilon^k$ проводится с помощью интегральных неравенств (леммы Гронуолла [1–4]).

Отметим, что наряду с применением стандартной процедуры метода усреднения [1–6] можно использовать рекуррентный метод ускоренной сходимости типа Ньютона для построения усредненной системы. На первом шаге итерационной процедуры полагаем, согласно преобразованию (1.3)

$$\begin{aligned} x &= x_{(1)} + \varepsilon U_1(t, x_{(1)}), \quad U_1 = \int_0^t X(s, x_{(1)}) ds, \quad \langle X \rangle \equiv 0 \\ \dot{x}_{(1)} &= \varepsilon^2 X_{(1)}(t, x_{(1)}, \varepsilon) \\ X_{(1)} &= \varepsilon^{-1} (I + \varepsilon U'_{1x})^{-1} [X(t, x_{(1)} + \varepsilon U_1) - X(t, x_{(1)})] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если среднее $\langle X_{(1)} \rangle = O(\varepsilon^2)$ или меньшее по степеням ε , то проводится следующий шаг итерации:

$$\begin{aligned} x_{(1)} &= x_{(2)} + \varepsilon^2 U_2(t, x_{(2)}, \varepsilon), \quad U_2 = \int_0^t X_{(1)}(s, x_{(2)}, \varepsilon) ds \\ \dot{x}_{(2)} &= \varepsilon^4 X_{(2)}(t, x_{(2)}, \varepsilon), \quad \varepsilon^4 = \varepsilon^{(2^2)} \\ X_{(2)} &= \varepsilon^{-2} (I + \varepsilon^2 U'_{2x})^{-1} [X_{(1)}(t, x_{(2)} + \varepsilon^2 U_2, \varepsilon) - X_{(1)}(t, x_{(2)}, \varepsilon)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Аналогично если среднее $\langle X_{(2)} \rangle = O(\varepsilon^4)$ или меньше по степеням ε , то сходным образом получаем усредненную систему третьего приближения $\dot{x}_{(3)} = O(\varepsilon^8)$. На k -м шаге имеем систему (при условии $\langle X_{(k-1)} \rangle = O(\varepsilon^{\theta(k-1)})$ или меньше)

$$\dot{x}_{(k)} = \varepsilon^{\theta(k)} X_{(k)}(t, x_{(k)}, \varepsilon), \quad \theta(k) = 2^k \quad (3.12)$$

Эволюция переменной x определяется на основе системы (3.12), если среднее $\langle X_{(k)} \rangle = O(\varepsilon^K)$, где $0 \leq K \leq \theta(k) - 1$. Эволюционные уравнения первого приближения приводятся к виду (3.9). Существенное изменение переменной x произойдет на интервале аргумента $0 \leq \tau \leq L/\varepsilon^K$, $\tau = \varepsilon^{\theta(k)} t$.

4. Примеры. Рассмотрим нелинейные колебательные системы, исследование существенной эволюции которых требует применения схемы усреднения второй степени по ε (см. разд. 2, 3).

4.1. *Модельный пример.* С иллюстративной целью возьмем скалярное уравнение, допускающее также аналитическое интегрирование,

$$\dot{x} = \varepsilon \sin(t + x), \quad x(0) = x^0, \quad X_0 \equiv 0 \quad (4.1)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} z / 2 + \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \Big|_{z=x^0}^{z=x+t} = \frac{t}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Разложениями по степеням ε соотношения (4.1) между x и t , ε или с помощью стандартной процедуры усреднения [1–6] получим искомое решение задачи Коши – выражение для x во втором приближении по ε

$$x = \xi_{(1)}(\tau, x^0) + \varepsilon(\cos x^0 - \cos(x^0 + t)) + O(\varepsilon^2) = x^0 + O(\varepsilon) \quad (4.2)$$

$$0 \leq t \leq L/\varepsilon$$

$$\xi_{(1)} \equiv x^0 - \tau/2, \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (0 \leq \tau \leq L\varepsilon), \quad \delta x = x - x^0 \sim \varepsilon$$

Применим к задаче Коши (4.1) схему усреднения второй степени (см. разд. 2, 3); получим искомое решение в первом и втором приближениях

$$x = \xi_{(1)}(\tau, x^0) + \varepsilon[\cos \xi^0 - \cos(t + \xi_{(1)})] + O(\varepsilon^2) = \xi_{(1)}(\tau, x^0) + O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^2 \quad (4.3)$$

Сравнение выражений (4.3) и (4.2) свидетельствует, что первый член разложения $\xi_{(1)}$ определяет решение второй степени с погрешностью $O(\varepsilon)$ на интервале $t \sim 1/\varepsilon^2$. За время $0 \leq t \leq L/\varepsilon^2$ происходит существенная эволюция δx переменной x (на величину $\delta x \approx -L/2$), которая из (4.1), (4.2) неочевидна. То обстоятельство, что в (4.2) содержится слагаемое $O(\varepsilon^2)$ на интервале $t \sim 1/\varepsilon$, вовсе не гарантирует, что оно будет таковым на интервале $t \sim 1/\varepsilon^2$ (например, при $O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2(\varepsilon t)^2)$).

4.2. *Квазилинейные колебания механической системы.* Рассмотрим вынужденные колебания нелинейного осциллятора вида

$$\ddot{q} + Q(q) = P(t) - \Lambda \dot{q}, \quad q(0) = q^0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}^0 \quad (4.4)$$

Здесь $-Q$ – нелинейная возвращающая сила в окрестности положения равновесия $q = q^*$ ($q^* = 0$), P – двухчастотное периодическое воздействие, Λ – коэффициент вязкого трения. Пусть $Q'(0) = \omega^2 > 0$ и предположим, что частоты $\nu_{1,2}$ внешнего воздействия соизмеримы с ω , т.е. имеет место резонансная ситуация. Тогда в предположении малости величин q^0 , $\dot{q}^0$, Λ и амплитуды $|P|$, которое будем характеризовать параметром ε , приведем уравнение (4.4) к виду (после сокращения на ε)

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega^2 y &= \varepsilon F(t, y, \dot{y}, \varepsilon), \quad y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = v \\ F &\equiv h \sin \nu_1 t + \alpha y^2 + \varepsilon(f \sin(\nu_2 t + \varphi) + \beta y^3 - \lambda \dot{y}) + \varepsilon^2 \gamma y^4 + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$q = \varepsilon y, \quad P = \varepsilon^2(h \sin \nu_1 t + \varepsilon f \sin(\nu_2 t + \varphi)), \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} Q''(0), \quad \beta = -\frac{1}{6} Q'''(0), \quad \gamma = -\frac{1}{24} Q^{IV}(0), \quad \Lambda = \varepsilon^2 \lambda > 0$$

Далее считается, что $\nu_1 = 2\omega$, $\nu_2 = \omega$, а остальные параметры – произвольные величины порядка единицы. Введем безразмерное время ($\omega t \rightarrow t$) и соответствующим образом переобозначим параметры. Переходя затем к оскулирующим переменным Ван дер Поля $x = (x_1, x_2)^T$, получим систему уравнений типа (1.1) в стандартной по Боголюбову форме [1–3]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \quad X_1 = -F \sin t, \quad X_2 = F \cos t \\ x_1(0) &= a, \quad x_2(0) = v \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$y = x_1 \cos t + x_2 \sin t, \quad \dot{y} = -x_1 \sin t + x_2 \cos t$$

Отметим, что функция X зависит от ε , т.е. требуется учитывать выражение (2.7). Из (4.5), (4.6) следует, что $X_{(0)}(x) = \langle X(t, x, 0) \rangle \equiv 0$, т.е. имеет место ситуация, описанная в разд. 1. Медленная переменная x может совершать существенную эволюцию $\delta x \sim O(1)$ на интервале $t \sim 1/\varepsilon^2$. Построение системы более высокой, второй степени типа (1.4) проводится посредством замены (1.3), в которой

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\alpha}{3}[\xi_1^2(1-c^3) + 2\xi_1\xi_2s^3 + \xi_2^2(2-3c+c^3)] - \frac{2}{3}hs^3, \quad c \equiv \cos t \\ u_2 &= \frac{\alpha}{3}[\xi_1^2(3s-s^3) + 2\xi_1\xi_2(1-c^3) + \xi_2^2s^3] + \frac{2}{3}h(1-c^3), \quad s \equiv \sin t \end{aligned} \quad (4.7)$$

В выражение Ξ_0 помимо слагаемого $X'_x(t, \xi, 0)u(t, \xi)$ входит также вектор $X'_\varepsilon(t, \xi, 0)$, обусловленный добавкой $O(\varepsilon)$ в функции F (4.5). Отбрасывая величины $O(\varepsilon^3)$ в уравнении для ξ , получим систему второй степени по ε :

$$\dot{\xi} = \varepsilon^2(X'_x(t, \xi, 0)u(t, \xi) + X'_\varepsilon(t, \xi, 0)), \quad \xi(0) = x^0 \quad (4.8)$$

Следующий этап исследования системы (4.6) заключается в усреднении по t правых частей уравнений (4.8) (см. (2.1)). В первом приближении для усредненной переменной η получим

$$\dot{\eta} = \varepsilon^2(\langle(X'_x)u\rangle + \langle(X'_\varepsilon)\rangle), \quad \eta(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon^2 \quad (4.9)$$

$$\langle(X'_{1x})u\rangle = -\frac{5}{12}\alpha^2\eta^2\eta_2 + \frac{1}{6}\alpha h\eta_1$$

$$\langle(X'_{1\varepsilon})\rangle = -\frac{1}{2}f \cos \varphi - \frac{3}{8}\beta\eta^2\eta_2 - \frac{1}{2}\lambda\eta_1$$

$$\langle(X'_{2x})u\rangle = \frac{5}{12}\alpha^2\eta^2\eta_1 - \frac{1}{6}\alpha h\eta_2$$

$$\langle(X'_{2\varepsilon})\rangle = \frac{1}{2}f \sin \varphi + \frac{3}{8}\beta\eta^2\eta_1 - \frac{1}{2}\lambda\eta_2$$

Выражения в круглых скобках типа $\langle X \rangle$ означают, что функция X берется при $x = \eta$, $\varepsilon = 0$. Система (4.9) обладает очевидными структурными свойствами; она может быть эффективно исследована качественными методами фазовой плоскости. В частности, при отсутствии внешнего воздействия ($h = f = 0$) уравнения (4.9) интегрируются в элементарных функциях

$$\eta^2 = x^{02} \exp(-\varepsilon\lambda t), \quad \eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad x^{02} = a^2 + v^2 \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) характеризует убывание полной энергии системы (4.5) во времени, обусловленное линейной диссипацией. После подстановки η^2 (4.10) в (4.9) получается элементарная интегрируемая система

$$\dot{\eta} = \varepsilon^2\left(\frac{5}{12}\alpha^2 + \frac{3}{8}\beta\right)\eta^2 J\eta - \frac{\varepsilon^2}{2}\lambda\eta, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

$$\eta_1 = (a \cos \psi - v \sin \psi) \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda t\right)$$

$$\eta_2 = (a \sin \psi + v \cos \psi) \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda t\right)$$

$$\psi = \left(\frac{5}{12}\alpha^2 + \frac{3}{8}\beta\right)\lambda^{-1}(1 - \exp(-\varepsilon^2\lambda t))$$

Согласно соотношениям (4.11), движение пассивной системы на интервале времени $t \sim 1/\varepsilon^2$ сводится к медленному вращению вектора начального состояния с экспоненциально убывающей угловой скоростью и медленному экспоненциальному затуханию. В системе имеется стационарная точка типа устойчивый узел (в линейном приближении). Интересно отметить, что нелинейные возмущения $O(\varepsilon y^2)$ и $O(\varepsilon^2 y^3)$ в (4.5) приводят на интервале $t \sim 1/\varepsilon^2$ к одинаковым по структуре воздействиям $O(\varepsilon^2 \eta^2 \eta_{1,2})$ (см. (4.9), (4.11)). Они имеют консервативный характер, причем первое не зависит от знака α , а второе определяется величиной β , что может приводить к их взаимной компенсации. Гармоническое воздействие $\varepsilon h \sin 2t$ (4.5) при достаточно большом $|\alpha h|$ приводит к неустойчивым стационарным точкам типа седло (в частности, при $f = 0$). При $h = 0$ получается весьма содержательная в механическом аспекте колебательная система, аналогичная осциллятору Дуффинга, которая хорошо изучена в литературе, в том числе для других резонансных соотношений [7–10]. Таким образом, изложенный подход свидетельствует, что на интервале $1/\varepsilon^2$ в системе (4.5) происходят интересные эволюционные процессы, которые не обнаруживаются при стандартном исследовании на интервале $t \sim 1/\varepsilon$.

4.3. Возмущенные параметрические колебания второй степени. Рассмотрим движение плоского физического маятника, ось которого совершает одночастотные колебания, с учетом момента вязких сил. В отличие от случая быстрых вибраций [1–3] предположим, что частота малых колебаний сравнима с частотой возбуждения. Относительно малыми величинами считаются амплитуда колебаний точки подвеса и момент сил вязкого трения. Имеем уравнение движения

$$J\ddot{\varphi} + Mgl \sin \varphi = -Ml(\ddot{x}_0(vt) \cos \varphi + \ddot{y}_0(vt) \sin \varphi) - \Lambda \dot{\varphi} \quad (4.12)$$

Здесь φ – угол отклонения оси маятника от вертикали, J – момент инерции, M – масса, l – расстояние между точкой подвеса и центром масс вдоль оси маятника, (x_0, y_0) – координаты точки подвеса, Λ – коэффициент момента сил вязкого трения, v – частота возбуждения. Для определенности полагаем, что точка движется по эллипсу в плоскости колебаний маятника

$$x_0 = d \sin(2vt + \delta), \quad y_0 = h \cos 2vt; \quad d, h, v, \delta, \Lambda = \text{const} \quad (4.13)$$

Далее, используя выражение (4.13), введем безразмерный аргумент θ и параметры $N^2, \chi, \varepsilon, \lambda$; получим вместо (4.12) уравнение

$$\varphi'' + (N^2 - \varepsilon \cos 2\theta) \sin \varphi = \chi \sin(2\theta + \delta) \cos \varphi - \lambda \varphi' \quad (4.14)$$

$$\theta = vt, \quad N^2 = Mgl(Jv^2)^{-1}, \quad \chi = 4MldJ^{-1}$$

$$\varepsilon = 4MlhJ^{-1}, \quad \lambda = \Lambda(Jv)^{-1}$$

Здесь штрих означает производную по аргументу θ . В качестве малого параметра примем величину ε ; малыми считаются также χ и λ ; величины N, δ , вообще говоря, произвольны.

Рассмотрим случай резонансных квазилинейных колебаний системы (4.14), приводящей к схеме усреднения второго порядка. Соответствующие предположения и уравнение имеют вид

$$y'' + (4 - \varepsilon \cos 2\theta)y = \varepsilon^2 [\kappa \sin(2\theta + \delta) - 4\gamma y + \frac{2}{3}y^3 - \sigma y'] + O(\varepsilon^3) \quad (4.15)$$

$$\varphi = \varepsilon y, \quad N = 2 + \varepsilon^2 \gamma, \quad \chi = \varepsilon^3 \kappa, \quad \lambda = \varepsilon^2 \sigma; \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Здесь $y, \gamma, \kappa, \sigma$ – величины порядка единицы.

Существенное отличие уравнения (4.15) от (4.5) заключается в параметрическом возбуждении, которое имеет порядок ε . Дальнейшие построения проводятся по ана-

логии с разд. 4.2. Совершается переход к оскулирующим переменным x_1, x_2 по формулам типа (4.6). Устанавливается, что средние функций X_1, X_2 по θ при $\varepsilon = 0$ тождественно равны нулю, а функции u_1, u_2 и усредненная система второй степени имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\xi_1}{12}(1 - \cos^3 2\theta) - \frac{\xi_2}{12}\sin^3 2\theta \\ u_2 &= \frac{\xi_1}{12}(3\sin 2\theta - \sin^3 2\theta) + \frac{\xi_2}{12}(1 - \cos^3 2\theta) \\ \xi_1' &= \varepsilon^2 \left(\left(\frac{1}{192} + \gamma \right) \xi_2 - \frac{\kappa}{4} \cos \delta - \frac{1}{8} \xi_1^2 \xi_2 - \frac{1}{2} \sigma \xi_1 \right), \quad \xi_1(0) = x_1^0 \\ \xi_2' &= \varepsilon^2 \left(\left(\frac{5}{192} - \gamma \right) \xi_1 + \frac{\kappa}{4} \sin \delta + \frac{1}{8} \xi_1^2 \xi_2 - \frac{1}{2} \sigma \xi_2 \right), \quad \xi_2(0) = x_2^0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Решение автономной системы (4.16) $\xi_{1,2}(\varepsilon^2\theta, x_1^0, x_2^0)$ определяет переменные $x_{1,2}$ и y, y' с погрешностью $O(\varepsilon)$ на интервале $0 \leq \theta \leq L/\varepsilon^2$, $L = \text{const}$. Оно может быть достаточно полно исследовано методами фазовой плоскости. Отметим, что слагаемые $\pm \gamma \xi_{1,2}$ и $\mp \xi_1^2 \xi_2$ имеют консервативный характер, т.е. выпадают в уравнении для полной энергии. Члены $-\sigma \xi_{1,2}/2$ приводят к экспоненциальному убыванию до нуля энергии, однако слагаемые одного знака (параметрическое воздействие) и члены, содержащие параметры κ, δ (внешнее резонансное воздействие), будут препятствовать этой диссипации.

Рассмотрим для конкретности ситуацию, когда горизонтальные колебания точки подвеса отсутствуют ($\kappa = 0$). Тогда система имеет стационарную точку покоя $\xi_1 = \xi_2 = 0$; исследуем ее устойчивость в смысле усредненных уравнений. Характеристические показатели таковы:

$$p_{1,2} = -\frac{\sigma}{2} \pm \mu, \quad \mu = \left[\left(\frac{1}{192} + \gamma \right) \left(\frac{5}{192} - \gamma \right) \right]^{1/2} \quad (4.17)$$

Видно, что выражение $\mu(\gamma)$ (4.17) обращается в нуль при $\gamma_1 = -1/192$ и $\gamma_2 = 5/192$. Вне промежутка $\gamma < \gamma_1, \gamma > \gamma_2$ выражение для μ мнимое, следовательно, эта точка покоя асимптотически устойчива ($\sigma > 0$, устойчивый фокус), а ε -близость между $\xi_{1,2}$ и $x_{1,2}$ будет иметь место для всех $\theta \geq 0$ [1–3]. Внутри промежутка функция $\mu \geq 0$, достигает максимума $\mu^* = 1/64$ при $\gamma^* = 1/96$. Если безразмерный коэффициент диссипации σ в (4.17) достаточно велик ($\sigma > 1/32$), то $p_{1,2} < 0$ и имеют место устойчивый узел и указанные выводы о близости. Если $0 < \sigma < 1/32$, то существует множество значений γ , где выполняются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (узел или фокус). На оси γ имеется интервал значений $\gamma' < \gamma < \gamma''$, которым отвечает экспоненциально неустойчивая точка (седло); граничные точки $\gamma = \gamma', \gamma''$ отвечают критическому случаю одного нулевого корня ($p_1 = 0$); другой корень отрицателен ($p_2 < 0$). Таким образом, распространение схемы исследований на интервал $\theta \sim 1/\varepsilon^2$ позволяет выявить, как и в примере разд. 4.2, весьма интересные особенности эволюции колебаний маятника с медленно колеблющейся точкой подвеса в ε^2 -окрестности рассматриваемого резонансного режима (2:2).

Автор благодарит А.И. Нейштадта за обсуждение результатов и конструктивные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222, 99-01-00276).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. Волосов В.М. Усреднение в системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 6. С. 3–126.
3. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
4. Besjes J.G. On the asymptotic methods for non-linear differential equations // J. Mec. 1969. V. 8. № 3. P. 357–372.
5. Нейштадт А.И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197–204.
6. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Динамические системы. Т. 3. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
7. Blaquiere A. Nonlinear system analysis. N.Y.; L.: Acad. Press, 1966. = Блакьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
8. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. B. etc.: Springer, 1958. = Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
9. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Анализ пространственных нелинейных колебаний струны // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 88–101.
10. Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В. Влияние диссипации на пространственные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 19–28.

Москва

Поступила в редакцию
21.VIII.2000